

С. А. ХАЛІЛОВ, Д. А. ТКАЧЕНКО, Н. В. БОНДАРЕВА, В. Б. МИНТЮК

*Національний аерокосмічний університет ім. М. Є. Жуковського «Харківський авіаційний інститут», Україна***ЧИСЛОВЕ ДОСЛІДЖЕННЯ БАЗИСНИХ СИСТЕМ ПРИ РОЗВ'ЯЗУВАННІ АНАЛІТИКО-ЧИСЛОВИМИ МЕТОДАМИ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ НА ВІДРІЗКУ**

Аналітико-числові методи мають безперечні переваги над числовими при розв'язуванні багатьох проблем математичної фізики. Переваги полягають у високій збіжності та точності наближених розв'язків, що є найбільш актуальним при розрахунках міцності авіаційно-космічної техніки. При застосуванні аналітико-числових методів неминуче виникає проблема вибору базисних функцій. Проблема полягає в тому, що система базисних функцій окрім забезпечення експоненціальної збіжності має задовольняти ряд інших вимог: стійкість наближених розв'язків і процедури їх отримання, зменшення обсягу обчислень, зручність т. ін. У даній роботі порівнюється одинадцять базисних систем. Це системи, побудовані у вигляді лінійних комбінацій поліномів Лежандра, які задовольняють або лише головним крайовим умовам, або і головним, і природним; аналогічні системи, побудовані за допомогою поліномів Чебишева; функції, запропоновані Халіловим С. А.; системи інтерполяційних поліномів Лагранжа – Лобатто з використанням точок інтерполяції Лежандра і Чебишева; система тригонометричних функцій; степенева і система фінітних функцій методу скінчених елементів. Порівнювались швидкість збіжності наближеного розв'язку до точного, нев'язка в рівняннях крайових задач і числа обумовленості матриць систем лінійних алгебраїчних рівнянь, до яких приводять варіаційні, проєкційні методи та метод колокації. Дослідження виконано на трьох тестових задачах, що моделюють вигин балки: класичний вигин балки нерівномірно розподіленим навантаженням, вигин додатково розтягнутої балки на пружній основі та геометрично нелінійний вигин. Досліджено вплив ефекту Гіббса на збіжність наближених розв'язків. Серед розглянутих базисних систем найкращою виявилася система базисних функцій у вигляді лінійних комбінацій поліномів Лежандра, які задовольняють всім крайовим умовам. Цей базис приводить до найбільшої швидкості прагнення наближених розв'язків до точного, нев'язки в рівняннях – до нуля, а також має найменше зростання чисел обумовленості зі збільшенням порядку матриць систем лінійних алгебраїчних рівнянь, до яких приводять варіаційні та проєкційні методи. Найгіршими у плані точності та збіжності виявилися фінітні функції методу скінчених елементів.

Ключові слова: базисна система; аналітико-числові методи; точність, збіжність і стійкість наближених розв'язків

Вступ

Специфіка конструкцій аерокосмічної техніки зумовлена вимогами, які до неї висуваються: забезпечення необхідної жорсткості, міцності, стійкості і ресурсу при мінімальній масі. Невід'ємною частиною досягнення компромісу між цими суперечливими вимогами залишаються адекватність математичних моделей процесів і станів, що виникають в силових конструкціях, і точність методів аналізу цих моделей.

Математичні моделі мають найбільш точно описувати поведінку силових конструкцій, що призводить до їх ускладнення і, в свою чергу, унеможливає отримання точних аналітичних розв'язків. Переважну частину наближених розв'язків отримують за допомогою методу скінченного елемента (МСЕ), але

в останній час все частіше дослідники використовують аналітико-числові методи¹. Ці методи пасують перед МСЕ, якщо задача сформульована в областях, що мають складну конфігурацію, але якщо їх можна застосувати, то вони мають незаперечні переваги над МСЕ в точності та збіжності наближеного розв'язку. Добре спроектовані аналітико-числові алгоритми мають експоненціальну (нескінченну) збіжність, що породило широковживаний термін «спектральна точність» [1].

Застосування аналітико-числових методів стає можливим, якщо вдається підібрати систему координат, таку, що координатні площини збігаються з межею тривимірної області. У двовимірному випадку з межею мають збігатися координатні лінії. В одновимірних задачах – завжди. Що ж стосується виду задач, то вони не обмежені тільки задачами механіки

¹ інколи – чисельно-аналітичні, в англомовній літературі – спектральні.

деформівного твердого тіла. Ефективність використання аналітико-числових методів показана при розв'язуванні багатьох задач сучасної математичної фізики: [2] – використовують інтерполяційні функції Лобатто – Лежандра в задачі геодезичної гравіметрії; [3] – використовують усічені ряди Фур'є в розв'язку задачі поширення теплового потоку в спіральних трубах; [4] – при вивченні руху електронів в атомах та іонах у сферичній системі координат в якості базису були використані гамільтонові власні функції і сферичні гармоніки, тобто пов'язані з ними функції Лежандра; [5] – при розв'язуванні рівняння адвекції-дисперсії та дифузії з дробовою похідною за часом використовували дуальний базис Бернштейна.

При застосуванні аналітико-числових методів неминуче виникає проблема вибору базису (координатних функцій). Вибір залежить від багатьох чинників: виду диференціального оператора, правої частини, граничних умов, числових методів і процедур отримання розв'язків, зручності підрахунку та навіть особистих симпатій дослідників [1, 6, 7].

Мета даної роботи – виявлення найкращого базису на основі числового дослідження наближених розв'язків одновимірних крайових задач. Наближені розв'язки будуються на серії різних базисів і з застосуванням різних процедур їх отримання. Крайові задачі, які розглядаються, являють собою математичні моделі вигину балок. Дана робота є логічним продовженням робіт авторів щодо дослідження базисних систем [8, 9].

1. Постановка задачі

В одновимірній області ставиться крайова задача

$$Aw(x) = f(x), \quad -1 < x < 1;$$

1. $w(-1) = 0$;
2. $w''(-1) = 0$;
3. $w(1) = 0$;
4. $w''(1) = 0$,

де A – диференціальний оператор, старша похідна якого дорівнює чотирьом;

$f(x)$, $w(x)$ – відома і шукана функції відповідно.

Наближений розв'язок задачі (1) будемо розшукувати у вигляді скінченної суми з добутку невідомих коефіцієнтів W_n і відомих функцій (базису)

$\varphi_n(x)$:

$$w(x) \approx w_n(x) = \sum_n W_n \varphi_n(x). \quad (2)$$

Обов'язкові та додаткові вимоги до базисних систем докладно описані в роботі [6]. Обов'язковим вимогам (лінійна незалежність та повнота в енергетичному просторі H_A диференціального оператора A) будуть задовольняти такі базисні системи:

1. Лінійні комбінації поліномів Лежандра $P_n(x)$ [10, 11]:

$$\varphi_n^1(x) = P_n(x) - P_{n+2}(x), \quad n = 0 \dots N-1.$$

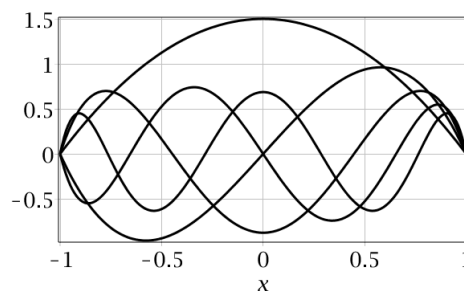


Рис. 1. Перші п'ять базисних функцій $\varphi_n^1(x)$

2. Лінійні комбінації поліномів Чебишева $T_n(x)$ [12, 13]:

$$\varphi_n^2(x) = T_n(x) - T_{n+2}(x), \quad n = 0 \dots N-1.$$

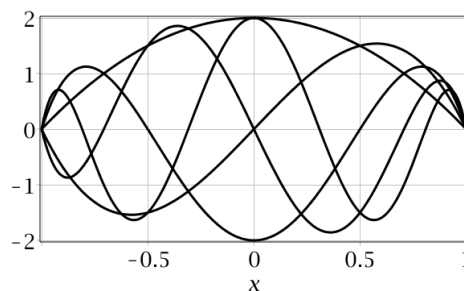


Рис. 2. Перші п'ять базисних функцій $\varphi_n^2(x)$

3. Функції, запропоновані Халіловим С. А. [14]:

$$\varphi_n^3 = \frac{1-x^2}{\sqrt{2}} \times \sum_{m=0}^{E(n/2)} \frac{(-1)^m (2n-2m+3)! x^{n-2m}}{2^{n+1} (n-m+1)! m! (n-2m)!} \sqrt{\frac{n!(2n+5)}{(n+4)!}},$$

$$n = 0 \dots N-1$$

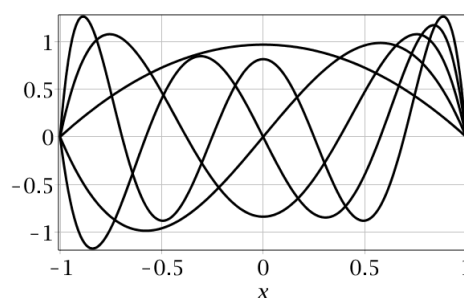


Рис. 3. Перші п'ять базисних функцій $\varphi_n^3(x)$

4. Интерполяційний поліном Лагранжа – Лежандра – Лобатто [15]:

$$\varphi_n^4(x) = \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq n}}^{N+1} \frac{x - x_k}{x_n - x_k}, \quad n = 1 \dots N,$$

де $x_k = -1, z_i, 1, i = 1 \dots N$;

z_i – нулі полінома $P'_N(x)$.

