

УДК 517.958: 539.4: 629.7.02

С. А. ХАЛИЛОВ, В. С. КРИВЦОВ, В. Б. МИНТЮК, В. В. КОПЫЧКО,  
Д. А. ТКАЧЕНКО, В. Н. ПАВЛЕНКО*Национальный аэрокосмический университет им. Н. Е. Жуковского «ХАИ», Украина***ЗАДАЧА ДИРИХЛЕ ДЛЯ ТРАНСВЕРСАЛЬНО–ИЗОТРОПНОЙ ПАНЕЛИ**

*Статья входит в цикл ранее опубликованных работ о построении аналитико-численных решений краевых задач теории оболочек и пластин при произвольной нагрузке и неоднородных краевых условиях типа Дирихле. В отличие от предыдущих работ рассмотрена оболочка, выполненная из трансверсально-изотропного материала. Основное внимание уделяется, как и прежде, вопросам устойчивости, сходимости и точности получаемых аналитико-численных решений. Апостериорный анализ выполнен для цилиндрической панели. Численные результаты подробно отображены в многочисленных графиках и таблицах.*

**Ключевые слова:** оболочка, трансверсально-изотропная модель, поперечный сдвиг, краевая задача.

**Введение**

Актуальность построения аналитико-численных решений неоднородных краевых задач теории оболочек и пластин, в особенности для авиационных конструкций, неоднократно обсуждалась в прежних работах этого цикла [1 – 5]. Кроме того, актуальность данной работы подкрепляется тем, что поиск новых прогрессивных направлений в проектировании и производстве авиакосмической техники во многом связан с применением новых материалов, в частности композиционных, для которых характерна малая сдвиговая жесткость по толщине, что приводит к необходимости учета поперечных сдвигов. Математически это выражается, во-первых, увеличением числа искомых функций (с 3 до 5) и, во-вторых, повышением порядка системы дифференциальных уравнений краевой задачи (с 8 до 10). Эти два обстоятельства в совокупности имеют и положительную сторону: все уравнения системы имеют второй порядок, и, следовательно, в задаче Дирихле краевые условия формулируются только заданием значений самих искомых функций.

Решение неоднородных краевых задач теории оболочек и пластин – достаточно сложная задача. В большинстве случаев система уравнений имеет переменные коэффициенты. Исключение составляет только прямая круговая цилиндрическая оболочка, поэтому основными методами построения решений краевых задач для незамкнутых оболочек являются вариационные или проекционные методы. Подход, ранее предложенный в работах авторов и применяемый здесь, существенно опирается на редукцию неоднородной краевой задачи к ряду однородных. Такая редукция теоретически обоснована теоремами о следах, продолжении и вложениях.

**1. Постановка задачи**

Итак, рассматривается задача Дирихле для открытой оболочки (панели произвольной геометрии срединной поверхности), когда на границе заданы компоненты вектора обобщенных перемещений  $\mathbf{u}$  ( $u, v, w, \gamma_1, \gamma_2$ ). Вначале дается конструкция решения аналогично тому, как это сделано в работе [6]. Построение такой конструкции основано на сведении решения общей задачи к решению ряда базовых [1] задач. Это – краевые задачи для системы линейных дифференциальных уравнений с частными производными и однородными краевыми условиями Дирихле при неоднородных правых частях. Таким образом, определяющей является базовая задача: именно она подлежит исследованию в смысле устойчивости, сходимости и точности при наложении дополнительных требований к гладкости входных данных задачи.

Исходная краевая задача формулируется следующим образом:

$$\mathbf{L}\mathbf{u} = \mathbf{Q} \text{ в } \Omega = \{(\alpha, \beta) : \alpha_1 < \alpha < \alpha_2, \beta_1 < \beta < \beta_2\}, \quad (1)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}^* \text{ на } \Gamma, \quad (2)$$

где  $\Gamma$  – граница области  $\Omega$ ;

$\alpha, \beta$  – криволинейные координаты точки на срединной поверхности оболочки, изменяющиеся в прямоугольной области;

$\mathbf{u}$  – пятикомпонентный вектор неизвестных ( $u, v, w, \gamma_1, \gamma_2$ );  $u, v, w$  – компоненты вектора перемещений точки срединной (опорной) поверхности оболочки;  $\gamma_1, \gamma_2$  – компоненты вектора углов поворота нормали в точке срединной поверхности оболочки;

$\mathbf{Q}$  – известный пятикомпонентный вектор, учитывающий действующую нагрузку (силовую, обусловленную тензором дисторсии (в том числе и

температурные напряжения) и др.);

$\mathbf{u}^*$  – заданный пятикомпонентный вектор обобщенных перемещений.

Между декартовыми координатами  $(x, y, z)$  точки, лежащей на срединной поверхности оболочки, и координатами  $(\alpha, \beta)$  имеет место отображение гомеоморфизма, определяемое тремя равенствами  $x = x(\alpha, \beta)$ ,  $y = y(\alpha, \beta)$ ,  $z = z(\alpha, \beta)$ , причем ранг матрицы первых производных декартовых координат по криволинейным координатам равен двум.

Вектор перемещения произвольной точки оболочки представляется в виде

$$\mathbf{u} = u\mathbf{e}_1 + v\mathbf{e}_2 + w\mathbf{e}_n + \gamma\mathbf{z}\mathbf{e}_n,$$

где  $\gamma = -\gamma_2\mathbf{e}_1 + \gamma_1\mathbf{e}_2 + \gamma_n\mathbf{e}_n$ ;

$\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_n$  – координатные векторы срединной поверхности оболочки.

Компонента  $\gamma_n$  характеризует средний поворот окрестности рассматриваемой точки срединной поверхности вокруг нормали и может быть определена осреднением соответствующего выражения в теории упругости [7]

$$\gamma_n = (\Omega_n)_{z=0} = \frac{1}{2A_1A_2} \left( \frac{\partial A_2 v}{\partial \alpha_1} - \frac{\partial A_1 u}{\partial \alpha_2} \right), \quad (3)$$

где  $A_1, A_2$  – квадратные корни из коэффициентов первой квадратичной формы поверхности, отнесенной к линиям главных кривизн (правильная координатная сетка на срединной поверхности оболочки является ортогональной и сопряженной).

Таким образом, в отличие от классической теории Кирхгофа–Лява здесь смещения произвольной точки эквидистантной поверхности оболочки характеризуются пятью величинами – тремя перемещениями  $u, v, w$  соответствующей точки ее срединной поверхности и двумя углами поворота нормального волокна  $\gamma_1, \gamma_2$ , в то время, как в теории Кирхгофа–Лява, эти же перемещения характеризуются тремя величинами  $u, v, w$ .

Общий порядок системы (1) равен десяти, так что каждое уравнение системы имеет второй порядок. Свойства матричного дифференциального оператора  $\mathbf{L}$  будут обсуждены по мере необходимости в дальнейшем. Неклассическим теориям оболочек, свободным от гипотезы Кирхгофа–Лява, посвящено очень много работ, в которых кроме поперечных сдвигов учитывается и обжатие. Количество этих работ все время растет. Трансверсально-изотропным оболочкам с учетом поперечных сдвигов полностью посвящена, например, монография [8], ориентируясь на которую, авторы обнаружили в ней ряд неточностей (описок, ошибок в наборе, просто ошибок?).

Следует также отметить, что система уравнений в обобщенных перемещениях для цилиндрической оболочки, приведенная в упомянутой работе и содержащая отмеченные погрешности, приводится

во всех местах этой монографии, в которых идет речь о цилиндрической оболочке. Поэтому представляется целесообразным дать вывод разрешающих уравнений в обобщенных перемещениях на основе известных соотношений [7], дополненных с учетом особенностей данной модели. Слоистость пакета, а также поперечных сдвигов и обжатия учтена в одной из последних работ на эту тему, а именно в монографии [9].

Полная система уравнений, описывающих деформирование любой оболочки, состоит из трех групп: уравнений равновесия, геометрических соотношений и соотношений упругости.

Поскольку уравнения равновесия – это уравнения статики, то они не зависят от свойств материала. Для произвольной оболочки, отнесенной к линиям главных кривизн, они получены, например, в работе [7] и имеют вид (учтено только силовое нагружение):

$$\begin{aligned} \frac{1}{A_1A_2} \left( \frac{\partial A_2 T_1}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial A_1 T_{21}}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} T_{12} - \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} T_2 \right) + \frac{N_1}{R_1} &= -q_1; \\ \frac{1}{A_1A_2} \left( \frac{\partial A_1 T_2}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial A_2 T_{12}}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} T_{21} - \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} T_1 \right) + \frac{N_2}{R_2} &= -q_2; \\ \frac{1}{A_1A_2} \left( \frac{\partial A_2 N_1}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial A_1 N_2}{\partial \alpha_2} \right) - \frac{T_1}{R_1} - \frac{T_2}{R_2} &= -q_n; \\ \frac{1}{A_1A_2} \left( \frac{\partial A_2 M_1}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial A_1 M_{21}}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} M_{12} - \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} M_2 \right) - N_1 &= -m_1; \\ \frac{1}{A_1A_2} \left( \frac{\partial A_1 M_2}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial A_2 M_{12}}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} M_{21} - \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} M_1 \right) + N_2 &= -m_2, \end{aligned} \quad (4)$$

где  $T_1, T_2, T_{12}, T_{21}, N_1, N_2$  – погонные усилия;

$M_1, M_2, M_{12}, M_{21}$  – погонные моменты;

$q_1, q_2, q_n, m_1, m_2$  – объемные силы и моменты.

Положительные направления осей криволинейной системы координат, перемещений, действующих нагрузок, погонных усилий и моментов показаны на рис. 1.

