

УДК 629.7.015.3-251:534.1

doi: 10.32620/akt.2019.4.08

С. В. ФИЛИПКОВСКИЙ¹, Л. А. ФИЛИПКОВСКАЯ², М. С. ФИЛИПКОВСКАЯ^{3,4}¹ Харьковский национальный автомобильно-дорожный университет, Украина² Национальный аэрокосмический университет им. Н. Е. Жуковского «ХАИ», Украина³ ФТИНТ им. Б. И. Веркина НАН Украины⁴ ХНУ им. В. Н. Каразина, Украина

НЕЛИНЕЙНЫЕ НОРМАЛЬНЫЕ ФОРМЫ КОЛЕБАНИЙ КОНЕЧНОЭЛЕМЕНТНОЙ МОДЕЛИ РОТОРА НА ШАРИКОПОДШИПНИКАХ

Актуальность работы обусловлена повышением мощности и минимизацией веса современных летательных аппаратов (ЛА), что связано с повышением динамических нагрузок на агрегаты и проявлением нелинейности динамических процессов в них. Проблему проектирования приборов и агрегатов, работающих при повышенных динамических нагрузках, можно решить разработкой и применением при проектировании моделей и методов анализа нелинейных колебательных процессов. Применение при проектировочных и поверочных расчётах нелинейных моделей и методов даёт возможность предсказать динамические процессы на тех режимах эксплуатации ЛА, на которых не удаётся при использовании линейных моделей.

Целью исследований является разработка моделей и методов анализа нелинейных колебательных процессов для проектирования оборудования и агрегатов летательных аппаратов.

Роторы, в которых два лопаточных колеса закреплены на консольных концах вала, чаще всего используются в двигателях, турбонасосных агрегатах ракет, турбохолодильниках самолётов. Прогобы вала имеют одинаковый порядок с упругими деформациями подшипников.

Аппроксимацию оси деформированного вала такой конструкции ротора трудно осуществить синусоидальными функциями, поэтому использован метод конечных элементов. Конечные элементы аппроксимируют участки вала постоянного сечения. Диски и опоры помещены в узлах. Силы и моменты сил инерции дисков считаем линейными граничными условиями в узлах конечных элементов. Силы упругости подшипников считаем нелинейными граничными условиями в узлах. Интерполяционными полиномами этих конечных элементов являются функции изогнутой оси балки при единичных перемещениях узловых сечений.

Уравнения колебаний вала получены методом Галёркина при одновременной аппроксимации дифференциальных уравнений и граничных условий. Для анализа свободных колебаний используем метод нелинейных нормальных форм (ННФ), который позволяет свести анализ системы с конечным числом степенями свободы к анализу осциллятора с одной степенью свободы. Следуя этому методу, все фазовые координаты представляем в виде функций одной пары фазовых координат – обобщённого перемещения, которое можно выбрать произвольно, и соответствующей ему обобщённой скорости. Элементы этих функций представляем рядами Тейлора.

В работе исследованы роторы на радиально-упорных шарикоподшипниках с осевым натягом. Предварительный натяг применяется для того, чтобы исключить раскрытие зазоров между шариками и канавками качения при колебаниях, которое может привести к ударам и повышенным вибрациям. Для удобства применения метода ННФ силы упругости представлены в виде степенных рядов по обобщённым координатам. Уравнение колебаний по каждой ННФ решается методом гармонического баланса. Построены формы и скелетные кривые свободных нелинейных колебаний ротора.

Ключевые слова: упругий вал; диск; радиально-упорный шарикоподшипник; нелинейные колебания; нелинейная нормальная форма; скелетная кривая.

Введение

Многие приборы и агрегаты летательных аппаратов содержат вращающиеся роторы на подшипниках качения, которые представляют собой нелинейные упругие элементы. Повышение мощности и минимизация веса современных ЛА, связаны с повы-

шением динамических нагрузок на бортовые системы и проявлением нелинейности динамических процессов в оборудовании. Применение при проектировочных и поверочных расчётах нелинейных моделей и методов даёт возможность предсказать динамические процессы на тех режимах эксплуатации ЛА, которые не удаётся рассчитать при использовании

линейных моделей и трудно исследовать на натуральных испытаниях.