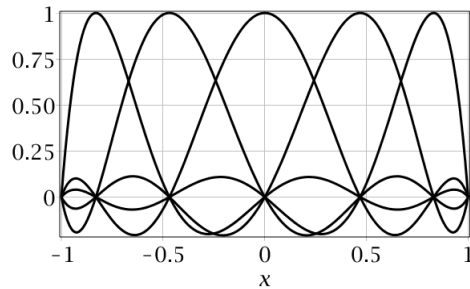


Рис. 4. Перші п'ять базисних функцій $\varphi_n^4(x)$

5. Интерполяційний поліном Лагранжа – Чебишева – Лобатто [15]:

$$\varphi_n^5(x) = \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq n}}^{N+1} \frac{x - x_k}{x_n - x_k}, \quad n = 1 \dots N,$$

де $x_k = \cos\left(\frac{k\pi}{N+1}\right), k = 0, 1, \dots, N+1$.

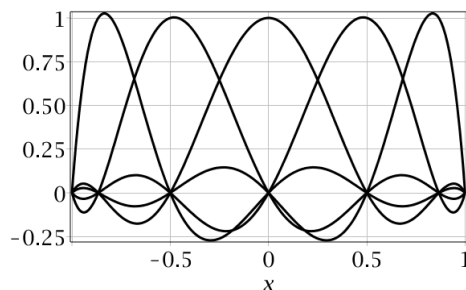


Рис. 5. Перші п'ять базисних функцій $\varphi_n^5(x)$

6. Тригонометричні функції:

$$\varphi_n^6(x) = \sin \frac{n\pi(x+1)}{2}, \quad n = 1 \dots N.$$

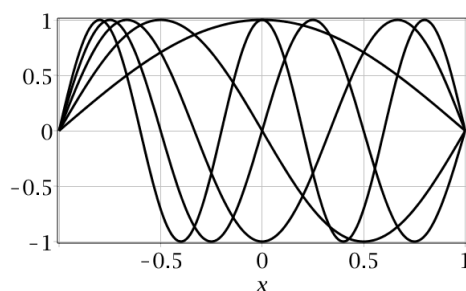


Рис. 6. Перші п'ять базисних функцій $\varphi_n^6(x)$

7. Лінійні комбінації поліномів Лежандра [11]:

$$\begin{aligned} \varphi_n^7(x) = & P_{n+4}(x) - \\ & \frac{2(2n+5)\left((n+1)^2 + 3n + 8\right)}{(n+1)(n+2)(2n+3)} P_{n+2}(x) + \\ & + \frac{(2n+7)(n+4)(n+3)}{(n+1)(n+2)(2n+3)} P_n(x), \quad n = 0 \dots N-1. \end{aligned}$$

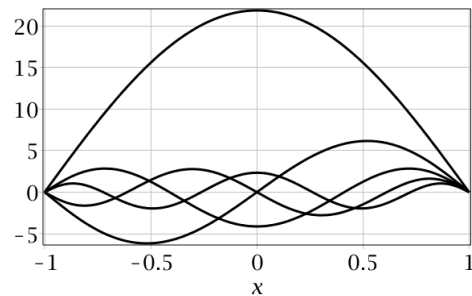


Рис. 7. Перші п'ять базисних функцій $\varphi_n^7(x)$

8. Лінійні комбінації поліномів Чебишева (див. роботу [13] з урахуванням того, що $T_n(\pm 1) = (\pm 1)^n$;

$$T'_n(\pm 1) = (\pm 1)^{n+1} n^2; \quad T''_n(\pm 1) = (\pm 1)^n \frac{(n-1)n^2(n+1)}{3};$$

$$\begin{aligned} \varphi_n^8(x) = & T_{n+4}(x) - \\ & - 2 \frac{(n+2)\left(2(n+1)^2 + 4n + 13\right)}{\left(2(n+1)^2 + 1\right)(n+1)} T_{n+2}(x) + \\ & + \frac{(n+3)\left(2(n+1)^2 + 8n + 17\right)}{\left(2(n+1)^2 + 1\right)(n+1)} T_n(x), \quad n = 0 \dots N-1. \end{aligned}$$

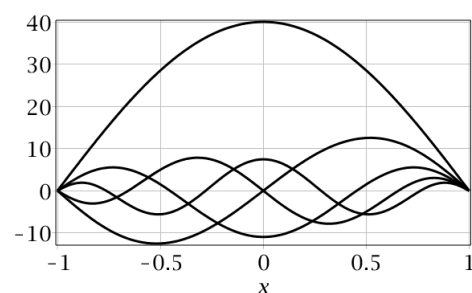


Рис. 8. Перші п'ять базисних функцій $\varphi_n^8(x)$

9. Фінітний базис, який використовують в МСЕ. Тут N – кількість скінченних елементів. У кожному $N + 1$ вузлі є дві невідомі за винятком крайніх вузлів, де по одній невідомій. Таким чином, загальна кількість невідомих – $2N$:

$$\varphi_0^9(x) = \frac{2(x-x_0)(x_1-x)^2}{3(x_1-x_0)^3}, x_0 \leq x \leq x_1;$$

$$\varphi_{2n-1}^9(x) = \begin{cases} \frac{(3x_n - x_{n-1} - 2x)(x - x_{n-1})^2}{(x_n - x_{n-1})^3}, x_{n-1} \leq x \leq x_n; \\ \frac{(2x + x_{n+1} - 3x_n)(x_{n+1} - x)^2}{(x_{n+1} - x_n)^3}, x_n \leq x \leq x_{n+1}; \end{cases}$$

$$\varphi_{2n}^9(x) = \begin{cases} \frac{2(x-x_n)(x-x_{n-1})^2}{3(x_n-x_{n-1})^3}, x_{n-1} \leq x \leq x_n; \\ \frac{2(x-x_n)(x_{n+1}-x)^2}{3(x_{n+1}-x_n)^3}, x_n \leq x \leq x_{n+1}; \end{cases}$$

$$\varphi_{2N-1}^9(x) = \frac{2(x-x_N)(-x_{N-1}+x)^2}{3(x_N-x_{N-1})^3}, x_{N-1} \leq x \leq x_N,$$

де $x_n = \frac{2n}{N-1}, n = 0, 1, \dots, N$.

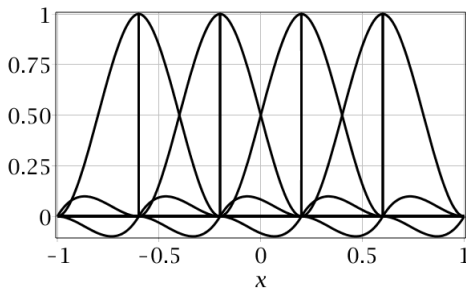


Рис. 9. Вісімнадцять фінітних функцій $\varphi_n^9(x)$ на п'яти скінченних елементах

10. Степеневі функції:

$$\varphi_n^{10}(x) = (1-x^2)x^n, n = 0, 1, \dots, N-1.$$

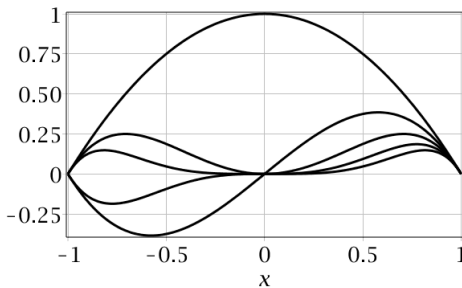


Рис. 10. Перші п'ять базисних функцій $\varphi_n^{10}(x)$

11. Поліноми Бернштейна [16]:

$$\varphi_n^{11}(x) = \frac{N!(1-x)^{N-n}(1+x)^n}{2^N n!(N-n)!}, n = 1, \dots, N-1.$$

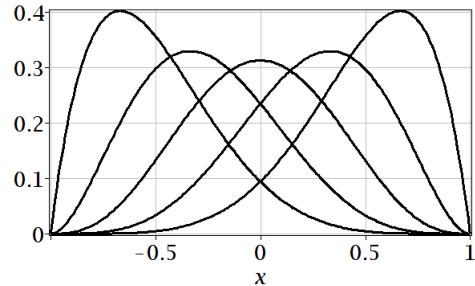


Рис. 11. Перші п'ять базисних функцій $\varphi_n^{11}(x)$

Зауваження 1. Всі базисні системи задовольняють головним крайовим умовам 1 і 3 задачі (1). Базисні системи 6, 7 і 8 крім головних крайових умов додатково задовольняють природним крайовим умовам 2 і 4 задачі (1).