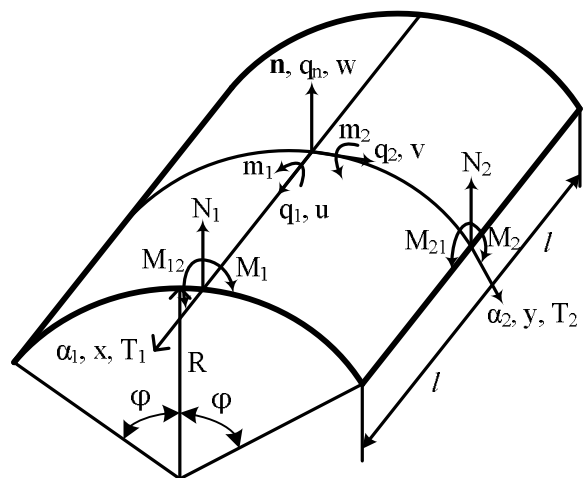


Рис. 1. Положительные направления осей криволинейной системы координат, перемещений, действующих нагрузок, погонных усилий и моментов

Геометрические уравнения имеют вид [8]:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{1}{A_1} \frac{\partial u}{\partial \alpha_1} + \frac{v}{A_1 A_2} + k_1 w; \\ \varepsilon_2 &= \frac{1}{A_2} \frac{\partial v}{\partial \alpha_2} + \frac{u}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} + k_2 w; \\ \varepsilon_{12} &= \frac{A_2}{A_1} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left( \frac{v}{A_2} \right) + \frac{A_1}{A_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left( \frac{u}{A_1} \right); \\ \varepsilon_{13} &= \gamma_1 + \frac{1}{A_1} \frac{\partial w}{\partial \alpha_1} - k_1 u; \\ \varepsilon_{23} &= \gamma_2 + \frac{1}{A_2} \frac{\partial w}{\partial \alpha_2} - k_2 v; \\ \chi_1 &= \frac{1}{A_1} \frac{\partial \gamma_1}{\partial \alpha_1} + \frac{\gamma_2}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2}; \\ \chi_2 &= \frac{1}{A_2} \frac{\partial \gamma_2}{\partial \alpha_2} + \frac{\gamma_1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1}; \\ 2\chi_{12} &= \frac{A_2}{A_1} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left( \frac{\gamma_2}{A_2} \right) + \frac{A_1}{A_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left( \frac{\gamma_1}{A_1} \right) + \\ &+ k_1 \left( \frac{1}{A_1} \frac{\partial v}{\partial \alpha_1} - \frac{u}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \right) + \\ &+ k_2 \left( \frac{1}{A_2} \frac{\partial u}{\partial \alpha_2} - \frac{v}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \right), \end{aligned} \tag{5}$$

где  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_{12}, \varepsilon_{13}, \varepsilon_{23}$  – компоненты тангенциальной и трансверсальной деформаций;

$\chi_1, \chi_2, \chi_{12}$  – компоненты изгибной деформации и деформации кручения;

$k_1, k_2$  – главные кривизны.

Соотношения упругости (уравнения состояния), аналогичные соотношениям Новожилова–Балабуха [7], скорректированные с учетом свойств рассматриваемого материала, таковы:

$$\begin{aligned} T_1 &= B(\varepsilon_1 + \nu \varepsilon_2); T_2 = B(\varepsilon_2 + \nu \varepsilon_1); \\ T_{12} &= \frac{Eh}{2(1+\nu)} (\varepsilon_{12} + \frac{h^2}{6R_2} 2\chi_{12}); N_1 = \Lambda \varepsilon_{13}; \\ T_{21} &= \frac{Eh}{2(1+\nu)} (\varepsilon_{12} + \frac{h^2}{6R_1} 2\chi_{12}); N_2 = \Lambda \varepsilon_{23}; \tag{6} \\ M_1 &= D(\chi_1 + \nu \chi_2); M_2 = D(\chi_2 + \nu \chi_1); \\ M_{12} &= M_{21} = H = D(1-\nu) 2\chi_{12}, \end{aligned}$$

где  $B = Eh/(1-\nu^2)$  – мембранная жесткость оболочки в плоскостях изотропии;

$D = Eh^3/(1-\nu^2)$  – её изгибная жесткость в тех же плоскостях;

$\Lambda = khG^*$  – трансверсальная сдвиговая жесткость;

$G^*$  – трансверсальный модуль сдвига материала оболочки;

$k$  – коэффициент, учитывающий неравномерность распределения касательных напряжений по толщине оболочки ( $k = 5/6$ );

$h$  – толщина оболочки;

$R_1, R_2$  – главные радиусы кривизн;

$E, \nu$  – модуль упругости и коэффициент Пуассона материала оболочки в плоскости изотропии соответственно.

Для получения исходной системы (1) необходимо в уравнениях равновесия (4) усилия и моменты выразить через деформации (6), а деформации – через обобщенные перемещения по равенствам (5). В результате придем к искомой системе (1) для произвольной оболочки, отнесенной к линиям главных кривизн. Эта система имеет переменные коэффициенты и достаточно сложна. Поскольку ниже рассматривается цилиндрическая оболочка, то указанные уравнения можно упростить, а именно: положим  $x = \alpha_1, y = \alpha_2/R$ , тогда:  $A_1 = 1, A_2 = R, k_1 = 0, k_2 = 1/R$ . После этого выполним линейное преобразование координат так, чтобы выполнялись неравенства:  $-1 \leq x(y) \leq 1$ . Полученную в результате таких преобразований систему запишем в развернутой форме

$$\sum_{j=1}^5 L_{ij} u_j = Q_i, i = 1 \dots 5 \text{ в } \Omega, \tag{7}$$

где  $u_j$  –  $j$ -я компонента вектора  $\mathbf{u}$  в порядке, указанном выше (см. формулу (2));

$Q_i$  –  $i$ -я компонента вектора нагрузок  $\mathbf{Q} = (-q_1/B, -q_2/B, q_3/B, -m_1/B, -m_2/B)$ ;

$L_{ij}$  – дифференциальные операторы следующего вида:

$$\begin{aligned} L_{11} &= \frac{1}{l^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1-\nu}{2R^2 \varphi^2} \frac{\partial^2}{\partial y^2}; \\ L_{12} = L_{21} &= \frac{1+\nu}{2Rl\varphi} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}; L_{13} = L_{31} = \frac{\nu}{Rl} \frac{\partial}{\partial x}; \\ L_{14} = L_{41} = L_{15} = L_{51} &= 0; \\ L_{22} &= \frac{1}{R^2} \left[ \frac{(1-\nu)(12R^2 + h^2)}{24l^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{\varphi^2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\Lambda}{B} \right]; \\ L_{23} = L_{32} &= \frac{1}{R^2 \varphi^2} \left( 1 + \frac{\Lambda}{B} \right) \frac{\partial}{\partial y}; \\ L_{24} = L_{42} &= \frac{h^2(1-\nu)}{24R^2 l \varphi} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}; \\ L_{25} = L_{52} &= \frac{h^2(1-\nu)}{24Rl^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\Lambda}{BR}; \\ L_{33} &= \frac{1}{R^2} - \frac{\Lambda}{B} \left( \frac{1}{l^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{R^2 \varphi^2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right); \\ L_{34} = L_{43} &= -\frac{\Lambda}{Bl} \frac{\partial}{\partial x}; L_{35} = L_{53} = -\frac{\Lambda}{BR\varphi} \frac{\partial}{\partial y}; \\ L_{44} &= \frac{h^2}{12} \left( \frac{1}{l^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1-\nu}{2R^2 \varphi^2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) - \frac{\Lambda}{B}; \end{aligned} \tag{8}$$

$$L_{45} = L_{54} = \frac{h^2(1+\nu)}{6Rl\varphi} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}; \quad (9)$$

$$L_{55} = \frac{h^2}{12} \left( \frac{1-\nu}{2l^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{R^2 \varphi^2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) - \frac{\Lambda}{B}.$$

Обведенные операторы содержат существенные ошибки в упомянутой монографии [8].

Относительно системы (7) можно сказать следующее: она симметрична, а ее матричный дифференциальный оператор  $L$  положительно определен. Это значит, что выполнена теорема Бетти о взаимности работ, а шестое (конечное) уравнение равновесия удовлетворено тождественно. Отсюда следует, что краевой задаче (1) – (2) соответствует некоторая вариационная постановка в виде принципа минимума полной потенциальной энергии.

Несколько слов о гладкости искомых функций. Если исходить из краевой задачи, то, как следует из вида операторов (8), все компоненты вектора обобщенных перемещений должны быть дважды непрерывно дифференцируемыми по обеим переменным ( $u_i \in C_2(\Omega)$ ,  $i = 1...5$ ). В вариационной постановке требуется лишь, чтобы выполнялись включения:  $u_i \in H^1(\Omega)$ ,  $i = 1...5$ ,  $H^1(\Omega) \equiv W_2^1$  – функциональное пространство С. Л. Соболева. Гладкость входных данных характеризуется гладкостью правой части системы уравнений(1), гладкостью её коэффициентов, гладкостью краевых функций из условий (2) и видом области  $\Omega$ , а точнее – гладкостью её границы  $\Gamma$ . Граница  $\Gamma$  – липшицева, содержащая угловые точки с внутренними углами, равными  $90^\circ$ . Эта величина угла является приграничной в том смысле, что при переходе через это значение от меньшего к большему в угловой точке напряжения оказываются сингулярными [10].

Формально для существования и единственности обобщенного решения краевой задачи (1) – (2) требуется, чтобы компоненты вектора правых частей были из пространства  $H_L^*(\Omega)$ , сопряженного к пространству  $H_L(\Omega)$ :  $H_L^*(\Omega) = (H^1(\Omega))^5$  – пространство обобщенных функций (функционалов). В вариационной постановке эти условия можно значительно ослабить: достаточно сохранить априорные условия  $u_i^* \in C(\Gamma)$ ,  $i = 1...5$ , однако и эти условия можно ослабить на основании теоремы о следах: достаточно потребовать  $u_i^* \in H^{1/2}(\Gamma)$ ,  $i = 1...5$ . Но из физического смысла компонент  $u_i^*$  (перемещения и углы поворота) следует  $u_i^* \in C(\Gamma)$ ,  $i = 1...5$ .

## 2. Общая конструкция решения

В общем случае конструкция решения краевой задачи типа (1) – (2), когда не ограничивается число уравнений системы, но допускается наличие в урав-

нениях дифференциального оператора четвертого порядка (как в классической теории), приведена в работе [6]. Однако общий подход к построению решения позволяет убрать и последнее ограничение: оператор  $L_{ii}$  может быть любого четного порядка. При этом требование симметрии матрицы дифференциального оператора можно также опустить, тогда лучше перейти к эквивалентной обобщенной постановке исходя из теоремы Лакса–Мильграма: условие симметрии следует заменить на так называемое условие  $V$ -эллиптичности задачи, где  $V \equiv (H^1(\Omega))^5$ , в том смысле, что  $(Lu, u) > k^2 \|u\|^2$ .