Нелинейность системы ротор – шарикоподшипники обусловлена как нелинейными контактными напряжениями, так и зазором между шариками и дорожками качения [1]. В большинстве публикаций рассматриваются нелинейные колебания ротора на шарикоподшипниках, которые имеют зазор между шариками и дорожками качения. В статье [2] исследовано влияние внутреннего радиального зазора и влияние переменной жесткости на бифуркации удвоения периода и перемежаемость резонансных частот, которая привела к хаосу. В работе [3] исследована параметрическая неустойчивость вала на шарикоподшипниках под действием переменной осевой силы. Harsha S. P. [4] проанализировал влияние внутреннего радиального зазора, волнистости поверхности гонок и скорости вращения жесткого ротора на периодические, субгармонические, хаотические колебания и бифуркацию Хопфа. В статье [5] показано, что неуравновешенная сила может периодически изменять жесткость подшипника и что параметрическое возбуждение от изменяющейся во времени жесткости подшипника может вызывать неустойчивость и сильную вибрацию при определенных условиях эксплуатации. В статье [6] описана модель вибрации жесткого ротора, которая позволила проанализировать влияние размера внутреннего радиального зазора и количества тел качения в подшипнике на параметрические колебания жесткого ротора. Во всех публикациях исследованы нелинейные колебания твердого ротора или упругого вала постоянного сечения с диском.

Большинство валов машин имеет ступенчато меняющееся сечение. Чтобы расчётная модель с достаточной точностью отражала существующую форму, валы рассчитываются методом конечных элементов (МКЭ). Целью исследований является разработка моделей и методов анализа нелинейных колебательных процессов для проектирования оборудования и агрегатов летательных аппаратов с применением МКЭ.

1. Аналитическая модель

Роторы, в которых два лопаточных колеса закреплены на консольных концах вала, чаще всего используются в двигателях, турбонасосных агрегатах ракет, турбохолодильниках самолётов. Физическая модель ротора показана на рис. 1. Полагаем, что соотношение длины и диаметра вала таково, что прогибы вала одного порядка с упругими деформациями подшипников. Аппроксимацию оси деформированного вала такой конструкции ротора трудно

осуществить синусоидальными функциями, потому использован МКЭ.

Конечные элементы аппроксимируют участки вала постоянного сечения. Диски и опоры помещены в узлах. Силы и моменты сил инерции дисков считаем линейными граничными условиями в узлах конечных элементов. Силы упругости подшипников считаем нелинейными граничными условиями в узлах. Интерполяционными полиномами этих конечных элементов являются функции изогнутой оси балки при единичных перемещениях узловых сечений. Конечноеэлементная модель ротора показана на рис. 2. Участки вала постоянного сечения являются конечными элементами. В тех сечениях вала, в которых закреплены диски или установлены опоры, помещаем узлы. Их номера обозначены на рисунке 1 цифрами 1 – 6.