Зауваження 2. Десять із одинадцяти вибраних функцій є поліноміальними. Такий вибір обумовлений тим, що заздалегідь відомо про найкращі апроксимативні властивості поліноміального базису [17]. Для демонстрації цього факту додано тригонометричну систему функцій, яка навіть будучи системою власних функцій диференціального оператора (див. тестову задачу № 1, нижче) приводить до меншої швидкості збіжності. Фінітний базис МСЕ введено в цей список з огляду на його поширеність.

2. Тестова задача № 1

Розглядається крайова задача (1) з диференціальним оператором $A = \frac{d^4}{dx^4}$ і правою частиною

$f(x) = -(2x^2 + 3x - 1)\cos\frac{\pi x}{2}$. Права частина вибрана у вигляді добутку тригонометричної і степеневі функції тому, що в іншому випадку наближені розв'язки (2) при використанні відповідного базису переходять в точні на скінченному числі доданків.

Ця крайова задача описує вигин двох опорної балки від розподіленого навантаження (рис. 12).

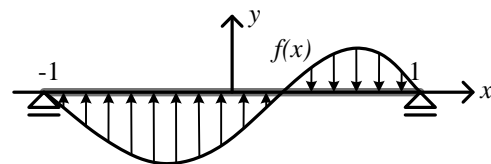


Рис. 12. Тестова задача № 1. Вигин двох опорної балки

Точний розв'язок цієї задачі відомий:

$$w_a(x) = \frac{8}{\pi^3}(1-x^2)(x+4) - \frac{16}{\pi^4}\left(2x^2+3x-1-\frac{160}{\pi^2}\right)\cos\frac{\pi x}{2} - \frac{128}{\pi^5}\left(3x+4-(4x+3)\sin\frac{\pi x}{2}\right) \quad (3)$$

і являє собою функцію вигину осі балки (рис. 13).

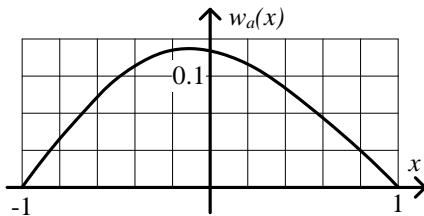


Рис. 13. Точний розв'язок тестової задачі № 1

Побудова наближених розв'язків зводиться до визначення невідомих коефіцієнтів в (2) із системи лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР), яку можна отримати самими різноманітними способами. У випадку використання варіаційного методу Рітца з умови стаціонарності повної потенціальної енергії

$$\frac{\partial}{\partial W_i} \left(\frac{1}{2} \int_{-1}^1 (w_n''(x))^2 dx - \int_{-1}^1 f(x)w_n(x) dx \right) = 0.$$

Якщо використовується узагальнений проєкційний метод Бубнова – Гальоркіна [18], то

$$\int_{-1}^1 (w_n^{IV}(x) - f(x))\varphi_i(x) dx + w_n''(x)\varphi_i'(x)|_{x=1} - w_n''(x)\varphi_i'(x)|_{x=-1} = 0,$$

або ж класичний метод Бубнова – Гальоркіна, то

$$\int_{-1}^1 (w_n^{IV}(x) - f(x))\varphi_i(x) dx = 0,$$

але тільки для базисів 6, 7 і 8. Для решти базисів можна використовувати «слабке» формулювання крайової задачі

$$\int_{-1}^1 (w_n''(x)\varphi_i''(x) - f(x)\varphi_i(x)) dx = 0.$$

У даному випадку всі ці методи за умови використання базисних функцій в якості тестових приводять до однакової СЛАР.

Найкращим і «найжорсткішим» способом підрахунку похибок наближених розв'язків є визначення нев'язки рівняння (1)

$$\varepsilon_{IV} = \max_{x \in [-1,1]} |w_n^{IV} - f|,$$

тобто поточково в усій області, включаючи границі. Нев'язку можна підраховувати, навіть коли точний розв'язок є невідомим. З урахуванням неможливості

використання такої норми для фінітного базису та наявності точного розв'язку w_a паралельно буде наводитися похибка самої функції

$$\varepsilon_0 = \max_{x \in [-1,1]} |w_n - w_a|.$$

Зауважимо, що найчастіше вживана енергетична норма похибки $\varepsilon_e = \|w_n - w_a\|_A^{1/2}$ знаходиться в даному випадку між $\varepsilon_I < \varepsilon_e < \varepsilon_{II}$, де $\varepsilon_I = \max_{x \in [-1,1]} |w_n' - w_a'|$ і $\varepsilon_{II} = \max_{x \in [-1,1]} |w_n'' - w_a''|$, тобто справедливі нерівності

$$\varepsilon_0 < \varepsilon_I < \varepsilon_e < \varepsilon_{II} < \varepsilon_{III} < \varepsilon_{IV}.$$

Зменшення похибок наближених розв'язків зі збільшенням кількості доданків, які утримуються в (2), показано на рис. 14. Верхній індекс вказує на порядковий номер базису, при використанні якого в (2) отримано похибку.

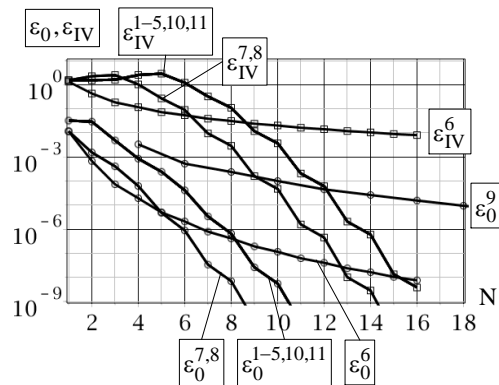


Рис. 14. Похибки самих наближених розв'язків ε_0 і нев'язки в рівнянні ε_{IV} . Верхній індекс вказує на порядковий номер базису

Як видно з рисунка, найбільш високу швидкість збіжності мають степеневі базиси 1 – 5, 7, 8, 10, 11 незалежно від їх виду. Додавання одного члена ряду зменшує похибку приблизно на один порядок. Точність базисів 7, 8 (при тій же швидкості збіжності) трохи вище через те, що вони мають степінь полінома на дві одиниці більше, ніж базиси 1 – 5 і 10, 11. Тригонометричний базис 6, хоч і задовольняє всім граничним умовам, має слабку швидкість збіжності. Повільніше від нього тільки швидкість збіжності базису 10 – фінітного базису МСЕ. Похибка фінітного базису була б ще більше, якби розподілене навантаження було замінено статично еквівалентними зосередженими вузловими силами, як це робиться в різних реалізаціях МСЕ. Тут же розподілене навантаження інтегрується в межах елемента. Швидкість прагнення наближеної функції до точної така ж, як і їх похідних. Диференціювання збільшує похибку приблизно на порядок.

У результатах, показаних на рис. 14, відсутні похибки, пов'язані з округленням чисел, тобто показані тільки апроксимативні властивості базисів. При числовій реалізації помилки округлення неминуче виникають і можуть істотно вплинути на точність наближеного розв'язку. Величиною, що характеризує цю специфіку числової процедури, є число обумовленості матриці СЛАР: порядок числа обумовленості вказує на кількість правих невірних цифр у розв'язку. Тут число обумовленості обчислюється як відношення найбільшого власного значення до найменшого $\lambda_{\max}/\lambda_{\min}$ і показано для всіх одинадцяти базисів на рис. 15.