Поскольку все уравнения системы имеют второй порядок, то можно ввести характерный представитель искомого вектора обобщенных перемещений  $u$  обозначим его  $U$ , а соответствующую ему заданную краевую функцию – через  $f(t)$ , где  $t = x$  или  $t = y$ ,  $t \in [-1, 1]$ . Будем искать приближенное решение в виде

$$U(x, y) = U^*(x, y) + U_0(x, y), \quad (10)$$

где  $U^*$  – специальное частное решение краевой задачи (1) с однородными краевыми условиями;

$U_0$  – решение краевой задачи с однородной правой частью и неоднородными краевыми условиями.

Функцию  $U^*$  ищем в виде

$$U^*(x, y) = \sum_m \sum_n U_{mn} h_m(x) h_n(y), \quad (11)$$

где  $h_i(t)$  – представитель одного из семейств функций [11, ф-ла (2) при показателе семейства  $\alpha = 0$ ];

$U_{mn}$  – искомые коэффициенты.

Краевую функцию  $f(t)$  представим суммой:

$$f(t) = \psi(t) + \chi(t), \quad (12)$$

где  $\psi(t)$  – линейная функция, которую необходимо подобрать так, чтобы выполнялось равенство  $\chi(\pm 1) = 0$ , тогда  $\psi(\pm 1) = f(\pm 1)$ .

В соответствии с таким представлением краевых функций  $U_0$  запишем в виде суммы двух компонент:

$$U_0(x, y) = U_{01}(x, y) + U_{02}(x, y), \quad (13)$$

каждую из которых также разложим на две части:

$$U_{01}(x, y) = U_{011}(x, y) + U_{012}(x, y); \quad (14)$$

$$U_{02}(x, y) = U_{021}(x, y) + U_{022}(x, y). \quad (15)$$

Решение  $U_{01}$  соответствует линейным компонентам краевых функций  $\psi$ , а  $U_{02}$  – оставшимся  $\chi$ .

Зададим первые компоненты представления (13) формально так, чтобы краевые условия были выполнены, т.е. продолжим линейные краевые функции с границы в область на основании теорем о продолжении. Формальность продолжения заключается в том, что необходимо выполнить всего два условия: точно выполнить линейные краевые условия и обеспечить необходимую гладкость продолженной функции, при этом свойства оператора диф-

ференциальных уравнений никак не учитываются. Предлагается следующий вариант продолжения краевых функций в область (таких продолжений множество. Очевидно, существует оптимальное в некотором смысле продолжение, но этот вопрос здесь не рассматривается)

$$U_{011}(x, y) = \sum_{p=1}^2 \sum_{q=1}^2 \bar{U}_{pq} v_p(x) v_q(y), \quad (16)$$

где  $v_1(t) = 0,5(1-t)$ ,  $v_2(t) = 0,5(1+t)$ ;

$\bar{U}_{pq}$  – обобщенные перемещения угловых точек.

Соответствие индексов и координат – следующее: 11  $\Rightarrow$  (-1,-1), 12  $\Rightarrow$  (-1,1), 21  $\Rightarrow$  (1,-1), 22  $\Rightarrow$  (1,1).

Вторые компоненты представлений (13) должны быть определены из решения базовой краевой задачи

$$\sum_{j=1}^5 L_{ij} u_j = - \sum_{j=1}^5 L_{ij} u_{011j}, i = 1 \dots 5 \text{ в } \Omega, \quad (17)$$

правая часть которой всегда имеет смысл, поскольку произведения  $v_i(t)v_j(t)$  – билинейные функции (линейные по каждой из переменных).

Первые из компонент равенства (14) продолжим в область исходя из их конкретного задания следующим образом:

$$U_{021} = \sum_{k=1}^2 \{ \chi_k(y) v_k(x) + \chi_k(x) v_k(y) \}, \quad (18)$$

где  $\chi_k(x)$ ,  $\chi_k(y)$  – части соответствующих краевых функций.

При этом краевые условия выполнены. Тогда вторые компоненты из (14) определим из решения базовой краевой задачи

$$\sum_{j=1}^5 L_{ij} u_{j022} = - \sum_{j=1}^5 L_{ij} u_{j021}, i = 1 \dots 5 \text{ в } \Omega. \quad (19)$$

Здесь необходимо сделать замечание: теперь становится ясным значение термина “формальное продолжение”: эта формальность устраняется тем, что решения базовых задач (16) и (18) будут зависеть от свойств матричного дифференциального оператора  $L$ . Говоря иначе, решения отмеченных базовых задач являются корректирующими в том плане, что они дополняют формально продолженные функции так, что выполнена основная система уравнений задачи.

Чтобы правая часть системы (18) имела смысл, необходимо изменить требования, предъявляемые к краевым функциям  $f(t)$ , а именно – потребовать, чтобы  $\chi(t) \in C^2[-1;1]$ . Если это включение не выполнено, то необходимо несколько видоизменить алгоритм построения решения. Это приведет к необходимости замены представления (17) неким более общим представлением, однако этот вопрос да-

лее не рассматривается. Если же ограничиться представлением (17), то правые части (18) следует понимать в смысле теории обобщенных функций и учесть формулы их дифференцирования. Отметим также, что функции типа  $\chi(t)$  “наследуют” в области задания все свойства гладкости исходных функций  $f(t)$ . На этом решение краевой задачи (1) – (2) завершено.

### 3. Апостериорный анализ решения

Как уже отмечалось, основной целью этой работы является исследование устойчивости, сходимости и точности получаемых решений. Известна теорема П. Лакса о взаимозависимости устойчивости сходимости и точности. Согласно этой теореме, проблемы сходимости и точности напрямую зависят от устойчивости процесса получения решений и порядка аппроксимации дифференциальной задачи её конечномерным аналогом. Ключевым здесь является термин «устойчивость».

Рассматриваемая проблема для метода конечных разностей (МКР) для уравнений второго и четвертого порядков подробно исследована (в плане получения априорных оценок) в монографии [12]. Что же касается аппроксимации в МКЭ (которая давно практически вытеснила метод конечных разностей в механике деформируемого твердого тела), то с получением априорных оценок здесь дело обстоит значительно сложнее. Если их получение и возможно, то они выглядят более сложно, чем в МКР. Результатов здесь немного. Приведем три примера. Пусть  $u$  – точное решение краевой задачи, а  $u_m$  – приближенное решение по МКЭ. Тогда априорная оценка точности приближенного решения по МКЭ по какой-либо норме выглядит так:

$$\|u - u_m\|_{H(s)} \leq C_p \cdot m^{-k}, u \in H(s), \quad (20)$$

где  $C_p$  – константа Гельдера –Липшица, зависящая от типа конечного элемента  $P$  (обычно – это достаточно большая величина);

$k$ ,  $m$  – целые, положительные числа ( $m$  характеризует степень разбивки,  $k$  – порядок сходимости).

Здесь необходимо отметить, что в получении оценки типа (19) основная сложность заключается в определении константы  $C_p$ . Достаточно указать, что получению подобных констант для эллиптических задач для уравнений второго порядка и систем, состоящих из подобных уравнений, посвящена широко известная монография [13]. Приведем несколько примеров.

Первый пример. В задачах четвертого порядка (например, изгиб пластин) наилучший элемент – треугольник Аргириса ( $k = 4$ ,  $P = 21$ ,  $s = 4$ ) [14]. Прекрасный элемент, но, к сожалению, константа  $C_p$

не определена. Неравенство (19) является содержанием так называемой « $\pi$ - $m$ »-проблемы в МКЭ ( $\pi$  – степень аппроксимирующего многочлена). Суть этой проблемы заключается в том, что одну и ту же точность можно достигнуть, увеличивая либо  $\pi$ , либо  $m$ . Но, увеличив, например,  $m$ , можно уменьшить  $\pi$  (и наоборот) и получить приемлемый результат. Из существования этой проблемы следует, что прежде чем решать какую-то задачу, надо провести ряд скрупулезных исследований: решить задачу при различных разбиениях и различных степенях аппроксимирующего многочлена, т.е. пользователю МКЭ нужен «поводырь». Автор работы [14], обсуждая общие свойства конечных элементов, попытался дать некоторые практические указания. И, в конце концов, пришел к выводу: «Для практических целей ничто не заменит опыта вычислений, накопленного инженерами за многие годы», с чем авторы данной работы полностью согласны.

Второй пример. Треугольный оболочечный (классическая теория) элемент двойкой кривизны с 12 степенями свободы в узлах треугольника и двумя дополнительными степенями ( $u$  и  $v$ ) в центре тяжести треугольника, предложенный Каупером, Линдбергом и Олсоном [15]. Здесь  $P = 38$  и, как утверждается (без доказательства) в работе [16, с. 409 – 437],  $k = 6$ .  $C_p$  и  $s$  не определены ( $C_p$  неизвестно, а  $s$ , как можно догадаться, определяется энергетической метрикой в соболевском пространстве  $H_1(\Omega) \equiv H^1(\Omega) \times H^1(\Omega) \times H^2(\Omega)$ , что следует из существования конечной энергии деформирования). Этому конечному элементу присуща патологическая несовместимость деформаций по межэлементным границам, хотя, как утверждается в работе [16, с. 409 – 437], «...все разрывы между элементами уменьшаются и стремятся к нулю по мере увеличения их числа».

Третий пример. Модифицированный прямоугольник Богнера–Фокса–Шмита ( $k = 2$ ,  $P = 16$ ,  $s = 4$ ).  $C_p$  – неизвестно (модификация дана С. А. Халиловым в работе [6]).