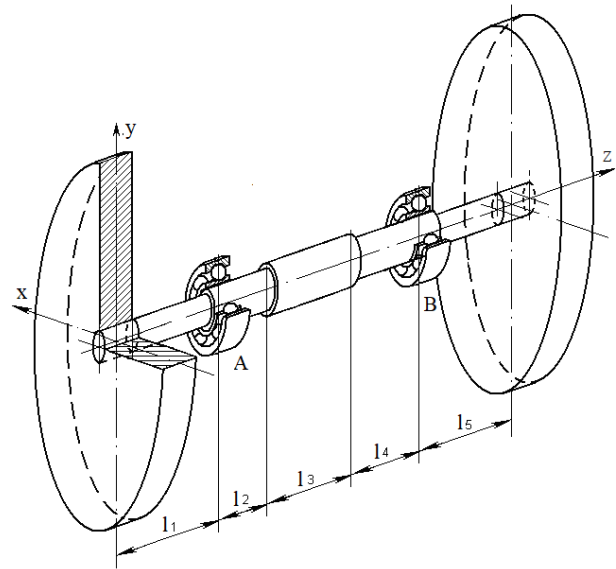


Рис. 1. Ротор ступенчатого сечения с дисками на консольных концах

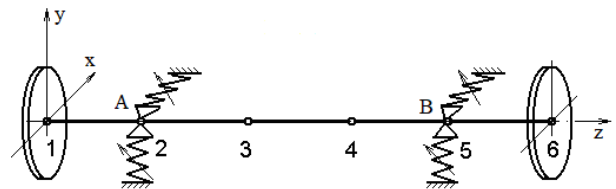


Рис. 2. Конечноеэлементная модель ротора

Компоненты упругих реакций подшипника при перемещениях цапфы вала по направлениям осей x , y , z выведены в работе [7] и для применения метода ННФ представлены в виде асимптотически сходящихся степенных рядов по обобщённым координатам:

$$\begin{aligned}
P_{x_i} &= c_r x_i + \frac{c_r x_i z}{2z_0} - \frac{c_r x_i^3}{32z_0^2 \operatorname{tg}^2 \alpha} - \frac{c_r x_i y_i^2}{32z_0^2 \operatorname{tg}^2 \alpha} - \frac{c_r x_i z^2}{8z_0^2}, \\
P_{y_i} &= c_r y_i + \frac{c_r y_i z}{2z_0} - \frac{c_r y_i^3}{32z_0^2 \operatorname{tg}^2 \alpha} - \frac{c_r y_i x_i^2}{32z_0^2 \operatorname{tg}^2 \alpha} - \frac{c_r y_i z^2}{8z_0^2}, \\
P_{z_i} &= \frac{c_a 2z_0}{3} + c_a z + \frac{c_r x_i^2}{4z_0} + \frac{c_r y_i^2}{4z_0} + \frac{c_a z^2}{4z_0} - \\
&\quad - \frac{c_r z x_i^2}{8z_0^2} - \frac{c_r z y_i^2}{8z_0^2} - \frac{c_a z^3}{24z_0^2},
\end{aligned} \quad (1)$$

где $c_r = \frac{3}{4} NKz_0^{1/2} \sin^{1/2} \alpha \cos^2 \alpha$,

$$c_a = 2c_r \operatorname{tg}^2 \alpha,$$

x_i, y_i, z – перемещения центра внутреннего кольца относительно центра наружного кольца;

v и N_B – номер и количество шариков;

$i = 1, 2$ – номера цапф вала;

α и β_v – угол контакта и угол азимута шарика с номером v относительно оси x ;

P_0 – сила предварительного осевого натяга,

z_0 – осевое смещение внутреннего кольца относительно внешнего кольца от действия силы P_0 .

2. Уравнения колебаний ротора

Уравнения колебаний конечноэлементной модели ротора получены в работе [8], где исследованы колебания ротора с одним диском на консольном конце. Уравнение свободных колебаний имеет вид

$$M\ddot{U} + G\dot{U} + CU + KU + K_{\Pi}(U) = 0, \quad (2)$$

где M – матрица масс;

G – матрица гироскопических сил;

C – матрица демпфирования;

K – матрица жёсткости;

U – вектор обобщённых координат.

Нелинейную векторную функцию $K_{\Pi}(U)$ с учётом разложения сил упругости в степенные ряды (1) запишем следующим образом:

$$K_{\Pi}(U) = \bar{K} \cdot U^2 + \hat{K} \cdot UU_{\lambda} + \check{K} \cdot U^3 + \tilde{K} \cdot U_{\mu} U_{\nu}^2,$$

где $\bar{K}, \hat{K}, \check{K}, \tilde{K}$ – матрицы коэффициентов сил упругости при нелинейных произведениях обобщённых координат. В каждом узле конечноэлементной модели имеются четыре обобщённые координаты – прогибы и углы поворота сечений во взаимно перпендикулярных координатных плоскостях, ещё одна обобщённая координата – это перемещение ротора вдоль оси вращения. Поэтому наша модель с шестью узлами имеет двадцать пять обобщённых коор-