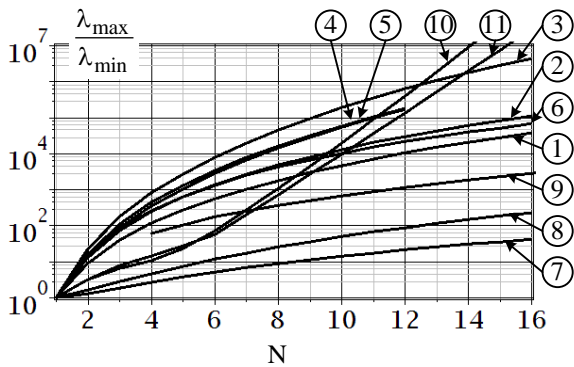


Рис. 15. Числа обумовленості матриць СЛАР, до яких приводять базисні системи 1 – 11

Характер зростання числа обумовленості матриці зі збільшенням її порядку однаковий для всіх базисних систем, крім 10 і 11, що й зрозуміло, – ці системи «майже» лінійно залежні. Для решти базисів числа обумовленості мають тенденцію до зменшення швидкості росту, але їх порядок залишається істотним.

Багато в чому числа обумовленості пов'язані зі структурою матриць, яка показана на рис 16.

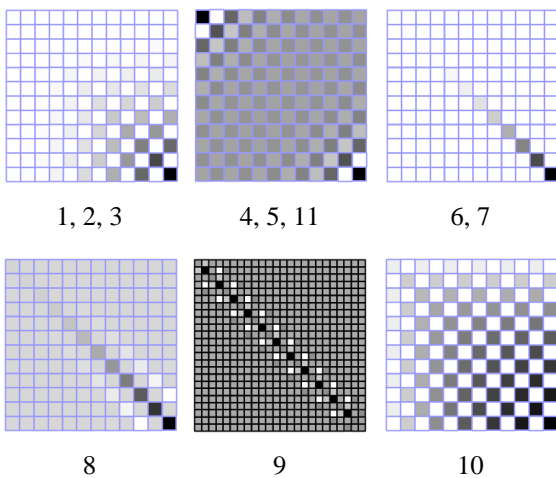


Рис. 16. Структура матриць СЛАР

Найкращою є структура у матриць, до яких призводить використання базисів 6 і 7. Вони діагональні. Непоганими є структури матриць, до яких призводять базиси 8 і 9. Це матриці з «сильною» діагоналлю. Трохи гірше структури матриць при використанні базисів 1,2 і 3, тут недиагональні елементи мають більш вагомні величини. Всі базиси, крім 4, 5, 9 і 11, приводять до матриць, значення елементів яких із зростанням індексу збільшуються.

Число обумовленості матриць для базисів 1 – 3, 6 – 8 можна істотно поліпшити, використовуючи спеціальне нормування базисних функцій

$$\bar{\varphi}_n = \varphi_n / \|\varphi_n\|_A,$$

$$\text{де } \|\varphi_n\|_A = \sqrt{\int_{-1}^1 (\varphi_n'')^2 dx}.$$

При такому нормуванні діагональні елементи стануть такими, що дорівнюють одиниці. Для решти базисів таке поліпшення не відбувається. Числа обумовленості матриць, побудованих на нормованих базисах, показані на рис. 17.

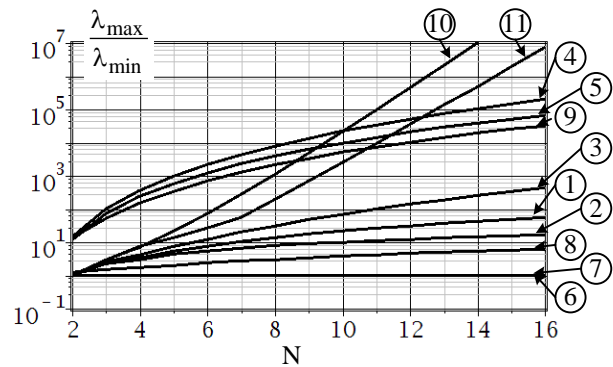


Рис. 17. Числа обумовленості нормованих матриць СЛАР

Оскільки матриці, породжені базисними функціями 6 і 7, є діагональними, то число обумовленості нормованої матриці з ростом N не збільшується і дорівнює 1. Числа обумовленості матриці, побудованої на нормованих базисах 1, 2, 3 і 8, стали істотно менше; на базисах 4, 5, 10 і 11 незначно зменшилися; на базисі 9 – виросло.

До аналітико-числових методів також відносять метод колокації та тау метод [7]. Значний недолік цих методів – несиметричність матриць СЛАР, до яких вони призводять, – унеможливує застосування ефективних числових процедур розв'язку системи рівнянь. В якості ілюстрації наведемо збіжність наближеного розв'язку, отриманого методом колокації, та величини чисел обумовленості матриць, до яких призводить цей метод. Згідно з ним нев'язку в рівнянні (2)

можна мінімізувати, вимагаючи точного виконання цього рівняння в окремих точках (точках колокації)

$$(Aw_N - f)|_{x=x_k} = 0.$$

На рис. 18 показано збіжність наближених розв'язків, отриманих цим методом, з використанням двох базисних систем: 6 – тригонометричної і 8 – поліноміальної. Для першої системи функцій в якості точок колокації взяті нулі $\cos \frac{\pi(x+1)}{2} = 0$, тобто

$x_k = \frac{2k+1}{N} - 1$, $k = 0..N-1$, для другої системи – вузли Лежандра – Лобатто.

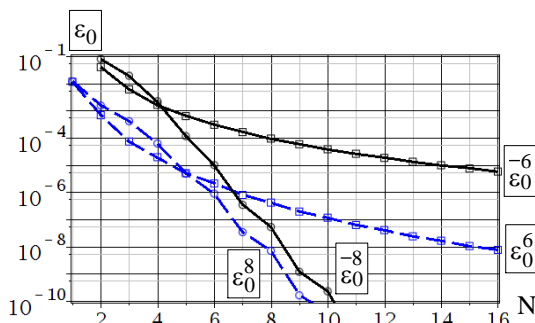


Рис. 18. Збіжність наближених розв'язків, отриманих методом колокації. Пунктиром показана збіжність методу Бубнова – Гальоркіна (див. рис. 14)

На рис. 18 для порівняння пунктирними лініями показані також похибки, отримані вище методом Бубнова – Гальоркіна. Видно, що метод колокації демонструє швидкість збіжності на поліноміальному базисі трохи вищу, ніж метод Бубнова – Гальоркіна. Матриці ж крім того, що стають несиметричними, мають більш високі числа обумовленості (див. рис. 19).

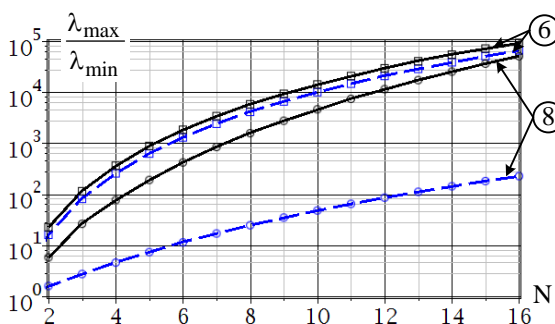


Рис. 19. Числа обумовленості матриць СЛАР методу колокації. Пунктиром показані числа обумовленості матриць, отриманих методом Бубнова – Гальоркіна (рис. 15)

3. Тестова задача № 2. Ефект Гіббса

Розглядається крайова задача (1) з диференціальним оператором $A = \frac{d^4}{dx^4} - P \frac{d^2}{dx^2} + c$, де $P = \frac{\pi^2}{4}$ і

$c = \frac{\pi^4}{16}$. Права частина вибрана таким чином, щоб у граничних точках вона була відмінною від нуля

$f(x) = 1 - \frac{x^2}{2}$ (рис. 20). Це математична модель вигину двох опорної балки розподіленим навантаженням, яка знаходиться на пружній вінклерівській основі жорсткістю c і додатково розтягнута силами P (рис. 20).

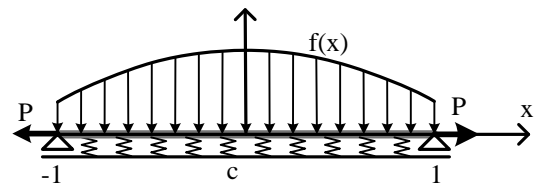


Рис. 20. Тестова задача № 2. Вигин пружно опертої та розтягнутої двох опорної балки

Величина жорсткості основи підібрана таким чином, щоб зменшити прогин від дії розподіленого навантаження (без розтягування) приблизно вдвічі. Аналогічно розтягуючі сили без підтримки основи зменшують прогин приблизно в два рази. При спільній їх дії прогин зменшується приблизно на дві третини.