Перейдем к анализу полученного решения. Поскольку процедура построения всех компонент решения сводится к решению базовой задачи, то в дальнейшем исследуется решение именно этой задачи для открытой круговой цилиндрической оболочки при следующих входных данных:  $l = 1$  м;  $R = 1$  м;  $h = 0,01$  м;  $\varphi = \pi/2$ ;  $\nu = 0,3$ ;  $q_1 = q_2 = 0$ ;  $E = 72$  ГПа;  $\eta = E/G^* = 2,6$ ;  $m_1 = m_2 = m_3 = 0$ ,  $q_3 = 100$  кПа. Отметим, что  $q_3 = \text{const}$  – далеко не самый благоприятный случай.

Принятый здесь проекционный (или вариационный, что в данном случае одно и то же) метод анализа сводит решение краевой задачи к решению системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ). В разрешающую СЛАУ проникают по-

грешности вычислительного характера: элементы матрицы системы и вектора правых частей вычислены с некоторой погрешностью  $\epsilon_m$  и  $\epsilon_Q$  соответственно. Источником этих погрешностей являются приближенные вычисления интегралов по области. Здесь отмеченные интегралы взяты точно [17]. Однако это еще не гарантирует теоретическую точность, поскольку конкретные вычисления проводятся с конечным числом значащих цифр. В работе вычисления проводили с удержанием 64 знаков, а элементы конечной матрицы представлялись 32 знаками. Поэтому, располагая уверенностью в точности вычислений, процесс анализа погрешностей СЛАУ опущен.

Как уже отмечалось, основной проблемой, требующей анализа, является проблема устойчивости решений и процедуры их получения. Компоненты этих решений выражены в виде рядов по полной, ортонормированной системе функций  $h_m, h_n$ . Вполне естественно под устойчивостью указанной процедуры понимать процесс стабилизации численных значений коэффициентов этих рядов, начиная с некоторых значений  $M$  и  $N$ . Под стабилизацией, в свою очередь, понимается, что с ростом  $M$  и  $N$  изменения происходят во все более дальних знаках этих коэффициентов, что обеспечивает и устойчивость самих решений (малые изменения входных данных приводят к малым изменениям решения) и процедуры их получения. Этот процесс демонстрируется в табл. 1, где рассматривается сходимость коэффициентов  $W_{mn}$  (так как компонента  $w$  является наиболее характерной для оболочки при данной нагрузке).

Во всех таблицах верны все подчеркнутые значащие цифры.

Как видно, коэффициенты  $W_{mn}$  достаточно быстро стабилизируются. Аналогично обстоит ситуация и с другими компонентами вектора  $u$ .

Исходя из теоремы П. Лакса следует, что сходимость решения к точному и точность приближенных решений можно обеспечить только тогда, когда имеет место устойчивость получения приближенных решений. О точности решения можно судить по данным табл. 2, в которой приведены отношения последнего при соответствующих  $M$  и  $N$  коэффициента к первому. При этом следует учесть, что функции  $h_n(x)$  ограничены на отрезке  $[-1, 1]$  в совокупности (независимо от  $n$ ).

Сопоставляя эти отношения при различных  $M$  и  $N$ , замечаем, что их величины падают на несколько порядков с ростом  $M$  и  $N$ , что свидетельствует о высокой скорости сходимости компонент аналитико-численного решения к точному. Можно сказать, что данные табл. 2 определяют так называемую поточечную сходимость. Поскольку компоненты искомого вектора по своему физическому смыслу яв-

ляются перемещениями и углами поворота, т. е. функциями непрерывными, и представлены в виде разложений в двойные ряды, то следует ожидать, что эти ряды сходятся равномерно и абсолютно. Наибольший интерес для инженеров представляют напряжения, которые в рассматриваемой модели определяются через первые производные от компонент вектора перемещений. Исходя из неравенства А. А. Маркова об оценке производной от многочлена по оценке самого многочлена (на самом деле эту оценку можно улучшить) на некотором отрезке [18, с. 336] можно утверждать, что напряжения сходятся также равномерно и абсолютно, т. е. в метрике пространства  $(C^1(\Omega))^5$ .

Хотя сходимости в  $(C^1(\Omega))^5$  гарантирует сходимости в  $(H^1(\Omega))^5$  и, тем более, в  $(L_2(\Omega))^5$  по теоремам вложения [19], вопрос о скорости сходимости в  $(L_2(\Omega))^5$  остается открытым. Исходя из неравенства Бесселя, переходящего при  $M$  и  $N \rightarrow \infty$  в равенство Парсеваля-Стеклова (это равенство имеет место, поскольку речь идет о сходимости в гильбертовом пространстве, а ортонормированная и полная система функций  $h_m h_n$  является замкнутой) квадрат нормы вектор-функции как элемента пространства  $(L_2(\Omega))^5$  в точности равен сумме квадратов коэффициентов рядов, посредством которых эти функции представлены. Представление о таком типе сходимости и точности дает табл. 3, из которой, как и следовало ожидать, видно, что она достаточно быстрая (можно ограничиться уже  $M = N = 10$ , а может быть, и меньшими значениями).

И, наконец, имеет смысл дать конструктивную оценку сходимости по энергетической норме  $H_L(\Omega)$ , т. е. в пространстве  $(H^1(\Omega))^5$ . Эта сходимости иллюстрируется данными табл. 4, где относительная энергия деформации оболочки вычислена в долях от величины  $Eh/(1-\nu^2)$  по формуле  $\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2$ ,  $\mathcal{E}_2$  – энергия сдвиговых деформаций.

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_1 &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left\{ (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)^2 - 2(1-\nu) \left( \varepsilon_1 \varepsilon_2 - \frac{1}{4} \varepsilon_{12}^2 \right) \right\} + \\ &+ \frac{h^2}{12} \left[ (\chi_1 + \chi_2)^2 - 2(1-\nu) (\chi_1 \chi_2 - \chi_{12}^2) \right] A_1 A_2 dx dy; \quad (21) \\ \mathcal{E}_2 &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{G^* (1-\nu^2)}{E} (\varepsilon_{13}^2 + \varepsilon_{23}^2) A_1 A_2 dx dy. \end{aligned}$$

Данные таблицы прозрачны и позволяют сделать два вывода: скорость сходимости по энергии весьма и весьма высока, а при принятых входных данных энергия сдвига составляет приблизительно тысячную долю от общей энергии деформирования, т. е. при принятых входных данных учет деформаций поперечных сдвигов для оценки НДС не имеет смысла. Это обстоятельство может оказаться неверным при других входных данных, характеризующих

отношениями  $E/G^*$  и  $h/R$ .

Из результатов исследований, отраженных в приведенных выше таблицах, следуют такие выводы: краевые условия, геометрические соотношения и уравнения состояния выполнены точно. При этом имеет место сходимости в пространстве  $(H^1(\Omega))^5$ , чего требует конечность функционала энергии. Отсюда и из теорем вложения [19, 20] следует также, что компоненты искомого вектора являются функциями класса  $C(\bar{\Omega})$ . На самом деле наблюдается более сильная сходимости: компоненты неизвестного вектора являются функциями класса  $C^2(\Omega)$ . Чтобы в этом убедиться (конструктивно), обратимся к уравнениям равновесия, которые в силу выбранного метода решения задачи (метода перемещений) могут быть нарушены. Вычислим невязки по всей области  $\Omega$ . В рассматриваемой задаче отлична от нуля лишь компонента  $q_3 = \text{const}$  вектора нагрузок, поэтому вычислим отношение значений левой части к нормированной правой, принятой равной единице. Если вычисления точны, то это отношение должно равняться единице во всей области. В этом случае можно утверждать поточечную сходимости к нулю невязки в открытой области, занятой оболочкой. Сказать, что имеет место равномерная сходимости, мы не можем. О действительном распределении этого отношения дает представление табл. 5, где оно вычислено при  $M = N = 50$  (в силу симметрии рассматривается лишь первый квадрант).

Как следует из данных табл. 5, сходимости невязки в третьем уравнении к нулю при  $M$  и  $N \rightarrow \infty$  в области практически выполнена, неблагоприятная зона начинается с  $y = 0,95$ , т. е. у прямолинейных краев оболочки. Этому есть объяснение: во-первых, правая часть была принята равной единице точно, хотя в разрешающих уравнениях она была представлена своим разложением в двойной ряд по полной ортонормированной системе  $h_m h_n$ , т. е. она не была равна единице точно, и, во-вторых, на границе  $y = 1$  имеет место явление Гиббса (аналогично тригонометрическому случаю).

Имеет смысл также оценить невязку в каком-либо уравнении с нулевой правой частью, например, в четвертом. Здесь необходимо вычислить суммы положительных и отрицательных членов уравнения в левой части и сравнить их отношение по модулю, которое также должно равняться единице (табл. 6). Здесь ситуация заметно лучше, однако у прямолинейных краев также наблюдается явление Гиббса.

Для выяснения целесообразности учета поперечных сдвигов в зависимости от свойств материала было проведено исследование влияния параметра  $\eta$  ( $\eta = E/G^*$ ) на НДС оболочки ( $h/R = 0,01$ ). И из соотношений читаемости графиков приведены лишь

Таблица 1

Стабилизация коэффициентов  $W_{mn}$

К-т	M = N = 10	M = N = 20	M = N = 30	M=N=40	M=N=50
$W_{0,0} \cdot 10^4$	2,185358710	2,185234278	2,185234012	2,185233954	2,185233948
$W_{0,2} \cdot 10^5$	9,128517375	9,128569347	9,128572424	9,128572891	9,128572957
$W_{2,0} \cdot 10^5$	6,498024554	6,497044579	6,497043938	6,497043716	6,497043685
$W_{2,2} \cdot 10^5$	2,410491764	2,409471245	2,409474898	2,409475186	2,409475212
$W_{0,4} \cdot 10^5$	2,343366559	2,348238789	2,348254338	2,348257228	2,348257519
$W_{4,0} \cdot 10^5$	1,998983508	1,997596783	1,997598755	1,997599036	1,997599068
$W_{2,4} \cdot 10^5$	1,285753912	1,288987179	1,289007236	1,289010662	1,289011102
$W_{4,2} \cdot 10^6$	6,612893615	6,594620883	6,594738709	6,594757519	6,594759872
$W_{0,6} \cdot 10^5$	2,668489220	2,666193333	2,666191721	2,666191291	2,666191270
$W_{6,0} \cdot 10^6$	-2,002383659	-1,999207451	-1,999175656	-1,999170238	-1,999169550

