

УДК 681.532.8.01

doi: 10.32620/aktf.2020.3.01

А. С. КУЛИК, Е. В. ФИЛИППОВИЧ, К. Ю. ДЕРГАЧЕВ,
С. Н. ПАСИЧНИК, Ю. А. НЕМШИЛОВ*Национальный аэрокосмический университет им. Н. Е. Жуковского «ХАИ», Украина*

УПРАВЛЕНЧЕСКИЕ МОДЕЛИ УГЛОВОГО ДВИЖЕНИЯ КОРОМЫСЛА С ВИНТОВЫМИ ЭЛЕКТРОПРИВОДАМИ

Предметом изучения в статье является процесс формирования моделей углового движения коромысла с винтовыми электроприводами. *Целью* является разработка подхода к формированию простейших моделей углового движения коромысла с винтовыми электроприводами как объекта автоматического управления. *Задачи*: сформировать физическую модель коромысла с винтовыми электроприводами. Разработать с помощью лагранжевого формализма нелинейное математическое описание процесса углового движения коромысла с винтовыми электроприводами. Получить линеаризованное математическое описание объекта автоматического управления в пространстве состояний в случае использования одного датчика (углового положения) и двух датчиков (углового положения и угловой скорости коромысла). Получить описание объекта автоматического управления в частотной области с помощью преобразований Лапласа. Сформировать графические модели объекта автоматического управления посредством структурных схем во временной и частотной областях. Проанализировать функциональные свойства объекта автоматического управления: устойчивость, управляемость, наблюдаемость, структурную и сигнальную диагностируемость в случае использования одного датчика (углового положения) и двух датчиков (углового положения и угловой скорости коромысла). Сформировать условия использования математических описаний как математических моделей объекта автоматического управления. Используемыми *методами* являются: метод Лагранжа, аналитической линеаризации, пространства состояний, преобразования Лапласа, критерии Ляпунова, Калмана, диагностируемости. Получены следующие *результаты*: сформирован подход к получению простейших моделей углового движения коромысла с винтовыми электроприводами как объекта автоматического управления для решения конкретных задач анализа и синтеза. *Выводы*. Научная новизна заключается в формировании подхода к формированию простейших управленческих моделей углового движения коромысла с винтовыми электроприводами, отличающегося от известных полной учета действующих сил и моментов.

Ключевые слова: коромысло; винтовой электропривод; объект автоматического управления; управляемость; наблюдаемость; диагностируемость; математические модели; пространство состояний.

Введение

Постановка проблемы. Попытки создания гибридного летательного аппарата, обладающего свойствами вертолета и самолета в отдельных режимах полета, ведутся в течение ряда десятилетий. Получен ряд конструктивных решений, воплощенных в различных макетных, экспериментальных образцах и серийных изделиях [1-3]. К настоящему времени наиболее масштабной оказалась реализация проекта компании Bell серийного конвертоплана Bell V-22 Osprey, находящегося на вооружении США (рис. 1).

Конвертоплан представляет собой новый тип летательного аппарата, интегрирующий свойства вертолета и самолета: совершать вертолетный взлет и посадку, а также выполнять полеты в значительном радиусе действия.

Многофункциональность конвертоплана обуславливает трудности его ручного управления в ре-

жимах взлета и посадки, а также в переходных режимах в горизонтальный полет из режима зависания и обратно.



Рис. 1. Конвертоплан Bell V-22 Osprey

Автоматизация этих режимов, прежде всего, связана с глубоким изучением происходящих процессов и отражением результатов познания в соответствующих управленческих моделях. Моделей конвертоплана, кроме вербальных, описывающих

устройство и принцип действия, а также видеозаписей отдельных фрагментов полетов в доступных научных и учебных источниках нет. Это обстоятельство существенно осложняет научно-исследовательские и проектные работы преподавателей и студентов по автоматизации процессов управления создаваемых беспилотных прототипов конвертопланов (рис. 2).



Рис. 2. Беспилотные прототипы конвертопланов

Для устранения этой причины на кафедре была создана экспериментальная установка для изучения особенностей движения конвертоплана относительно центра масс по углу крена (рис. 3) и для разработки и исследования алгоритмов цифрового управления положением механического динамически подобного конвертоплану устройства типа «коромысло» с помощью винтовых электроприводов.



Рис. 3. Экспериментальная установка для изучения особенностей движения конвертоплана

Цель статьи заключается в представлении подхода к формированию простейших моделей углового движения коромысла с винтовыми электроприводами как объекта автоматического управления.