динат. Нелинейные произведения обобщённых координат есть в тех строках уравнения (2), которые соответствуют узлам в подшипниках:

$$U^2 = [x_2^2 \quad y_2^2 \quad x_5^2 \quad y_5^2 \quad z^2]^T,$$

$$UU_{\lambda} = [x_2 z \quad y_2 z \quad x_5 z \quad y_5 z]^T,$$

$$U^3 = [x_2^3 \quad y_2^3 \quad x_5^3 \quad y_5^3 \quad z^3]^T,$$

$$U_{\mu} U_{\nu} = [x_2 y_2^2 \quad y_2 x_2^2 \quad x_5 y_5^2 \quad y_5 x_5^2 \quad z x_2^2 \quad z y_2^2 \quad z x_5^2 \quad z y_5^2 \quad x_2 z^2 \quad y_2 z^2 \quad x_5 z^2 \quad y_5 z^2]^T,$$

где нижние индексы у обобщённых координат – это номера узлов.

Матрицы M, G, C и K имеют размеры 25×25 , матрицы \bar{K} и \check{K} имеют размеры 25×5 , матрицы \hat{K} и \tilde{K} соответственно – 25×4 и 25×12 . В соответствии с (1) элементы матриц таковы:

$$\bar{K}_{25,1} = \bar{K}_{25,2} = -\bar{K}_{25,3} = -\bar{K}_{25,4} = c_r / 4z_0,$$

$$\bar{K}_{25,5} = c_a / 2z_0,$$

$$\hat{K}_{5,1} = \hat{K}_{7,2} = \hat{K}_{17,3} = \hat{K}_{19,4} = c_r / 2z_0,$$

$$\check{K}_{5,1} = \check{K}_{7,2} = \check{K}_{17,3} = \check{K}_{19,4} = -c_r / (32z_0^2 \operatorname{tg}^2 \alpha),$$

$$\check{K}_{25,5} = -c_a / 12z_0.$$

$$\tilde{K}_{5,1} = \tilde{K}_{7,2} = \tilde{K}_{17,3} = \tilde{K}_{19,4} = -c_r / (32z_0^2 \operatorname{tg}^2 \alpha),$$

$$\tilde{K}_{5,9} = \tilde{K}_{7,10} = \tilde{K}_{17,11} = \tilde{K}_{19,12} = \tilde{K}_{25,5} =$$

$$= \tilde{K}_{25,6} = \tilde{K}_{25,7} = \tilde{K}_{25,8} = -c_r / 8z_0^2.$$

Остальные элементы этих матриц равны нулю.

3. Результаты численных исследований

Исследованы свободные колебания ротора длиной $l = 212$ мм. Длины и диаметры конечных элементов вала таковы: $l_1 = 58$ мм, $l_2 = 20$ мм, $l_3 = 63$ мм, $l_4 = 20$ мм, $l_5 = 51$ мм, $d_1 = 14$ мм, $d_2 = 15$ мм, $d_3 = 20$ мм, $d_4 = 15$ мм, $d_5 = 14$ мм; массы и моменты инерции дисков таковы: $m_1 = 0,621$ кг, $I_{x1} = I_{y1} = 0,000772$ кг·м², $I_{z1} = 0,001362$ кг·м², $m_2 = 0,501$ кг, $I_{x2} = I_{y2} = 0,000552$ кг·м², $I_{z2} = 0,000992$ кг·м².

Радиально-упорные подшипники средней серии по ГОСТ 831-75 имеют следующие параметры: $\alpha = 15^\circ$ – угол контакта; $R_2 = 15,312$ мм – радиус внешней канавки качения; $R_1 = 9,750$ мм – радиус внутренней канавки качения; $R_K = 2,868$ мм – радиус поперечного сечения канавок качения; $d_B = 5,556$ мм – диаметр шарика; $N_B = 7$ – количество шариков; $E = 2,1 \cdot 10^{11}$ Па – модуль упругости; $\mu = 0,3$ – коэффициент Пуассона.