Таблица 2

К оценке точности и сходимости решения

Отношение	M=N=10	M=N=20	M=N=30	M=N=40	M=N=50
$ U_{M+1,N}/U_{1,0} $	$7,366 \cdot 10^{-4}$	$1,344 \cdot 10^{-5}$	$1,729 \cdot 10^{-6}$	$3,960 \cdot 10^{-7}$	$4,496 \cdot 10^{-7}$
$ V_{M,N+1}/V_{0,1} $	$6,353 \cdot 10^{-4}$	$2,036 \cdot 10^{-5}$	$2,621 \cdot 10^{-6}$	$5,692 \cdot 10^{-7}$	$4,178 \cdot 10^{-7}$
$ W_{M,N}/W_{0,0} $	$1,778 \cdot 10^{-3}$	$5,303 \cdot 10^{-7}$	$1,214 \cdot 10^{-8}$	$1,279 \cdot 10^{-10}$	$2,415 \cdot 10^{-10}$
$ \Gamma_{1M+1,N}/\Gamma_{1,0} $	$8,321 \cdot 10^{-3}$	$1,308 \cdot 10^{-5}$	$7,927 \cdot 10^{-7}$	$4,438 \cdot 10^{-7}$	$4,460 \cdot 10^{-7}$
$ \Gamma_{2M,N+1}/\Gamma_{2,0} $	$6,633 \cdot 10^{-2}$	$6,712 \cdot 10^{-5}$	$7,959 \cdot 10^{-6}$	$2,392 \cdot 10^{-6}$	$2,015 \cdot 10^{-6}$

Таблица 3

К сходимости и точности в  $L_2(\Omega)$

	M=N=10	M=N=20	M=N=30	M=N=40	M=N=50
$\sum(U_{M+1,N}^2) \cdot 10^{12}$	7,401366	7,371988	7,371988	7,371986	7,371986
$\sum(V_{M,N+1}^2) \cdot 10^{10}$	1,564844	1,561710	1,561704	1,561703	1,561703
$\sum(W_{M,N}^2) \cdot 10^8$	6,300529	6,298851	6,298852	6,298853	6,298853
$\sum(\Gamma_{1M+1,N}^2) \cdot 10^7$	4,180276	4,156838	4,156844	4,156846	4,156846
$\sum(\Gamma_{2M,N+1}^2) \cdot 10^7$	2,407261	2,410131	2,410136	2,410136	2,410136

Таблица 4

Сходимость по энергии

Энергия, Дж	M=N=10	M=N=20	M=N=30	M=N=40	M=N=50
$\mathcal{E}_1 \cdot 10^8$	5,8868282742	5,886833622182987	5,8868337754	5,8868337762	5,8868337762
$\mathcal{E}_2 \cdot 10^{11}$	7,5729250241	7,572951877188381	7,5729561579	7,5729568594	7,5729568595

Таблица 5

К распределению невязки в третьем уравнении

xy	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	0,95	0,975	0,995
0	1,006	1,003	0,995	0,986	0,984	1,000	1,048	1,024	1,048	0,994	0,057	0,080	0,122
0,2	1,022	1,011	0,982	0,952	0,953	1,019	1,039	1,019	1,020	0,999	0,066	0,078	0,130
0,4	1,017	1,008	0,987	0,963	0,962	1,009	1,011	1,020	1,034	0,990	0,094	0,066	0,136
0,6	1,009	1,005	0,992	0,979	0,976	1,002	1,069	1,058	1,050	0,994	0,152	0,038	0,123
0,8	1,003	1,001	0,997	0,992	0,992	1,001	1,029	1,083	1,022	0,986	0,371	0,104	0,003
0,9	1,001	1,000	0,999	0,997	0,998	1,002	1,014	1,039	1,064	0,999	0,678	0,425	0,455
0,95	0,997	1,002	0,998	0,995	1,002	1,000	1,023	1,044	1,086	1,009	0,873	0,694	0,696
0,975	0,999	1,001	0,999	0,998	1,001	1,001	1,011	1,022	1,036	0,988	0,923	0,875	0,902
0,995	1,001	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,001	1,004	1,017	1,051	1,066	0,950	0,606

Таблица 6

К распределению невязки в четвертом уравнении

xy	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	0,95	0,975	0,995
0	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
0,2	1,000	1,001	1,000	1,000	1,000	0,999	1,000	1,000	1,000	0,999	0,999	1,001	1,004
0,4	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,999	1,000	1,000	1,000	0,999	0,999	1,000	1,005
0,6	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,999	1,000	1,001	1,000	0,999	1,000	1,005	1,275
0,8	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,996	0,996	0,997	1,239
0,9	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,999	0,994	0,777
0,95	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,998	0,797
0,975	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,001	0,999	0,803
0,995	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,001	1,001	0,813



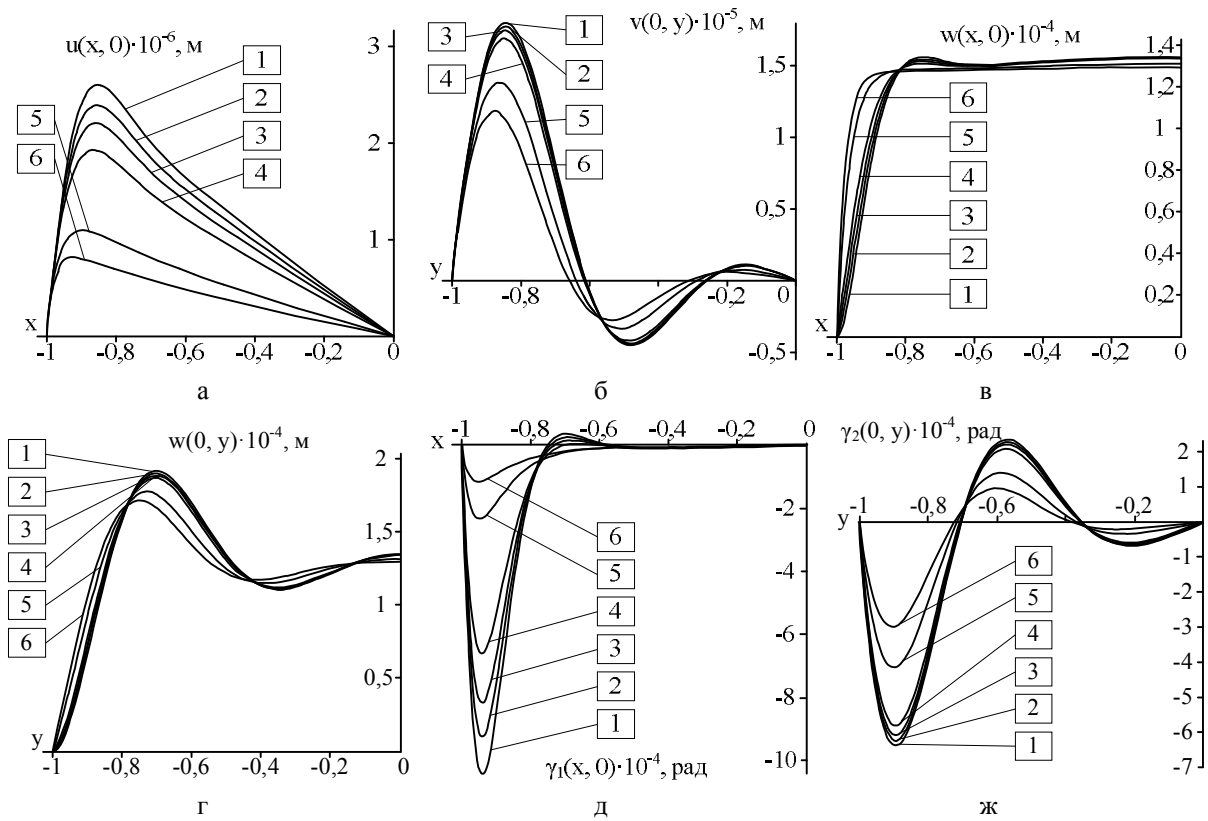


Рис. 2. Перемещения и углы поворота на центральных линиях: а –  $u$  на линии  $y=0$ ; б –  $v$  на линии  $x=0$ ; в –  $w$  на линии  $y=0$ ; г –  $w$  на линии  $x=0$ ; д –  $\gamma_1$  на линии  $y=0$ ; ж –  $\gamma_2$  на линии  $x=0$