1. Физическая модель устройства

На рис. 4 представлена физическая модель механической части устройства коромысла с винтовыми электроприводами. Рассматривается плоское движение коромысла в декартовой системе координат xOy .

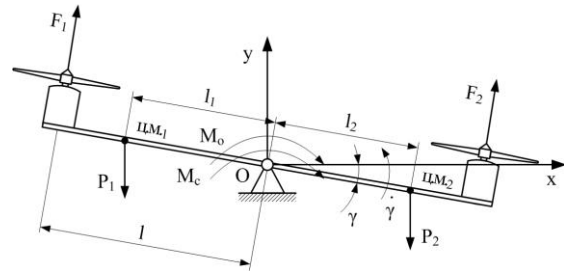


Рис. 4. Физическая модель механической части устройства

На равноплечное коромысло действуют следующие силы и моменты: веса плеч коромысла P_1 и P_2 ; тяги винтов F_1 и F_2 ; статический момент сопротивления в шарнире коромысла M_0 ; момент аэродинамического сопротивления коромысла M_c . Параметры углового движения коромысла: γ – угловое положение; $\dot{\gamma}$ – угловая скорость. Геометрические параметры: l – длина плеча, l_1 и l_2 – расстояние от шарнира до соответствующих центров масс ц.м.1 и ц.м.2.

Физическая модель электромеханической части устройства приведена на рис. 5.

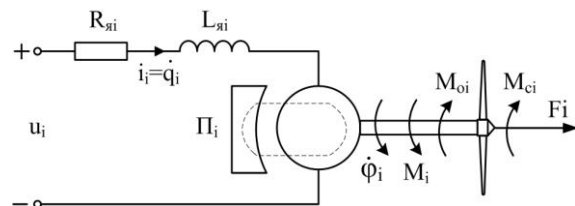


Рис. 5. Физическая модель электромеханической части устройства

Особенность данного электропривода постоянного тока состоит в формировании магнитного поля с помощью постоянных магнитов Π_i , $i = 1, 2$, расположенных на внутренней поверхности статора электропривода. В результате взаимодействия постоянного магнитного поля статора с переменным магнитным полем якоря возникает вращающий момент M_i якоря с угловой скоростью $\dot{\phi}_i$, что приводит к появлению тяги винта F_i . В результате взаимодействия магнитных полей статора и ротора в якорной обмотке индуцируется противо-ЭДС $e_{яi}$. На вращающий момент оказывают влияние момент статического сопротивления M_{oi} и момент аэродинамического сопротивления M_{ci} . Параметры электрической цепи: $R_{яi}$ – сопротивление обмотки якоря; $L_{яi}$ – индуктивность обмотки якоря; i_i – ток

якоря; q_i – электрический заряд; u_i – управляющее напряжение.

2. Нелинейное математическое описание

Для формализации процесса движения коромысла с винтовыми электроприводами используем уравнения Лагранжа второго рода [4] в следующем виде:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\lambda}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial \lambda_i} = Q_i^u + Q_i^f; \quad i = \overline{1, n}, \quad (1)$$

где T – выражение кинетической энергии объекта моделирования; λ_i – обобщенная координата; Q_i^u – обобщенная сила, соответствующая управляющим воздействиям; Q_i^f – обобщенная сила, соответствующая возмущающим воздействиям.

Движение коромысла обладает пятью степенями свободы и характеризуется такими обобщенными координатами: γ , ϕ_1 , ϕ_2 , q_1 , q_2 .

Кинетическая энергия коромысла с винтовыми электроприводами описывается следующим выражением:

$$T = \frac{1}{2} I_k \dot{\gamma}^2 + \frac{1}{2} I_{\phi_1} \dot{\phi}_1^2 + \frac{1}{2} I_{\phi_2} \dot{\phi}_2^2 + \frac{1}{2} I_{q_1} \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} I_{q_2} \dot{q}_2^2, \quad (2)$$

где I_k , I_{ϕ_1} , I_{ϕ_2} – моменты инерции, соответственно, коромысла, вращающихся частей первого и второго электроприводов.