Точний розв'язок цієї задачі має вигляд

$$w_a(x) = 8 \left[(x^2 - 2)\pi^2 + 8 + C_1 \cos \frac{\pi x}{4} \cosh \alpha x + C_2 \sin \frac{\pi x}{4} \sinh \alpha x \right],$$

де

$$C_1 = \frac{\sqrt{6}(\pi^2 - 8) \cosh \alpha + \sqrt{2}(\pi^2 + 8) \sinh \alpha}{\sqrt{3}\pi^6 \cosh 2\alpha};$$

$$C_2 = \frac{\sqrt{6}(\pi^2 - 8) \sinh \alpha - \sqrt{2}(\pi^2 + 8) \cosh \alpha}{\sqrt{3}\pi^6 \cosh 2\alpha};$$

$$\alpha = \frac{\sqrt{3}\pi}{4}.$$

Характер уточнення числових розв'язків і росту чисел обумовленості зі збільшенням числа невідомих коефіцієнтів у цій задачі аналогічний показаному на рис. 14 і 15. Додаткова друга похідна і сама функція в диференціальному операторі задачі при таких значеннях коефіцієнтів P незначно впливають на точність наближених розв'язків і обумовленість матриць. Причому вплив цих доданків хоч і незначно,

але зменшує число обумовленості і збільшує точність (зрозуміло, що стискні сили будуть здійснювати зворотній ефект). На рис. 21 зверху показані величини чисел обумовленості матриць, побудованих за допомогою базисів 1, 6, 7 і 9, знизу – похибка наближених розв’язків. Пунктиром для порівняння показані аналогічні графіки з прикладу 1 (рис. 14 і 15).

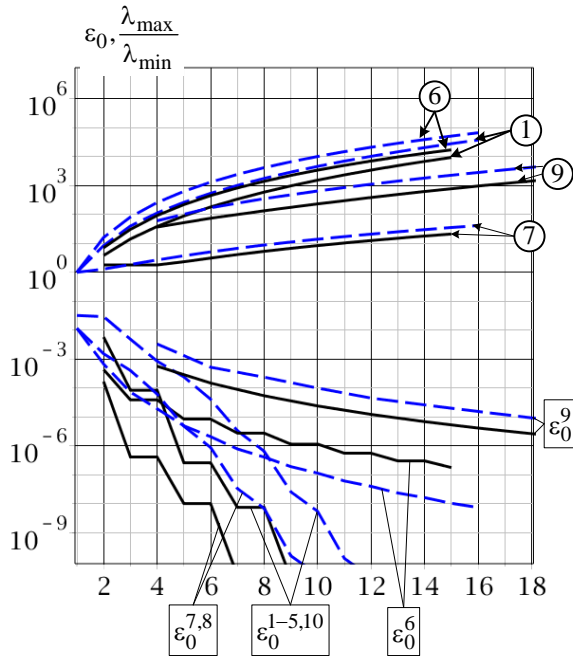


Рис. 21. Величини чисел обумовленості матриць (зверху) і похибка наближеного розв’язку (знизу). Пунктиром показані аналогічні графіки з прикладу 1 (рис. 14 і 15)

Єдина базисна система, для якої точність зменшилася, – це тригонометрична. Пояснюється це тим, що за допомогою цього ряду неможливо забезпечити рівність нулю нев’язки в рівнянні (1) у точках границі (що в загалі і не є обов’язковою вимогою). Маємо ефект Гіббса, наявність якого суттєво погіршує збіжність не тільки нев’язки в рівнянні, але і самого розв’язку (рис. 22).

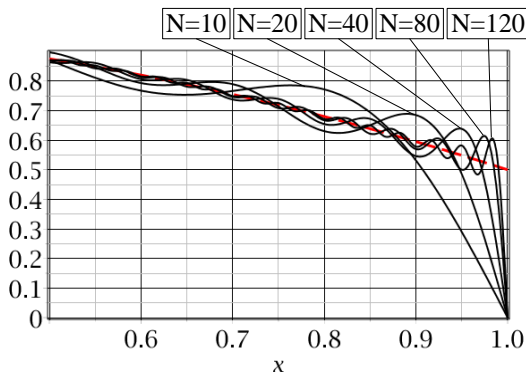


Рис. 22. Ефект Гіббса при апроксимації тригонометричним базисом правої частини рівняння

Набагато сильніше ефект Гіббса позначається в разі неоднорідних природних граничних умов. Наприклад, якщо четверту граничну умову в задачі (1) замінити на $w''(+1) = -1$, що відповідає заданню на цьому краю зосередженого моменту, то додатково з’явиться ефект Гіббса при апроксимації других похідних. Причому він з’явиться при використанні не тільки тригонометричних функцій, але й поліноміальних базисів 7 і 8 (див. рис. 23)

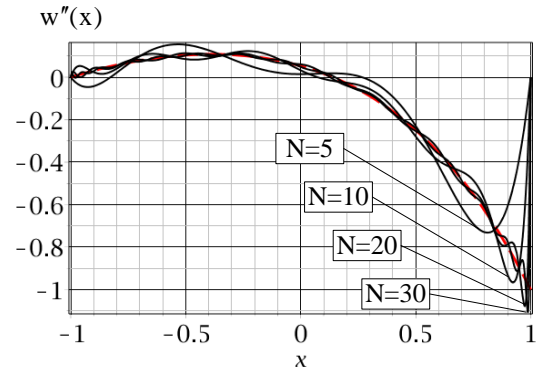


Рис. 23. Ефект Гіббса при апроксимації базисом 7 другої похідної, яка набуває значення $w''(+1) = -1$

В цьому випадку очікувати поточкового прагнення нев’язки в рівнянні до нуля для цих базисних систем не доводиться. Звісно, в середньому похибка наближається до нуля і досить швидко, але, відзначимо ще раз, сильно погіршується швидкість збіжності самого наближеного розв’язку (рис. 24).

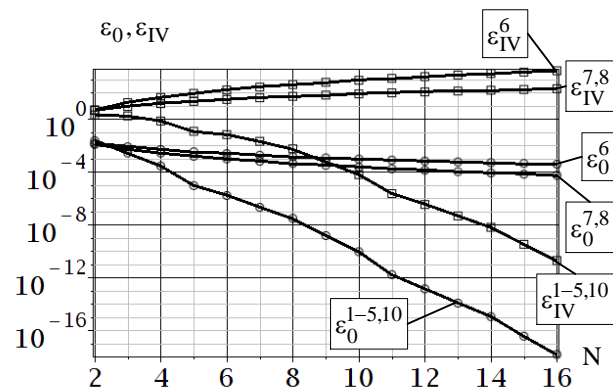


Рис. 24. Похибки самих наближених розв’язків ϵ_0 і нев’язки в рівнянні ϵ_{IV} за наявності ефекту Гіббса

Кращий спосіб уникнути цієї ситуації – це додавання до ще невідомого розв’язку функції, що задовольняє неоднорідним крайовим умовам. У даному випадку розв’язок краще розшукувати у вигляді $w(x) = (1-x^2)(x+3)/12 + u(x)$, тоді для функції $u(x)$ будуть справедливими всі результати, показані

на рис. 21. Якщо таку функцію підібрати не вдається, то краще використовувати базис, який має ненульовий слід відповідної похідної на границі, де задані неоднорідні природні крайові умови, дозволивши йому, таким чином, задовольнити їх наближено. У даному прикладі поліноміальні базиси, які задовольняють тільки головним крайовим умовам, показують ту ж швидкість збіжності з незначним зменшенням точності (див. рис. 25).

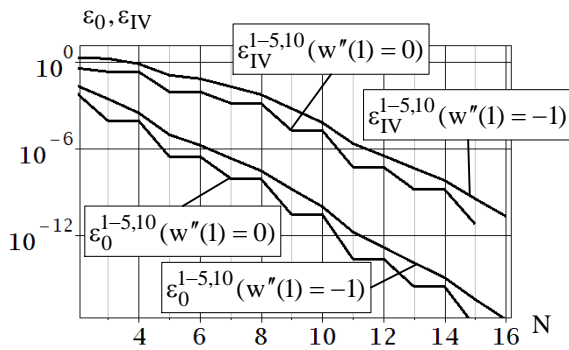


Рис. 25. Збіжність базисів, які задовольняють лише головним крайовим умовам при неоднорідних ($w''(1) = -1$) та однорідних ($w''(1) = 0$) природних крайових умовах

4. Тестова задача № 3. Геометрично нелінійний вигин балки

Повернемося до тестової задачі № 1, але сформулюємо її в геометрично нелінійній постановці [19].