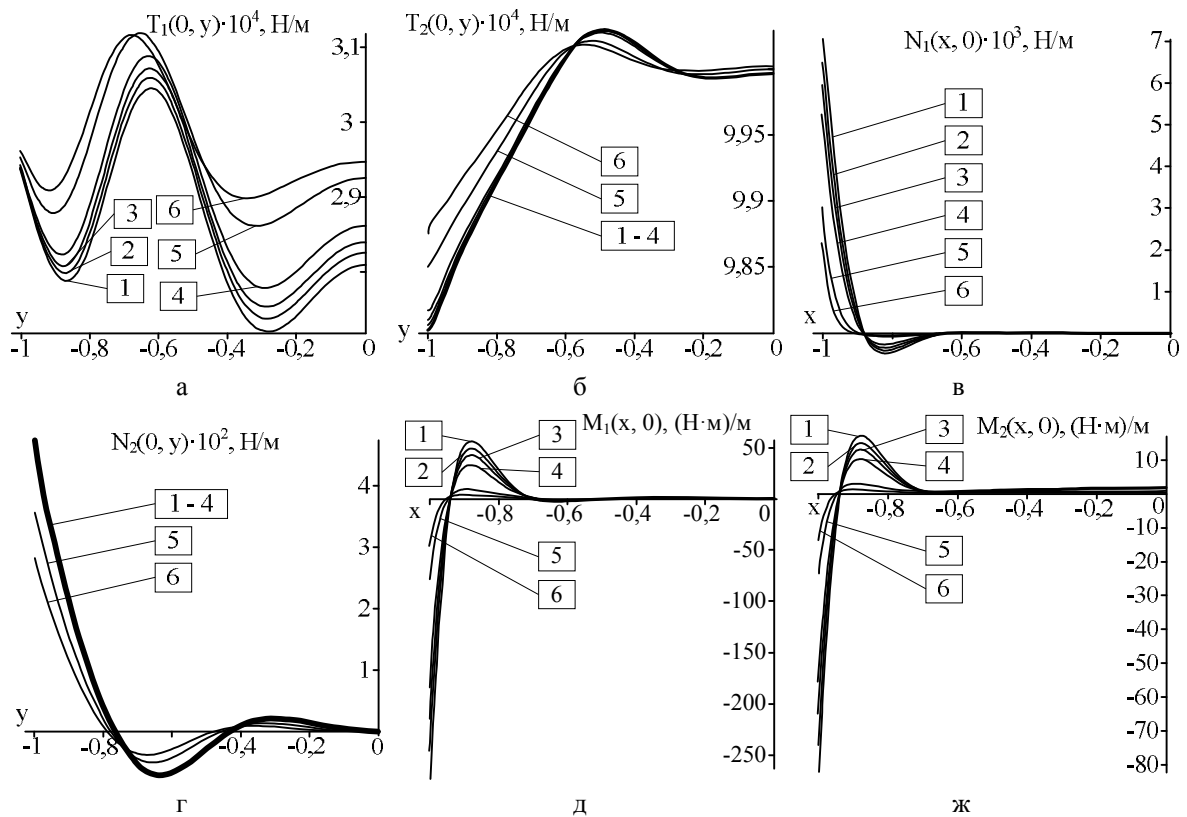


Рис. 3. Усилия и моменты на центральных линиях: а –  $T_1$  на линии  $x=0$ ; б –  $T_2$  на линии  $x=0$ ; в –  $N_1$  на линии  $y=0$ ; г –  $N_2$  на линии  $x=0$ ; д –  $M_1$  на линии  $y=0$ ; ж –  $M_2$  на линии  $x=0$

некоторые характерные случаи, а именно:  $\eta = 2,6$  (1); 25 (2); 50 (3); 100 (4); 500 (5); 1000 (6).

На рис. 2 изображены графики перемещений и углов поворота по центральным линиям в зависимости от  $\eta$ .

Видно, что обобщенные перемещения сконцентрированы вблизи краев и имеют очень высокую изменчивость. Особое внимание следует обратить на два последних графика здесь налицо так называемый вихревой краевой эффект. Потенциальный же краевой эффект – менее выраженный.

На рис. 3 изображены распределения усилий и моментов по центральным линиям. Как и в случае классической теории, потенциальный краевой эффект (графики для  $T_1$  и  $T_2$ ) выражен не так резко, как вихревой (графики для  $N_1$ ,  $N_2$ ,  $M_1$ ,  $M_2$ ).

Сопоставим мембранные и моментные напряжения, для чего вычислим их в точке, где максимален соответствующий момент, и в точке, где максимально соответствующее усилие по следующим формулам:

$$\sigma_{xT} = \frac{|T_1|}{h}; \quad \sigma_{xM} = \frac{|6M_1|}{h^2}; \quad \sigma_{yT} = \frac{|T_2|}{h}; \quad \sigma_{yM} = \frac{|6M_2|}{h^2}.$$

Сопоставления этих напряжений представлены в табл. 7. Конечно же, такое сравнение весьма субъективно, однако эти точки можно назвать в некотором смысле характерными, поэтому ограничимся рассмотрением напряжений именно в них.

Данные, приведенные в табл. 8 и проиллюстрированные на рис. 4, демонстрируют целесообразность применения трансверсально-изотропной теории в зависимости от параметра  $\eta$ .

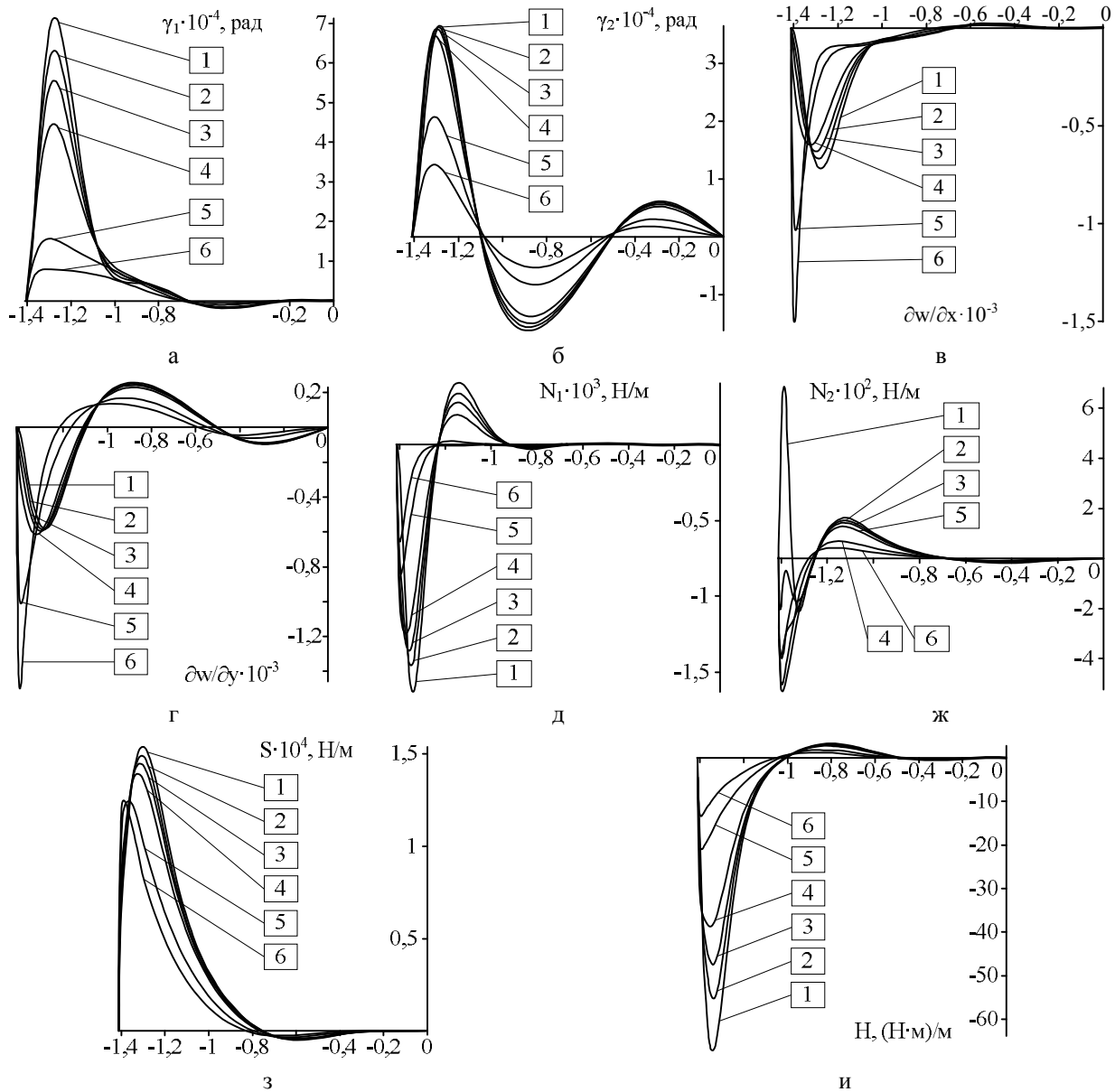


Рис. 4. Распределение некоторых компонент НДС по диагонали первого квадранта: а –  $\gamma_1$ ; б –  $\gamma_2$ ; в –  $\partial w / \partial x$ ; г –  $\partial w / \partial y$ ; д –  $N_1$ ; ж –  $N_2$ ; з –  $S$ ; и –  $H$

Таблица 7

Сопоставление напряжений  $\sigma_x$  и  $\sigma_y$ 

$\eta$	$u_{T1max},$ ( $x_{T1max}=0$ )	$\sigma_x(T_1),$ МПа	$\sigma_x(M_1),$ МПа	$x_{M1max},$ ( $y_{M1max}=0$ )	$\sigma_x(T_1),$ МПа	$\sigma_x(M_1),$ МПа	$u_{T2max},$ ( $x_{T2max}=0$ )	$\sigma_y(T_2),$ МПа	$\sigma_y(M_2(1,0)),$ МПа	$\sigma_y(T_2),$ МПа	$\sigma_y(M_2(1,0)),$ МПа
2,6	0,62	3,04539	0,14814	0,88	2,76277	3,39499	0,5	10,02935	0,27301	9,80203	3,46244
25	0,62	3,05936	0,14333	0,88	2,77929	2,96137	0,5	10,02897	0,26940	9,80612	3,40214
50	0,63	3,07145	0,15763	0,88	2,79435	2,57383	0,5	10,02851	0,26505	9,81003	3,33187
100	0,63	3,08846	0,14693	0,88	2,81741	2,00745	0,5	10,02754	0,25607	9,81656	3,19914
500	0,66	3,11854	0,12875	0,89	2,89069	0,58206	0,53	10,02106	0,16763	9,85003	2,39849
1000	0,68	3,11604	0,10132	0,90	2,92269	0,24477	0,55	10,01818	0,09788	9,87574	1,80050

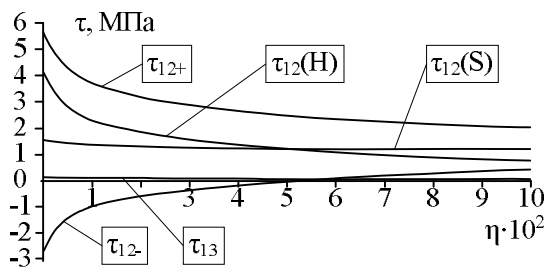
Таблица 8

К анализу влияния параметра  $\eta$  на компоненты НДС оболочки

$\eta$	$\gamma_1, \text{рад}$	$w_x$	$\tau_{13}, \text{МПа}$	$\tau_{12}(S), \text{МПа}$	$\tau_{12}(H), \text{МПа}$	$\tau_{12}(S)+\tau_{12}(H), \text{МПа}$	$\tau_{12}(S)-\tau_{12}(H), \text{МПа}$
2,6	0,00071	0,00072	0,16305	1,53964	4,03655	5,57618	-2,49691
25	0,00063	0,00067	0,14431	1,48826	3,30849	4,79675	-1,82022
50	0,00055	0,00063	0,13577	1,45023	2,84755	4,29777	-1,39732
100	0,00045	0,00060	0,12461	1,39320	2,31974	3,71294	-0,92654
500	0,00016	0,00101	0,08247	1,24227	1,24240	2,48466	-0,00013
1000	0,00008	0,00150	0,06389	1,24629	0,78739	2,03368	0,45889

И наконец, необходимо сопоставить напряжения  $\tau_{13}$  и  $\tau_{12}$ , а также проверить следующее из классической теории равенство угла поворота первой производной от прогиба. Для этого нам понадобятся распределения некоторых величин по диагонали (где они достигают наибольших значений).