На рис. 3 – 6 показаны первые четыре формы

свободных колебаний ротора, где u – нормированная величина прогиба.

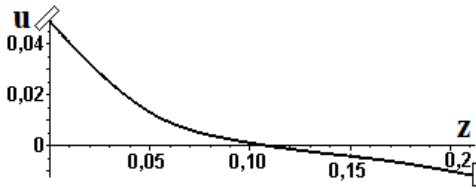


Рис. 3. 1-я форма свободных колебаний ротора

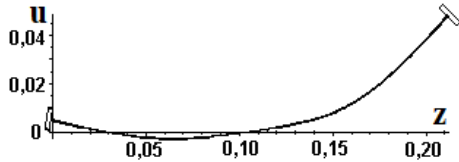


Рис. 4. 2-я форма свободных колебаний ротора

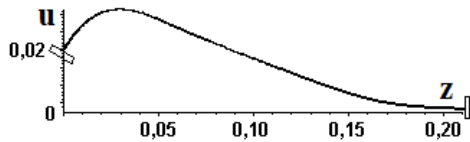


Рис. 5. 3-я форма свободных колебаний ротора

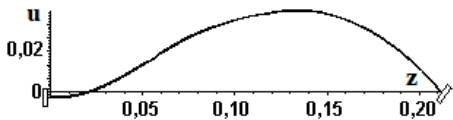


Рис. 6. 4-я форма свободных колебаний ротора

На рис. 7 представлены скелетные кривые ротора в безразмерных координатах.

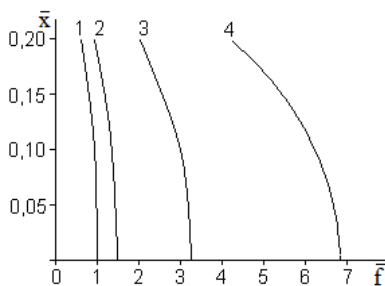


Рис. 7. Скелетные кривые колебаний ротора

Безразмерная частота по оси абсцисс – это отношение $\bar{f} = f/f_1$, где f – частота колебаний, f_1 – частота колебаний по первой форме при стремящейся к нулю амплитуде. Безразмерная амплитуда по оси ординат – это отношение $\bar{x} = x/z_0$. Кривые 1, 2, 3 и 4 соответствуют первым четырём формам колебаний. Система имеет мягкие характеристики. Частоты поперечных колебаний ротора при близкой к нулю

амплитуде равны 230,31 Гц, 337,54 Гц, 748,49 Гц и 1585,92 Гц. Частота продольных колебаний равна 508,49 Гц. Рабочая частота вращения ротора лежит в диапазоне от 667 Гц до 1667 Гц.

Выводы

Разработана методика исследования нелинейных колебаний ротора, состоящего из вала со ступенчато изменяющимся поперечным сечением и дисков на консольных концах, вращающегося в радиально-упорных шарикоподшипниках. Для построения адекватной математической модели применены МКЭ и ННФ и показано, что метод ННФ можно применять к исследованию динамики систем с большим количеством степеней свободы, которые даёт МКЭ.

Исследованы колебания ротора с соотношением размеров и масс, которые характерны для оборудования авиационной техники. Построены ННФ и скелетные кривые, которые показали, что система имеет мягкую характеристику. Резонансные частоты основных форм колебаний ротора, у которого прогибы вала и деформации подшипников одного порядка, ниже рабочей частоты вращения.