В області $-1 < x < 1$ вона описується двома диференціальними рівняннями:

$$\begin{cases} \left(N \cos \varphi - \frac{M'}{\lambda} \sin \varphi \right)' = 0; \\ \left(N \sin \varphi + \frac{M'}{\lambda} \cos \varphi \right)' = -f(x). \end{cases}$$

На границі маємо:

$$w = M = 0 \text{ при } x = \pm 1;$$

$$u = 0 \text{ при } x = -1;$$

$$N \cos \varphi - Q \sin \varphi = 0 \text{ при } x = +1,$$

де

$$N = 30000(\lambda - 1); M = -\varphi';$$

$$\varphi' = \frac{(1+u')w'' - w'u''}{\lambda^2};$$

$$\sin \varphi = \frac{w'}{\lambda}; \cos \varphi = \frac{1+u'}{\lambda};$$

$$\lambda = \sqrt{(1+u')^2 + (w')^2}.$$

Ця крайова задача відповідає відшукуванню точок стаціонарності повної потенціальної енергії [20]:

$$U = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \left[30000 \left(\sqrt{(1+u')^2 + (w')^2} - 1 \right)^2 + \left(\frac{(1+u')w'' - w'u''}{(1+u')^2 + (w')^2} \right)^2 \right] dx - \int_{-1}^1 f w dx.$$

Дослідження наведемо для поліноміальних і фінітного базисів. Як і в лінійних задачах, всі поліноміальні базиси приводять до однакової точності і швидкості збіжності наближеного розв'язку до точного і залежать тільки від старшого степеня полінома. Що стосується обумовленості матриць, то відзначимо, що на відміну від лінійних задач, де матриця СЛАР є матрицею жорсткості, в нелінійних – матриця СЛАР, до якої в підсумку приводить реалізація методу Ньютона, являє собою коефіцієнти рівняння дотичної гіперплощини. Якщо в лінійному випадку гарантується позитивна визначеність матриці, то в нелінійному – ні.

Для розв'язання цієї задачі необхідно додатково апроксимувати функцію $u(x)$. Головні граничні умови в апроксимації $u_n(x) = \sum_n U_n \psi_n(x)$ будуть

виконані, якщо прийняти за базис лінійні комбінації поліномів Лежандра [11]

$$\psi_n^{1-3,7,8}(x) = P_{n+1}(x) + P_n(x), \quad n = 0 \dots N-1.$$

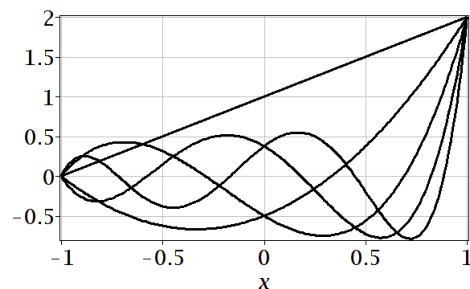


Рис. 26. Перші п'ять базисних функцій $\psi_n^{1-3,7,8}(x)$

Визначення похибки наближених розв'язків тут ускладнюється тим, що точний розв'язок цієї задачі невідомий. В якості еталонного вибрано розв'язок, отриманий за допомогою базису 7, де утримано 12 доданків в апроксимації функції прогину $w(x)$ і 17 – в апроксимації функції поздовжніх переміщень $u(x)$. У цьому випадку максимальне значення нев'язки першого рівняння в точці $x = 1$ становить 8%. На рис. 27 масштаб графіків нев'язок першого і другого рівнянь для кращої їх візуалізації збільшений в сім разів. Видно, що в точках, віддалених від границі, похибка є істотно меншою.

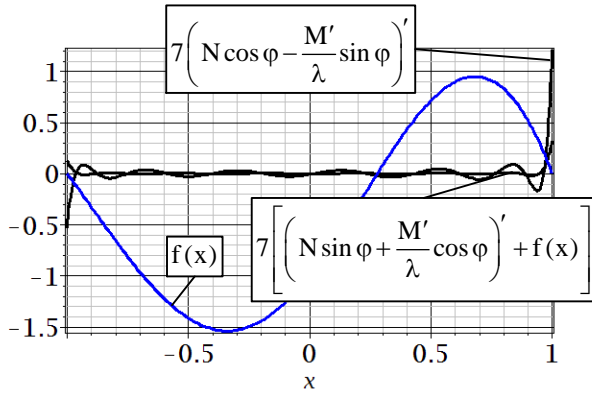


Рис. 27. Права частина та нев'язки в рівняннях

Збіжність наближених розв'язків і нев'язок у рівняннях рівноваги показано на рис. 28. Швидкість збіжності для всіх базисів зменшується порівняно з лінійним випадком. Зменшення точності обумовлено також і процедурою числового інтегрування. Результати при використанні фінітного базису були отримані за допомогою програмного забезпечення NASTRAN, тому тут додатково позначаються похибки апроксимації розподіленого навантаження. Видно, що збіжність навіть самого розв'язку, побудованому на цьому базисі, практично обмежена.

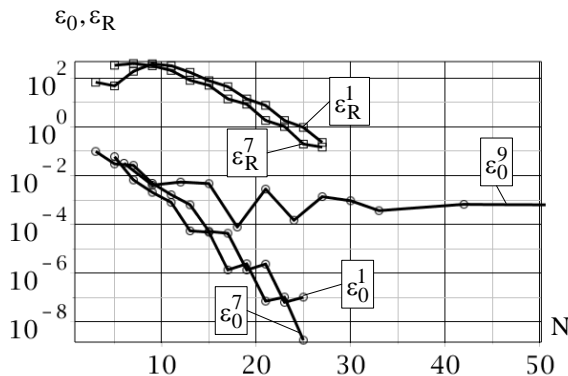


Рис. 28. Похибки наближених розв'язків ϵ_0 і нев'язки в рівняннях ϵ_R . Верхній індекс вказує на порядковий номер базису

Висновки

Найкращими для трьох розглянутих задач виявилися поліноміальний базис 7 – лінійні комбінації поліномів Лежандра, які задовольняють всім крайовим умовам. Серед розглянутих базисних систем саме цей базис приводить до найбільшої швидкості прагнення наближеного розв'язку до точного і нев'язки в рівняннях до нуля, а також має найменше зростання чисел обумовленості зі збільшенням порядку матриць СЛАР, до яких приводять варіаційні та проєкційні методи. Аналогічні базиси, побудовані

за допомогою поліномів Чебишева, приводять до незначного завищення чисел обумовленості матриць. Перевага у використанні поліномів Чебишева полягає тільки в простоті визначення їх нулів.

Недоліком лагранжових базисних функцій є трудомісткість їх побудови, диференціювання і обчислення. Їх перевагою є скорочення обсягу обчислень при числовому інтегруванні. Так, якщо використовувати узагальнений метод Гальоркіна, то чисельне інтегрування по області зводиться до обчислення підінтегральної функції тільки в одній точці (за умови збереження точок колокації):

$$\int_{-1}^1 (w_n^{IV}(x) - f(x)) \varphi_i^4(x) dx =$$

$$= \sum_{j=1}^N \omega_j (w_n^{IV}(x_j) - f(x_j)) \varphi_i^4(x_j) =$$

$$= \omega_j (w_n^{IV}(x_j) - f(x_j)),$$

де ω_j – вагові коефіцієнти, які для системи функцій 4 мають вигляд:

$$\omega_j^4 = 2 \left[(N+1)(N+2) \left(P(N+1, x_{j+1}) \right) \right]^{-2}.$$

Наявність ефекту Гіббса на порядки знижує швидкість збіжності наближених розв'язків до точних. Його вплив збільшується зі зменшенням порядку гладкості шуканих розв'язків. Завжди необхідно вживати додаткових заходів для його уникнення.

Фінітний базис значно поступається в точності і швидкості збіжності усім розглянутим базисам.

Література

1. Boyd, J. P. *Chebyshev and Fourier Spectral Methods [Text]* / J. P. Boyd. – New York : Dover, 2001. – 680 p.
2. *A high-order 3-D spectral-element method for the forward modelling and inversion of gravimetric data-application to the western Pyrenees [Text]* / R. Martin, S. Chevrot, D. Komatitsch, L. Seoane, H. Spangenberg, Y. Wang // *Geophysical Journal International* Bruinsma. – 2017. – Vol. 209, No. 1. – P. 406-424.
3. Bazán, F. S. V. *Filtered spectral differentiation method for numerical differentiation of periodic functions with application to heat flux estimation [Text]* / F. S. V. Bazán, L. Bedin // *Computational and Applied Mathematics*. – 2019. – Vol. 38, No. 4. – P. 164-188.
4. *An efficient pseudo-spectral method for the description of atomic electronic wave functions – application to the hydrogen atom in a uniform magnetic field [Text]* / C. Woywod, S. Roy, K. Maiti, K. Ruud // *Chemical Physics*. – 2018. – Vol. 515. – P. 299-314.
5. Jani, M. *Bernstein modal basis: Application to the spectral petrov-galerkin method for fractional partial differential equations [Text]* / M. Jani, E. Babolian, S. Javadi // *Mathematical Methods in the Applied Sciences*. – 2017. – Vol. 40, No. 18. – P. 7663-7672.