Эти распределения изображены на рис. 5 (рассмотрена диагональ первого квадранта).

Рис. 5. Соотношение напряжений  $\tau_{12}$  и  $\tau_{13}$ 

Как можно видеть из табл. 9, при малых величинах  $\eta$  равенство  $\gamma_1 = -dw/dx$ , следующее из классической теории, практически выполнено, однако с ростом  $\eta, \gamma_1$  и  $dw/dx$  все более разнятся. Напряжения  $\tau_{13}$  и  $\tau_{12}$  падают с ростом  $\eta$ , однако независимо от  $\eta$  их соотношение не изменяется:  $\tau_{13}$  составляет примерно 3% от  $\tau_{12}$ . Таким образом, можно сказать, что учет касательных напряжений имеет смысл лишь для «экзотических» материалов либо, когда требуется чрезвычайная точность расчетов.

## Заключение

1. Процедура получения аналитико-численных решений обладает высокой степенью устойчивости: числовые параметры этих решений быстро стабилизируются и в дальнейшем не изменяются, что обеспечивает сходимость решений к точным. Получен-

ные решения следует понимать в классическом смысле: выполнены все законы и принципы МДТГ для рассматриваемой модели, причем незначительная погрешность (из-за ограниченности числа удерживаемых неизвестных) имеет место только в уравнениях равновесия (метод перемещений). С увеличением числа неизвестных можно добиться уменьшения (практически до 0) этой погрешности.

2. При фиксированном отношении  $h/R$  установлен предел отношения  $E/G^*$ , начиная с которого следует учитывать поперечные сдвиги. Однако нельзя утверждать, что в иных случаях эти сдвиги не должны учитываться, поскольку вызываемые ими касательные напряжения, оставаясь незначительными, ответственны за присущий композитам тип разрушения путем расслоения.

3. Полученные решения, обладающие высокой точностью, могут служить в качестве критериальных как при разработке новых методов решения подобных задач, так и для оценки точности решений, получаемых другими известными методами, например, по МКЭ, для которого очень важен выбор типа элемента. В этом направлении данные решения могут оказать исследователю, пользующемуся МКЭ, неоценимую помощь.

4. Оставаясь в рамках получения «полиномиальных» аналитико-численных решений, из множества способов продолжения функций с границы в область был выбран именно «полиномиальный» способ. Таким образом, иные способы продолжения (возможно, более рациональные) остались «за кадром». Работа в этом направлении ведется.

## Литература

1. Основная краевая задача общей классической теории открытой цилиндрической оболочки.

Решение базовой задачи [Текст] / С. А. Халилов, В. Б. Минтюк, В. В. Копычко, Д. А. Ткаченко // *Авиационно-космическая техника и технология*. – 2015. – № 3(120). – С. 24 – 32.

2. Кривцов, В. С. Основная краевая задача обшей классической теории открытой цилиндрической оболочки. Конструкция решения [Текст] / В. С. Кривцов, В. Н. Павленко, В. В. Копычко // *Авиационно-космическая техника и технология*. – 2015. – № 6(123). – С. 5 – 11.

3. Копычко, В. В. Деформирование открытой цилиндрической оболочки при согласованных обобщенных перемещениях угловых точек границы [Текст] / В. В. Копычко // *Открытые информационные и компьютерные интегрированные технологии : сб. науч. тр. Нац. аэрокосм. ун-та им. Н. Е. Жуковского «ХАИ»*. – 2015. – Вып. 70. – С. 184 – 193.

4. Копычко, В. В. Деформирование открытой цилиндрической оболочки с неподвижными угловыми точками границы и произвольными перемещениями её границы [Текст] / В. В. Копычко // *Открытые информационные и компьютерные интегрированные технологии : сб. науч. тр. Нац. аэрокосм. ун-та им. Н. Е. Жуковского «ХАИ»*. – 2016. – Вып. 71. – С. 179 – 188.

5. Основная краевая задача обшей классической теории открытой цилиндрической оболочки. Особенности деформирования при жестком заземлении граничного контура [Текст] / С. А. Халилов, В. В. Копычко, В. С. Кривцов, В. Н. Павленко // *Авиационно-космическая техника и технология*. – 2016. – № 1(128). – С. 5 – 17.

6. Новые методы исследования линейно и нелинейно деформируемых тел из композиционных материалов. Математические модели, методы их анализа и численная реализация нелинейного деформирования тонкостенных пространственных систем [Текст] : отчет о НИР (заключ.), т. 2 ; рук. С. А. Халилов ; исполн. В. Б. Минтюк [и др.]. – Х., 2014. – 160 с. – №ГР 0112U002135. – Инв. № 0215U006163.

7. Новожилов, В. В. Теория тонких оболочек [Текст] / В. В. Новожилов. – 2-е изд. – Л. : Судпромгиз, 1962. – 431 с.

8. Пелех, Б. Л. Теория оболочек с конечной сдвиговой жесткостью [Текст] / Б. Л. Пелех. – К. : Наук. думка, 1973. – 246 с.

9. Рассказов, А. О. Теория и расчет слоистых ортотропных пластин и оболочек [Текст] / А. О. Рассказов, И. И. Соколовская, Н. А. Шульга. – К. : Вища школа, 1986. – 191 с.

10. Партон, В. З. Методы математической теории упругости [Текст] : учеб. пособие / В. З. Партон, П. И. Перлин. – М. : Наука, 1981. – 688 с.

11. Халилов, С. А. Новые системы ортонормированных многочленов, некоторые их свойства и приложения [Текст] / С. А. Халилов // *Прочность конструкций летательных аппаратов : темат. сб. науч. тр. Харьк. авиац. ин-та им. Н. Е. Жуковского*. – Вып. 5. – Х., 1978. – С. 46 – 56.

12. Самарский, А. А. Разностные схемы для дифференциальных уравнений с обобщенными решениями [Текст] : учеб. пособие для ун-тов / А. А. Самарский, Р. Д. Лазаров, В. Л. Макаров. – М. : Высш. шк., 1987. – 296 с.

13. Сьярле, Ф. Метод конечных элементов для эллиптических задач [Текст] / Ф. Сьярле. – М. : Мир, 1980. – 512 с.

14. Ладыженская, О. А. Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа [Текст] / О. А. Ладыженская, Н. Н. Уральцева. – М. : Наука, 1973. – 576 с.

15. Cowper, G. R. A shallow shell finite element of triangular shape [Text] / G. R. Cowper, G. M. Lindberg, M. D. Olson // *Intern. J. Solid structures*, 1970. – Vol. 6. – P. 1133 – 1156.

16. Тонкостенные оболочечные конструкции: теория, эксперимент и проектирование [Текст] : пер. с англ. / А. Арбош [и др.]. – М. : Машиностроение, 1980. – 607 с.

17. Халилов, С. А. Вычисление некоторых определенных интегралов, содержащих присоединенные функции Лежандра второго и четвертого порядков [Текст] / С. А. Халилов // *Прочность конструкций летательных аппаратов : темат. сб. науч. тр. Харьк. авиац. ин-та им. Н. Е. Жуковского*. – Вып. 7. – Х., 1984. – С. 158 – 165.

18. Математический энциклопедический словарь [Текст]. – М. : Сов. энциклопедия, 1988. – 847 с.

19. Канторович, Л. В. Функциональный анализ [Текст] / Л. В. Канторович, Г. П. Акилов. – М. : Наука, 1977. – 742 с.

20. Соболев, С. Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике [Текст] / С. Л. Соболев ; под ред. О. А. Олейник. – 3-е изд., перераб. и доп. – М. : Наука, 1988. – 336 с.

## References

1. Halilov, S. A., Mintjuk, V. B., Kopychko V. V., Tkachenko, D. A. Osnovnaja kraevaja zadacha obshhej klassicheskoj teorij otкрыtoj cilindricheskoj obolochki. Reshenie bazovoj zadachi [Main boundary value problem of classical theory of general open cylindrical shell. Basic task solution]. *Авиационно-космическая техника и технология* [Aerospace Engineering and Technology]. Kharkiv, «KhAI» Publ., 2015, no. 5, vol. 120, pp. 24 – 32.

2. Krivcov, V. S., Pavlenko, V. N., Kopychko, V. V. Osnovnaja kraevaja zadacha obshhej klassi-

cheskoj teorii otkrytoj cilindricheskoj obolochki. Konstrukcija reshenija [Main boundary value problem of general classical theory of open cylindrical shell. Solution construction]. *Aviacionno-kosmicheskaja tehnika i tehnologija* [Aerospace Engineering and Technology]. Kharkiv, «KhAI» Publ., 2015, no. 6, vol. 123, pp. 5 – 11.

3. Kopychko, V. V. Deformirovanie otkrytoj cilindricheskoj obolochki pri soglasovannyh obobshhennyh peremeshhenijah uglovyh toчек granicy [Deformation of open cylindrical shells under agreed generalized displacements of the border corner points]. *Otkrytye informacionnye i komp'yuternye integrirovannye tehnologii* [Open information and computer integrated technologies : scientific papers collection of Zhukovsky National Aerospace university “KhAI”]. Kharkiv, «KhAI» Publ., 2015, vol. 70, pp. 184 – 193.