Обобщенные силы для каждой обобщенной координаты описываются следующим образом:

$$\begin{aligned} Q_1^u &= F_1 l - F_2 l; \quad Q_2^u = M_1; \\ Q_3^u &= M_2; \quad Q_4^u = u_1; \quad Q_5^u = u_2; \\ Q_1^f &= -P_1 l_1 \cos \gamma + P_2 l_2 \cos \gamma - M_o - M_c; \\ Q_2^f &= -M_{o1} - M_{c1}; \quad Q_3^f = -M_{o2} - M_{c2}; \\ Q_4^f &= -e_{\gamma 1} - R_{\gamma 1} \dot{q}_1; \quad Q_5^f = -e_{\gamma 2} - R_{\gamma 2} \dot{q}_2. \end{aligned}$$

Выполнив определенные действия в соответствии с уравнением (1), получим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} I_k \ddot{\gamma} = F_1 l - F_2 l + P_1 l_1 \cos \gamma + P_2 l_2 \cos \gamma - M_o - M_c; \\ I_{\phi_1} \ddot{\phi}_1 = M_1 - M_{o1} - M_{c1}; \\ I_{\phi_2} \ddot{\phi}_2 = M_2 - M_{o2} - M_{c2}; \\ L_{\gamma 1} \ddot{q}_1 = u_1 - e_{\gamma 1} - R_{\gamma 1} \dot{q}_1; \\ L_{\gamma 2} \ddot{q}_2 = u_2 - e_{\gamma 2} - R_{\gamma 2} \dot{q}_2. \end{cases} \quad (3)$$

Моменты и силы в правых частях уравнений зависят от обобщенных координат. Эти зависимости можно описать аналитически. Так, сила тяги, создаваемая винтами, описывается таким выражением:

$$F_i = \alpha \rho \dot{\phi}_i^2 d_{vi}^4; \quad i = \overline{1, 2}, \quad (4)$$

где α – коэффициент тяги винта; ρ – плотность воздуха; d_{vi} – диаметр винта.

Моменты аэродинамического сопротивления определяются с помощью следующих выражений:

$$M_c = m_c (\dot{\gamma}) \rho \dot{\gamma}^2 s_M l^3; \quad (5)$$

$$M_{ci} = \frac{\pi}{64} m_{ci} (\dot{\phi}_i) \rho \dot{\phi}_i^2 d_{vi}^5; \quad i = \overline{1, 2}, \quad (6)$$

где $m_c (\dot{\gamma})$ и $m_{ci} (\dot{\phi}_i)$ – аэродинамические коэффициенты;

s_M – площадь лобового сопротивления коромысла.

Моменты статического сопротивления M_o , M_{o1} и M_{o2} не зависят от обобщенных координат.

Вращающий момент электропривода характеризуется таким выражением:

$$M_i = n_i \dot{q}_i B_i a_i \sin(\dot{\phi}_i t); \quad i = \overline{1, 2}, \quad (7)$$

где n_i – число витков обмотки якоря;

B_i – магнитная индукция;

a_i – площадь витка;

t – время.

Противо-ЭДС, индуцируемая в обмотке якоря при его вращении с угловой скоростью $\dot{\phi}_i$, определяется следующим выражением:

$$e_{\gamma i} = \dot{\phi}_i r_{\gamma i} B_i l_{\gamma i} \sin(\dot{\phi}_i t); \quad i = \overline{1, 2}, \quad (8)$$

где $r_{\gamma i}$ – радиус якоря;

$l_{\gamma i}$ – длина проводника, охватываемого магнитным полем.

Уравнения (3) – (8) в совокупности представляют собой математическое описание нелинейных движений коромысла с винтовыми электроприводами под действием управляющих и возмущающих воздействий в диапазоне изменения углового положения $0 < \gamma < 2\pi$.

Нелинейная связь между переменными существенно усложняет понимание процесса движения коромысла в большом диапазоне изменения. Для упрощения понимания особенностей углового движения коромысла можно значительно сузить диапа-

зон изменения переменных и перейти к уравнениям первого приближения с помощью метода аналитической линеаризации.

3. Линейное математическое описание

Метод аналитической линеаризации [4] основан на способе разложения нелинейных уравнений (3) – (8) в ряд Тейлора относительно начальных условий движения, соответствующих горизонтальному положению коромысла, и пренебрежении членами разложения более высокого порядка малости. В результате получена следующая система линейных уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}\Delta\ddot{\gamma} + a_{12}\Delta\dot{\phi}_1 + a_{13}\Delta\dot{\phi}_2 = 0; \\ a_{21}\Delta\ddot{\phi}_1 + a_{22}\Delta\dot{q}_1 + a_{23}\Delta\dot{\phi}_1 = 0; \\ a_{31}\Delta\ddot{\phi}_2 + a_{32}\Delta\dot{q}_2 + a_{33}\Delta\dot{\phi}_2 = 0; \\ a_{41}\Delta\ddot{q}_1 + a_{42}\Delta\dot{\phi}_1 + a_{43}\Delta\dot{q}_1 + a_{44}\Delta u_1 = 0; \\ a_{51}\Delta\ddot{q}_2 + a_{52}\Delta\dot{\phi}_2 + a_{53}\Delta\dot{q}_2 + a_{54}\Delta u_2 = 0, \end{cases} \quad (9)$$