Литература

1. Harris, T. A. *Rolling bearing analysis. 4th ed. [Text]* / T. A. Harris. – New York : John Wiley and Sons Inc., 2001. – 1086 p.
2. Tiwari, M. *Dynamic response of an unbalanced rotor supported on ball bearings [Text]* / M. Tiwari, K. Gupta, O. Prakash // *Journal of Sound and Vibration*. – 2000. – Vol. 238, iss. 5. – P. 757–779. DOI: 10.1006/jsvi.1999.3109.
3. Young, T. H. *Dynamic stability of rotor-bearing systems subjected to random axial forces [Text]* / T. H. Young, T. N. Shiau, Z. H. Kuo // *Journal of Sound and Vibration*. – 2007. – Vol. 305, iss. 3. – P. 467–480. DOI: 10.1016/j.jsv.2007.04.016.
4. Harsha, S. P. *Nonlinear dynamic analysis of a high-speed rotor supported by rolling element bearings [Text]* / S. P. Harsha // *Journal of Sound and Vibration*. – 2006. – Vol. 290, iss. 1/2. – P. 65–100. DOI: 10.1016/j.jsv.2005.03.008.
5. *Stability analysis of a rotor-bearing system with time-varying bearing stiffness due to finite number of balls and unbalanced force [Text]* / Z. Xuening et al. // *Journal of Sound and Vibration*. – 2013. – Vol. 332, iss. 25. – P. 6768–6784. DOI: 10.1016/j.jsv.2013.08.002.
6. *Vibration response of rigid rotor in unloaded rolling element bearing [Text]* / R. Tomovic et al. // *International Journal of Mechanical Sciences*. – 2010.

– Vol. 52, iss. 9. – P. 1176–1185. DOI: 10.1016/j.ijmecs.2010.05.003.

7. Filipkovskii, S. V. *Nonlinear Free Vibrations of Multi-Disk Rotors on Ball Bearings [Text] / S. V. Filipkovskii, K. V. Avramov // Strength of Materials. – 2013. – Vol. 45(3). – P. 316–323. DOI: 10.1007/s11223-013-9461-2.*

8. Filipkovskiy, S. V. *Nonlinear Dynamic Analysis Of Elastic Rotor With Disk On Cantilevered End Supported On Angular Contact Ball Bearings [Text] / S. V. Filipkovskiy // Proc. of the 5th Intern. Conf. on Nonlinear Dynamics ND-KhPI'2016, Sept. 27–30, 2016, Kharkov, Ukraine / Nat. Techn. Univ. «Kharkov Polytechnic Inst.». – Kharkov, 2016. – P. 74–81.*

References

1. Harris, T. A. *Rolling bearing analysis. 4th ed.* New York, John Wiley and Sons Inc., 2001. 1086 p.

2. Tiwari, M., Gupta, K., Prakash, O. Dynamic response of an unbalanced rotor supported on ball bearings. *Journal of Sound and Vibration*, 2000, vol. 238, iss. 5, pp. 757–779. DOI: 10.1006/jsvi.1999.3109.

3. Young, T. H., Shiau, T. N., Kuo, Z. H. Dynamic stability of rotor-bearing systems subjected to random axial forces. *Journal of Sound and Vibration*, 2007,

vol. 305, iss. 3, pp. 467–480.

DOI: 10.1016/j.jsv.2007.04.016.

4. Harsha, S. P. Nonlinear dynamic analysis of a high-speed rotor supported by rolling element bearings. *Journal of Sound and Vibration*, 2006, vol. 290, iss. 1/2, pp. 65–100. DOI: 10.1016/j.jsv.2005.03.008.

5. Xuening, Z. et al. Stability analysis of a rotor-bearing system with time-varying bearing stiffness due to finite number of balls and unbalanced force. *Journal of Sound and Vibration*, 2013, vol. 332, iss. 25, pp. 6768–6784. DOI: 10.1016/j.jsv.2013.08.002.

6. Tomovic, R. Vibration response of rigid rotor in unloaded rolling element bearing. *International Journal of Mechanical Sciences*, 2010, vol. 52, iss. 9, pp. 1176–1185. DOI: 10.1016/j.ijmecs.2010.05.003.

7. Filipkovskii, S. V., Avramov, K. V. Nonlinear Free Vibrations of Multi-Disk Rotors on Ball Bearings. *Strength of Materials*, 2013, vol. 45(3), pp. 316–323. DOI: 10.1007/s11223-013-9461-2.