6. Михлин, С. Г. Численная реализация вариационных методов [Текст] / С. Г. Михлин. – М. : Наука, 1966. – 432 с.

7. Shen, J. *Spectral Methods. Algorithms, Analysis and Applications [Text]* / J. Shen, T. Tang, L. Wang // *Springer Series in Computational Mathematics*. – 2011. – Vol. 41. – 470 p.

8. Минтюк, В. Б. Точность, сходимость и устойчивость метода Рэлея - Ритца при различных базисах [Текст] / В. Б. Минтюк // *Авиационно-космическая техника и технология*. – 2008. – № 5 (52). – С. 17-23.

9. Халилов, С. А. Построение и исследование аналитико-численного решения задачи об изгибе жёстко закреплённой прямоугольной пластины [Текст] / С. А. Халилов, В. Б. Минтюк, Д. А. Ткаченко // *Открытые информационные и компьютерные интегрированные технологии : сб. науч. тр. Нац. аэрокосм. ун-та им. Н. Е. Жуковского «ХАИ»*. – Вып. 49. – 2011. – С. 81-94.

10. Shen, J. *Efficient spectral-Galerkin method I. direct solvers for second- and fourth-order equations by using Legendre polynomials [Text]* / J. Shen // *SIAM J Sci Comput*. – 1994. – Vol. 15. – P. 1489-1505.

11. Минтюк, В. Б. Ортонормированный базис для одномерных краевых задач [Текст] / В. Б. Минтюк // *Авиационно-космическая техника и технология*. – 2007. – № 5 (41). – С. 32-36.

12. Shen, J. *Efficient spectral-Galerkin method II. direct solvers for second- and fourth-order equations by using Chebyshev polynomials [Text]* / J. Shen // *SIAM J Sci Comput*. – 1995. – Vol. 16. – P. 74-87.

13. Минтюк, В. Б. Способ построения базиса для решения краевых задач в обыкновенных производных вариационными методами [Текст] / В. Б. Минтюк // *Открытые информационные и компьютерные интегрированные технологии : сб. науч. тр. Нац. аэрокосм. ун-та им. Н. Е. Жуковского «ХАИ»*. – Вып. 35. – 2007. – С. 143-148.

14. Халилов, С. А. Новые системы ортонормированных многочленов, некоторые их свойства и приложения [Текст] / С. А. Халилов // *Прочность конструкций летательных аппаратов : темат. сб. науч. тр.* – Вып. 5. – 1978. – С. 46-56.

15. *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables. Applied Mathematics Series [Text]* / United States Department of Commerce, National Bureau of Standards; Abramowitz, Milton, Stegun, Irene Ann, eds. – New York : Dover Publications, 1983, 275 p.

16. Бернштейн, С. Н. *Собрание сочинений. Том 1 – Конструктивная теория функций (1905 – 1930 гг.) [Текст]* / С. Н. Бернштейн. – М. : АН СССР, 1952. – 582 с.

17. Даугавет, И. К. О быстроте сходимости метода Галеркина для обыкновенных дифференциальных уравнений [Текст] / И. К. Даугавет // *Изв. ВУЗов. Математика*. – 1958. – № 5 (6). – С. 158-165.

18. Васидзу, К. *Вариационные методы в теории упругости и пластичности [Текст] : пер. с англ.* / К. Васидзу. – М. : Мир, 1987. – 542 с.

19. Халилов, С. А. Плоский нелинейный изгиб балки. Вывод замкнутой системы уравнений [Текст] /

С. А. Халилов, В. Б. Минтюк // *Авиационно-космическая техника и технология*. – 2011. – № 1 (78). – С. 39-45.

20. Минтюк, В. Б. *Исследование нелинейного плоского изгиба балки [Текст]* / В. Б. Минтюк // *Авиационно-космическая техника и технология*. – 2011. – № 3 (80). – С. 43-52.

References

1. Boyd, J. P. *Chebyshev and Fourier Spectral Methods*, New York, Dover Publ., 2001. 680 p.

2. Martin, R., Chevrot, S., Komatitsch, D., Seoane, L., Spangenberg, H., Wang, Y. A high-order 3-D spectral-element method for the forward modelling and inversion of gravimetric data-application to the western Pyrenees. *Geophysical Journal International* Bruinsma, 2017, vol. 209, no. 1, pp. 406–424.

3. Bazán, F. S. V., Bedin, L. Filtered spectral differentiation method for numerical differentiation of periodic functions with application to heat flux estimation. *Computational and Applied Mathematics*, 2019, vol. 38, no. 4, pp. 165-188.

4. Woywod, C., Roy, S., Maiti, K., Ruud, K. An efficient pseudo-spectral method for the description of atomic electronic wave functions – application to the hydrogen atom in a uniform magnetic field. *Chemical Physics*, 2018, vol. 515, pp. 299-314.

5. Jani, M., Babolian, E., Javadi, S. Bernstein modal basis: Application to the spectral petrov-galerkin method for fractional partial differential equations. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 2017, vol. 40, no. 18, pp. 7663-7672.

6. Mikhlin, S. G. *Chislennaya realizatsiya variatsionnykh metodov* [Numerical realization of variational methods]. Moscow, «Nauka» Publ., 1966. 432 p.

7. Shen, J., Tang, T., Wang, L. *Spectral Methods. Algorithms, Analysis and Applications*. Springer Series in Computational Mathematics, 2011, vol. 41. 470 p.

8. Mintyuk, V. B. Tochnost', skhodimost' i ustoychivost' metoda Releya - Rittsa pri razlichnykh bazisakh [Accuracy, convergence and stability of Rayleigh-Ritz method for different bases]. *Aviacijno-kosmichna tehnika i tehnologija - Aerospace technic and technology*, 2008, vol. 52, no. 5, pp. 17-23.

9. Khalilov, S. A., Mintyuk, V. B., Tkachenko, D. A. Postroenie i issledovanie analitiko-chislennogo resheniya zadachi ob izgibe zhestko zashchemlennoi pryamougol'noi plastiny [Development and research of the analytic-numerical solution for the bending problem of stiffened rectangular plate]. *Otkrytye informatsionnye i komp'yuternye integrirovannye tekhnologii : sb. nauch. tr. Nats. aerokosm. un-ta im. N. E. Zhukovskogo «KhAI»* [Open information and computer integrated technologies : scientific papers collection of Zhukovsky National Aerospace university]. Kharkiv, «KhAI» Publ., 2011, vol. 49, pp. 81 – 94.

10. Shen, J. *Efficient spectral-Galerkin method I. direct solvers for second- and fourth-order equations by using Legendre polynomials. SIAM J Sci Comput*, 1994, vol. 15, pp. 1489-1505.

11. Mintyuk, V. B. Ortonormirovanniyi bazis dlya odnomernykh kraevykh zadach [Orthonormal basis for 1-

dimensional boundary value problems]. *Aviacijno-kosmična tehnika i tehnologija - Aerospace technic and technology*, 2007, vol. 41, no. 5, pp. 32-36.

12. Shen, J. Efficient spectral-Galerkin method II. direct solvers for second- and fourth-order equations by using Chebyshev polynomials. *SIAM J Sci Comput*, 1995, vol. 16, pp. 74-87.

13. Mintyuk, V. B. Sposob postroeniya bazisa dlya resheniya kraevykh zadach v obyknovennykh proizvodnykh variatsionnymi metodami [Basis construction method for solving boundary value problems in ordinary derivatives by variational methods]. *Otkrytye informatsionnye i komp'yuternye integrirrovannye tekhnologii : sb. nauch. tr. Nats. aerokosm. un-ta im. N. E. Zhukovskogo «KhAI»* [Open information and computer integrated technologies : scientific papers collection of Zhukovsky National Aerospace university]. Kharkiv, «KhAI» Publ., 2007, vol. 35, pp. 143-148.

14. Khalilov, S. A. Novye sistemy ortonormirovannykh mnogochlenov, nekotorye ikh svoystva i prilozheniya [New orthonormal polynomials systems, some of their properties and applications]. *Prochnost' konstruksii letatel'nykh apparatov: temat. sb. nauch. tr.* [Strength of aircraft structures: thematic collection of scientific papers]. Kharkiv, «KhAI» Publ., 1978, vol. 5, pp. 46-56.