4. Kopychko, V. V. Deformirovanie otkrytoj cilindricheskoj obolochki s nepodvizhnymi uglovymi točkami granicy i proizvol'nymi peremeshhenijami ejo granicy [Deformation of open cylindrical shell with fixed border corner points and arbitrary displacements of its sides]. *Otkrytye informacionnye i komp'yuternye integrirovannye tehnologii*, [Open information and computer integrated technologies : scientific papers collection of Zhukovsky National Aerospace university “KhAI”]. Kharkiv, «KhAI» Publ., 2016, vol. 71, pp. 179 – 188.

5. Halilov, S. A., Kopychko, V. V., Krivcov, V. S., Pavlenko, V. N. Osnovnaja kraevaja zadacha obshhej klassicheskoj teorii otkrytoj cilindricheskoj obolochki. Osobennosti deformirovaniya pri zhestkom zashhemenii granichnogo kontura [Main boundary value problem of general classical theory of open cylindrical shell. Solution construction]. *Aviacionno-kosmicheskaja tehnika i tehnologija* [Aerospace Engineering and Technology]. Kharkiv, «KhAI» Publ., 2016, no. 1, vol. 128, pp. 5 – 17.

6. Khalilov, S. A., Mintyuk, V. B., Tkachenko, D. A. Novye metody issledovaniya lineino i nelineino deformiruemyykh tel iz kompozitsionnykh materialov. T. 2. Matematicheskie modeli, metody ikh analiza i chislennaya realizatsiya nelineinogo deformirovaniya tonkostennykh prostranstvennykh sistem; otchet o NIR. [New methods of research in linear and nonlinear deformable bodies made of composite materials. Vol. 2. Mathematical models, analysis techniques and numerical implementation of thin-walled spatial systems nonlinear deformation]. Kharkiv, «KhAI» Publ., 2014, no. GR 0112U002135. Inv. no. 0215U006163, 160 p.

7. Novozhilov, V. V. *Teorija tonkih obolochek* [Thin shell theory]. Leningrad, «Sudpromgiz» Publ., 2005. 431 p.

8. Peleh, B. L. *Teorija obolochek s konechnoj sdvigovoj zhestkost'ju* [The theory of shells with finite shear stiffness]. Kiev, «Naukova dumka» Publ., 1973. 246 p.

9. Rasskazov, A. O., Sokolovskaya, I. I., Shul'ga, N. A. *Teoriya i raschet sloistykh ortotropnykh plastin i obolochek* [Theory and calculation of lamellar orthotropic plates and shells]. Kiev, «Vysshaya shkola» Publ., 1986. 192 p.

10. Parton, V. Z., Perlin, P. I. *Metody matematicheskoj teorii uprugosti* [Methods of mathematical elasticity theory]. Moscow, «Nauka» Publ., 1981. 688 p.

11. Khalilov, S. A. Novye sistemy ortonormalirovannykh mnogochlenov, nekotorye ikh svoystva i prilozheniya [New orthonormal polynomials systems, some of their properties and applications]. *Prochnost' konstruksii letatel'nykh apparatov: temat. sb. nauch. tr.* [Strength of aircraft structures: thematic collection of scientific papers]. Kharkiv, «KhAI» Publ., 1978, vol 5, pp. 46 – 56.

12. Samarskij, A. A., Lazarov, R. D., Makarov, V. L. *Raznostnye shemy dlja differencial'nykh uravnenij s obobshhennymi reshenijami* [Difference schemes for differential equations with generalized solutions]. Moscow, «Vysshaya shkola» Publ., 1987. 296 p.

13. S'jarle, F. *Metod konechnykh jelementov dlja jellipticheskikh zadach* [Finite element method for elliptic problems]. Moscow, «Mir» Publ., 1980. 512 p.

14. Ladyzhenskaja, O. A., Ural'ceva N. N. *Linejnye i kvazilinejnye uravnenija jellipticheskogo tipa* [Linear and quasilinear elliptic equations]. Moscow, «Nauka» Publ., 1973. 576 p.

15. Cowper, G. R., Lindberg, G. M., Olson, M. D. A shallow shell finite element of triangular shape. *Intern. J. Solid structures*, 1970, vol. 6, pp. 1133 – 1156.

16. Arbosh, A. [i dr.]. *Tonkostennye obolocheknye konstrukcii: teorija, jeksperiment i proektirovanie* [Thin-shell structures: theory, experiment and design]. Moscow, «Mashinostroenie» Publ., 1980. 607 p.

17. Khalilov, S. A. Vychislenie nekotorykh opredelennykh integralov, soderzhashchikh prisoedinennye funktsii Lezhandra vtorogo i chetvertogo porjadkov [Calculation of some definite integrals containing attached second and fourth order Legendre functions]. *Prochnost' konstruksii letatel'nykh apparatov: temat. sb. nauch. tr.* [Strength of aircraft structures: thematic collection of scientific papers]. Kharkiv, «KhAI» Publ., 1984, vol. 7, pp. 158 – 165.

18. *Matematicheskij jenciklopedicheskij slovar'* [Mathematical encyclopedia]. Moscow, «Sovetskaja jenciklopedija» Publ., 1988. 847 p.

19. Kantorovich, L. V., Akilov, G. P. *Funkcional'nyj analiz* [Function analysis]. Moscow, «Nauka» Publ., 1977. 742 p.

20. Sobolev, S. L. *Nekotorye primenenija funkcional'nogo analiza v matematicheskoj fizike* [Some applications of functional analysis in mathematical physics]. Moscow, «Nauka» Publ., 1988. 336 p.

Поступила в редакцию 11.05.2017, рассмотрена на редколлегии 7.06.2017

## ЗАДАЧА ДІРІХЛЕ ДЛЯ ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ІЗОТРОПНОЇ ПАНЕЛІ

*С. А. Халілов, В. В. Копичко, В. С. Кривцов,  
В. Б. Минтюк, В. Н. Павленко, Д. А. Ткаченко*

Дана стаття входить в цикл опублікованих раніше робіт з побудови аналітико-чисельних рішень крайових задач теорії оболонок і пластин при довільному навантаженні і неоднорідних крайових умовах типу Ді-рїхле. На відміну від попередніх робіт розглядається оболонка, яку виконано з трансверсально-ізотропного матеріалу. Основна увага приділяється, як і раніше, питанням стійкості, збіжності і точності аналітико-числових вирішень. Апостеріорний аналіз виконано для циліндричної панелі. Чисельні результати докладно відображено в численних графіках і таблицях.

**Ключові слова:** оболонка, трансверсально-ізотропна модель, поперечний зсув, крайова задача.

## THE DIRICHLET PROBLEM FOR TRANSVERSELY-ISOTROPIC PANEL

*S. A. Khalilov, V. V. Kopychko, V. S. Kryvtsov,  
V. B. Myntiuk, V. N. Pavlenko, D. A. Tkachenko*

This paper is a part of series of previous published papers which are devoted to obtaining analytically-numerical solutions of boundary value problems of the theory of shells and plates with arbitrary stresses and inhomogeneous boundary conditions of the Dirichlet type. Unlike other papers of the series, this paper considers shell from transversely isotropic material. The focus is, as ever, sustainability, convergence and accuracy of obtaining analytically-numerical solutions. A posteriori analysis is performed for cylindrical panel. The numerical results are displayed in detail in numerous charts and tables.

**Keywords:** shell, transversely-isotropic model, transverse shear, boundary value problem.

**Халілов Сявюш Ахмедович** – старший научний співробітник кафедри технології і виробництва летательних апаратів, Національний аэрокосмічний університет ім. Н. Е. Жуковського «ХАІ», Харків, Україна, e-mail: khalilov@ukr.net.

**Копичко Віктор Владимирович** – аспірант кафедри технології і виробництва летательних апаратів, Національний аэрокосмічний університет ім. Н. Е. Жуковського «ХАІ», Харків, Україна, e-mail: viktor\_kopychko@mail.ru.

**Кривцов Владимир Станиславович** – д-р техн. наук, проф., ректор, Національний аэрокосмічний університет ім. Н. Е. Жуковського «ХАІ», Харків, e-mail: v.kryvtsov@khai.edu.

**Минтюк Віталій Борисович** – канд. техн. наук, доцент кафедри прочності летательних апаратів, Національний аэрокосмічний університет ім. Н. Е. Жуковського «ХАІ», Харків, Україна, e-mail: minvit@mail.ru.

**Павленко Віталій Николаевич** – д-р техн. наук, проф., проректор по науч.-пед. Работе, Національний аэрокосмічний університет ім. Н. Е. Жуковського «ХАІ», Харків, e-mail: v.pavlenko@khai.edu.

**Ткаченко Денис Анатольевич** – аспірант кафедри технології і виробництва летательних апаратів, Національний аэрокосмічний університет ім. Н. Е. Жуковського «ХАІ», Харків, Україна, e-mail: 20Black\_and\_White07@ukr.net.

**Khalilov Siavush Akhmedovich** – senior researcher of National Aerospace University “Kharkiv aviation institute” named after M. Ye. Zhukovsky, Kharkiv, e-mail: khalilov@ukr.net.

**Kryvtsov Volodymyr Stanislavovich** – Doctor of Technical Sciences, professor, Rector of National Aerospace University “Kharkiv aviation institute” named after M. Ye. Zhukovsky, Kharkiv, e-mail: v.kryvtsov@khai.edu.

**Myntiuk Vitalii Borysovych** – Candidate of technical sciences, assistant professor of Aircraft strength department of National Aerospace University “Kharkiv aviation institute” named after M. Ye. Zhukovsky, Kharkiv, e-mail: vitalii.myntiuk@khai.edu.

**Tkachenko Denys Anatoliiovych** – postgraduate student of Aircraft technology and manufacture department of National Aerospace University “Kharkiv aviation institute” named after M. Ye. Zhukovsky, Kharkiv, e-mail: tkachenko\_d\_an@ukr.net.

**Pavlenko Vitalii Mykolayovych** – Doctor of Technical Sciences, professor, vice-rector for scientific and pedagogical work of National Aerospace University “Kharkiv aviation institute” named after M. Ye. Zhukovsky, Kharkiv, e-mail: v.pavlenko@khai.edu.

**Kopychko Viktor Volodymyrovych** – postgraduate student of Aircraft technology and manufacture department of National Aerospace University “Kharkiv aviation institute” named after M. Ye. Zhukovsky, Kharkiv, e-mail: viktor\_kopychko@mail.ru.