8. Filipkovskiy, S. V. Nonlinear Dynamic Analysis Of Elastic Rotor With Disk On Cantilevered End Supported On Angular Contact Ball Bearings. *Proc. of the 5th Intern. Conf. on Nonlinear Dynamics ND-KhPI'2016, Sept. 27–30, 2016, Kharkov, Ukraine. Nat. Techn. Univ. «Kharkov Polytechnic Inst.», Kharkov, 2016, pp. 74–81.*

Поступила в редакцію 10.04.2019, рассмотрена на редколлегии 7.08.2019

НЕЛІНІЙНІ НОРМАЛЬНІ ФОРМИ КОЛИВАНЬ СКІНЧЕНОЕЛЕМЕНТНОЇ МОДЕЛІ РОТОРА НА ШАРИКОПІДШИПНИКАХ

С. В. Філіпковський, Л. О. Філіпковська, М. С. Філіпковська

Актуальність роботи зумовлена підвищенням потужності і мінімізацією ваги сучасних літальних апаратів (ЛА), що пов'язано з підвищенням динамічних навантажень на агрегати і проявом нелінійності динамічних процесів у них. Проблему проектування приладів і агрегатів, працюючих при підвищених динамічних навантаженнях, можна вирішити розробкою і застосуванням при проектуванні моделей і методів аналізу нелінійних коливальних процесів. Застосування при проектувальних і перевірних розрахунках нелінійних моделей і методів дає можливість передбачити динамічні процеси на тих режимах експлуатації ЛА, на яких не вдається при використанні лінійних моделей. Метою досліджень є розробка моделей і методів аналізу нелінійних коливальних процесів для проектування обладнання і агрегатів літальних апаратів. Ротори, в яких два лопаткових колеса закріплені на консольних кінцях вала, найчастіше використовуються в двигунах, турбонасосних агрегатах ракет, турбохолодильниках літаків. Прогини валу мають однаковий порядок з пружними деформаціями підшипників. Апроксимацію осі деформованого валу такої конструкції ротора важко здійснити синусоїдальними функціями, тому використаний метод скінчених елементів. Скінчені елементи апроксимують ділянки валу постійного перетину. Диски та опори розміщено у вузлах. Сили та моменти сил інерції дисків вважаємо лінійними граничними умовами в вузлах скінчених елементів. Сили пружності підшипників вважаємо нелінійними граничними умовами в вузлах. Інтерполяційними поліномами цих скінчених елементів є функції зігнутої осі балки при одиничних переміщеннях вузлових перерізів. Рівняння коливань валу отримано методом Гальоркіна при одночасній апроксимації диференціальних рівнянь і граничних умов. Для аналізу вільних коливань використовуємо метод нелінійних нормальних форм (ННФ), який дозволяє звести аналіз системи зі скінченим числом ступенів свободи до аналізу осцилятора з одним ступенем свободи. За цим методом усі фазові координати представляємо у вигляді функцій однієї пари фазових координат – узагальненого переміщення, яке можна вибрати довільно, і відповідної йому узагальненої швидкості. Елементи цих функцій представляємо рядами Тейлора. У роботі досліджено ротори на радіально-опірних шарикопідшипниках з осьовим натягом. Попередній натяг застосовується для того, щоб виключити розкриття зазорів між кульками і канавками кочення при коливаннях, яке може привести до ударів і підвищених вібрацій. Для зручності застосування методу ННФ сили пружності представлено у вигляді статечних рядів за узагальненими координатами. Рівняння коливань по кожній ННФ розв'язується методом гармонійного балансу. Побудовано форми і скелетні криві вільних нелінійних коливань ротора.

Ключеві слова: пружний вал; диск; радіально-опірний шарикопідшипник; нелінійні коливання; нелінійна нормальна форма; скелетна крива.