15. Abramowitz, Milton, Stegun, Irene Ann, eds. *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables. Applied Mathematics*

Series. United States Department of Commerce, National Bureau of Standards, New York, Dover Publications., 1983. 275 p.

16. Bernshtein, S. N. *Sobranie sochinenii. Tom 1 – Konstruktivnaya teoriya funktsii (1905 – 1930 gg.)* [Anthology. Volume 1 – Constructive theory of functions]. Moscow, «AN SSSR» Publ., 1952. 582 p.

17. Daugavet, I. K. O bystrote skhodomosti metoda Galerkina dlya obyknovennykh differentsial'nykh uravnenii [About convergence rate of the Galerkin method for ordinary differential equations]. *Izv. VUZov. Matematika»* [University News mathematics], 1958, vol. 6, no. 5, pp. 158-165.

18. Vasidzu, K. *Variatsionnye metody v teorii uprugosti i plastichnosti* [Variational methods in elasticity and plasticity]. Moscow, «Mir» Publ., 1987. 542 p.

19. Khalilov, S. A., Mintyuk, V. B. Ploskii nelineinyi izgib balki. Vyvod zamknutoi sistemy uravnenii [Simple non-linear bending of a beam. Derivation of closed loop equations set]. *Aviacijno-kosmična tehnika i tehnologija - Aerospace technic and technology*, 2011, vol. 78, no. 1, pp. 39-45.

20. Mintyuk, V. B. Issledovanie nelineinogo ploskogo izgiba balki [Researching nonlinear plane bending of a beam]. *Aviacijno-kosmična tehnika i tehnologija - Aerospace technic and technology*, 2011, vol 80, no. 3, pp. 43-52.

Поступила в редакцию 12.09.2019, рассмотрена на редколлегии 10.12.2019

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ БАЗИСНЫХ СИСТЕМ ПРИ РЕШЕНИИ АНАЛИТИКО-ЧИСЛЕННЫМИ МЕТОДАМИ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ НА ОТРЕЗКЕ

С. А. Халилов, Д. А. Ткаченко, Н. В. Бондарева, В. Б. Минтюк

Аналитико-численные методы имеют неоспоримые преимущества над численными при решении многих проблем математической физики. Преимущества заключаются в высокой сходимости и точности приближенных решений, что наиболее актуально при расчетах прочности авиационно-космической техники. При использовании аналитико-численных методов неизбежно возникает проблема выбора базисных функций. Проблема заключается в том, что системы базисных функций кроме обеспечения экспоненциальной сходимости должны удовлетворять ряду других требований: устойчивость приближенных решений и процедуры их получения, уменьшение объема вычислений, удобство и пр. В данной работе сравнивается одиннадцать базисных систем. Это системы, построенные в виде линейных комбинаций полиномов Лежандра, которые удовлетворяют или только главным краевым условиям, или и главным, и естественным; аналогичные системы, построенные с помощью полиномов Чебышева; функции, предложенные Халиловым С. А.; системы интерполяционных полиномов Лагранжа – Лобатто с использованием точек интерполяции Лежандра и Чебышева; системы степенных и тригонометрических функций, система финитных функций метода конечных элементов. Сравнивались скорость сходимости приближенного решения к точному, невязка в уравнениях краевых задач и числа обусловленности матриц систем линейных алгебраических уравнений, к которым приводят вариационные, проекционные методы и метод коллокации. Исследование выполнено на трех тестовых задачах, моделирующих изгиб балки: классический изгиб балки неравномерно распределенной нагрузкой, изгиб дополнительно растянутой балки на упругом основании и геометрически нелинейный изгиб. Исследовано влияние эффекта Гиббса на сходимость приближенных решений. Среди рассмотренных базисных систем лучшей оказалась система базисных функций в виде линейных комбинаций полиномов Лежандра, которые удовлетворяют всем краевым условиям. Этот базис приводит к наибольшей скорости стремления приближенных решений к точному, невязки в уравнении к нулю, а также наименьшему росту чисел обусловленности с увеличением порядка матриц систем линейных алгебраических уравнений, к которым приводят вариационные и проекционные методы. Наихудшим в плане точности и сходимости оказались финитные функции метода конечных элементов.

Ключевые слова: базисная система; аналитико-численные методы; точность, сходимость и устойчивость приближенных решений.

NUMERICAL STUDY OF BASIC SYSTEMS IN SOLVING BOUNDARY VALUE PROBLEMS ON A SEGMENT USING SPECTRAL METHODS

S. A. Khalilov, D. A. Tkachenko, N. V. Bondareva, V. B. Myntiuk

Spectral methods have indisputable advantages over numerical methods in solving various problems of mathematical physics. The advantages are the high convergence and accuracy of approximate solutions, which is most relevant for calculating the strength of aerospace machinery. The problem of choosing basic functions inevitably arises when applying spectral methods. The problem is that, in addition to providing exponential convergence, the system of basic functions has to satisfy some other requirements: stability of approximate solutions and procedures for their obtaining, reduction of calculations, convenience, and some more. This paper compares eleven basic systems: the systems constructed in the form of linear combinations of Legendre polynomials that satisfy either only the main boundary conditions or the main and natural ones, similar systems constructed using Chebyshev polynomials, and the functions proposed by Khalilov S. A., systems of Lagrange – Lobatto interpolation polynomials using the Legendre and Chebyshev interpolation points, system of trigonometric functions, exponentiation, and system of finite functions of the finite element method. The convergence speed of the approximate solution to the exact one, the error in the equations of boundary value problems, and the condition numbers of matrices of linear algebraic equation systems, which arise when using variational, projection and collocation methods, were compared. The study performed on three test problems modeling beam bending: classic beam bending under unevenly distributed load, bending of additionally stretched beam on the elastic basis and geometrically nonlinear bending. The impact of the Gibbs effect on the approximate solution convergence is investigated. Among the considered basic systems, the system of basis functions in the form of linear combinations of Legendre polynomials has proved to be the best, as they satisfy all boundary conditions. This basis leads to the highest speed at which approximate solution approaches the exact one, the error in the equations approaches to zero, and also it has the smallest increase in the condition number with the increase in the order of SLE matrices, which appear due to variational and projection methods. The finite functions of the finite element method have proved to be the worst in terms of accuracy and convergence.

Keywords: basic system; spectral methods; accuracy, convergence, and stability of approximate solutions

Халілов Сіявущ Ахмедович – старший науковий співробітник ПНДЛ кафедри технології виробництва літальних апаратів, Національний аерокосмічний університет ім. М. С. Жуковського «Харківський авіаційний інститут», Харків, Україна.

Ткаченко Денис Анатолійович – асистент кафедри міцності літальних апаратів, Національний аерокосмічний університет ім. М. С. Жуковського «Харківський авіаційний інститут», Харків, Україна.

Бондарева Надія Віталіївна – науковий співробітник ПНДЛ кафедри технології виробництва літальних апаратів, Національний аерокосмічний університет ім. М. С. Жуковського «Харківський авіаційний інститут», Харків, Україна.

Минтюк Віталій Борисович – канд. техн. наук, доцент кафедри міцності літальних апаратів, Національний аерокосмічний університет ім. М. С. Жуковського «Харківський авіаційний інститут», Харків, Україна.

Khalilov Siyavush Ahmedovich – senior researcher of National Aerospace University “Kharkiv Aviation Institute”, Kharkiv, Ukraine, e-mail: khalilov@ukr.net,

Scopus Author ID: 57201056509, <https://scholar.google.com.ua/citations?hl=ru&user=AlspjccAAAAJ>

Tkachenko Denys Anatoliiovych – assistant professor of Aircraft strength department of National Aerospace University “Kharkiv Aviation Institute”, Kharkiv, Ukraine, e-mail: tkachenko_d_an@ukr.net,

Bondareva Nadezhda Vitalievna – researcher of Aircraft technology and manufacture department of National Aerospace University “Kharkiv Aviation Institute”, Kharkiv, e-mail: nadiya.bondareva@gmail.com,

Myntiuk Vitalii Borisovich – PhD, professor of Aircraft strength department of National Aerospace University “Kharkiv Aviation Institute”, Ukraine, e-mail: vitalii.myntiuk@khai.edu,

ORCID Author ID: 0000-0002-4047-0192, Scopus Author ID: 57201067344, ResearcherID: Y-6751-2018, <https://scholar.google.com.ua/citations?user=8L5b19YAAAAJ&hl=ru>