NONLINEAR NORMAL MODES OF OSCILLATIONS OF THE FINITE ELEMENT MODEL OF ROTOR ON BALL BEARINGS

S. V. Filipkovsky, L. A. Filipkovskaja, M. S. Filipkovskaja

The relevance of the work is due to the increase in power and the minimization of the weight of modern aircraft, which is associated with an increase in dynamic loads on the units and the development of the nonlinearity of dynamic processes in them. The problem of designing devices and units operating at high dynamic loads can be solved by developing and applying in designing nonlinear models and methods for analyzing nonlinear oscillatory processes. The use of nonlinear models and methods in design and calibration calculations makes it possible to predict dynamic processes in those aircraft operating modes that cannot be achieved using linear models. The research aims to develop models and methods for analyzing nonlinear oscillatory processes for designing equipment and aircraft assemblies. The rotors, in which two paddle wheels mounted on the cantilever ends of the shaft, are most often used in engines, turbo-pump rocket units, and turbo coolers of aircraft. The shaft deflections have the same order as the elastic deformations of the bearings. Approximation of the axis of the deformed shaft of such rotor design is difficult to implement by sinusoidal functions, therefore the finite element method is used. The finite elements approximate the areas of the shaft of the constant cross section. Disks and supports are placed in the nodes. The inertia forces and moments of inertia forces of the disks are considered linear boundary conditions at the nodes of finite elements. The elastic forces of bearings are considered non-linear boundary conditions at the nodes. The interpolation polynomials of these finite elements are functions of the bent axis of the beam with unit displacements of the nodal sections. The oscillation equations of the shaft are obtained by the Galerkin method with a simultaneous approximation of differential equations and boundary conditions. For the analysis of free vibrations, we use the method of nonlinear normal modes (NNM), which allow us to reduce the analysis of a system with a finite number of degrees of freedom to an analysis of an oscillator with one degree of freedom. Following this method all phase coordinates are represented as functions of one pair of phase coordinates, they are a generalized displacement which can be chosen arbitrarily and a corresponding generalized velocity. Elements of these functions are represented by Taylor series. The rotors on angular contact ball bearings with axial preload are investigated in the work. The preload is used to eliminate the opening of the gaps between the balls and the racers during vibrations, which can lead to shocks and increased vibrations. For the convenience of using the NNM method, the elastic forces are represented as power series in generalized coordinates. The equation of oscillations for each NNM is solved by the method of harmonic balance. The shapes and backbone curves of free non-linear oscillations of the rotor are constructed.

Keywords: flexible shaft; disk; angular contact ball-bearing; nonlinear vibration; nonlinear normal mode; backbone curve.

Филипковский Сергей Владимирович – канд. техн. наук, ст. науч. сотр., доц. каф. теоретической механики и гидравлики, Харьковский нац. автомобильно-дорожный ун-т, Харьков, Украина.

Филипковская Лариса Алексеевна – канд. техн. наук, доц., доц. каф. экономики и маркетинга, Национальный аэрокосмический университет им. Н. Е. Жуковского «Харьковский авиационный институт», Харьков, Украина.

Филипковская Мария Сергеевна – канд. физ.-мат. наук, науч. сотр., Физико-технический институт низких температур им. Б. И. Веркина Национальной академии наук Украины; доц. каф. электроники и управляющих систем, Харьковский национальный университет им. В. Н. Каразина, Харьков, Украина.

Filipkovsky Sergey Vladimirovich – PhD, Senior Researcher, Associate professor of Dept. of Theoretical Mechanics and Hydraulics, Kharkov, Ukraine, e-mail: svfil@inbox.ru, ORCID Author ID: 0000-0003-2861-8032, Scopus Author ID: 57004895100.

Filipkovskaja Larisa Alekseevna – PhD, Associate professor of Dept. of Economics and Marketing, Kharkov, Ukraine, e-mail: l.filipkovska@gmail.com, ORCID Author ID: 0000-0001-8532-5274, Scopus Author ID: 57205459257.

Filipkovskaya Maria Sergeevna – PhD, Researcher, B. Verkin Institute for Low Temperature Physics and Engineering of the National Academy of Sciences of Ukraine; Associate professor of Dept. of Electronics and Control Systems, V. N. Karazin Kharkiv National University, Kharkov, Ukraine, e-mail: filipkovskaya@ilt.kharkov.ua, ORCID Author ID: 0000-0002-2266-1243, Scopus Author ID: 57194334316.