где $a_{11} = I_k$; $a_{12} = -1 \left(\frac{\partial F_1}{\partial \phi_1} \right)_0$; $a_{13} = 1 \left(\frac{\partial F_2}{\partial \phi_2} \right)_0$;

$$a_{21} = I_{\phi 1}; \quad a_{22} = \left(-\frac{\partial M_1}{\partial \dot{q}_1} \right)_0;$$

$$a_{23} = \left(-\frac{\partial M_1}{\partial \dot{\phi}_1} + \frac{\partial M_{c1}}{\partial \dot{\phi}_1} \right)_0; \quad a_{31} = I_{\phi 2}; \quad a_{32} = \left(-\frac{\partial M_2}{\partial \dot{q}_2} \right)_0;$$

$$a_{33} = \left(-\frac{\partial M_2}{\partial \dot{\phi}_2} + \frac{\partial M_{c2}}{\partial \dot{\phi}_2} \right)_0; \quad a_{41} = I_{\alpha 1}; \quad a_{42} = \left(\frac{\partial e_{\alpha 1}}{\partial \dot{\phi}_1} \right)_0;$$

$$a_{43} = R_1; \quad a_{44} = -1; \quad a_{51} = L_{\alpha 2}; \quad a_{52} = \left(\frac{\partial e_{\alpha 2}}{\partial \dot{\phi}_2} \right)_0;$$

$$a_{53} = R_2; \quad a_{54} = -1.$$

Приняв во внимание, что инерционные механические свойства электропривода оказывают более существенное влияние на процесс движения, чем электрические инерционные свойства в цепи якоря и выполнив соответствующие подстановки и преобразования получим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}\Delta\ddot{\gamma} + a_{12}\Delta\dot{\phi}_1 + a_{13}\Delta\dot{\phi}_2 = 0; \\ a'_{21}\Delta\ddot{\phi}_1 + \Delta\dot{\phi}_1 - a'_{23}\Delta u_1 = 0; \\ a'_{31}\Delta\ddot{\phi}_2 + \Delta\dot{\phi}_2 - a'_{33}\Delta u_2 = 0, \end{cases} \quad (10)$$

здесь

$$a'_{21} = \frac{I_{\phi 1} \left(-\frac{\partial M_1}{\partial \dot{\phi}_1} + \frac{\partial M_{c1}}{\partial \dot{\phi}_1} \right)_0^{-1}}{1 + \left(\frac{\partial M_1}{\partial \dot{q}_1} \right)_0 \left(-\frac{\partial M_1}{\partial \dot{\phi}_1} + \frac{\partial M_{c1}}{\partial \dot{\phi}_1} \right)_0^{-1} \frac{1}{R_1} \left(\frac{\partial e_{\alpha 1}}{\partial \dot{\phi}_1} \right)_0} =$$

$$= I_{\phi 1} \left(-\frac{\partial M_1}{\partial \dot{\phi}_1} + \frac{\partial M_{c1}}{\partial \dot{\phi}_1} \right)_0^{-1} a_0^{-1};$$

$$a'_{23} = \frac{1}{R_1} \left(\frac{\partial M_1}{\partial \dot{q}_1} \right)_0 \left(-\frac{\partial M_1}{\partial \dot{\phi}_1} + \frac{\partial M_{c1}}{\partial \dot{\phi}_1} \right)_0^{-1} a_0^{-1};$$

$$a'_{31} = I_{\phi 2} \left(-\frac{\partial M_2}{\partial \dot{\phi}_2} + \frac{\partial M_{c2}}{\partial \dot{\phi}_2} \right)_0^{-1} a_0^{-1};$$

$$a'_{33} = \frac{1}{R_2} \left(\frac{\partial M_2}{\partial \dot{q}_2} \right)_0 \left(-\frac{\partial M_2}{\partial \dot{\phi}_2} + \frac{\partial M_{c2}}{\partial \dot{\phi}_2} \right)_0^{-1} a_0^{-1}.$$

Используем метод пространства состояний [5, 6] и представим полученную систему уравнений (10) в следующих переменных состояния: $x_1(t) = \Delta\gamma$; $x_2(t) = \Delta\dot{\gamma}$; $x_3(t) = \Delta\dot{\phi}_1$; $x_4(t) = \Delta\dot{\phi}_2$. В результате соответствующих преобразований получим уравнения в векторно-матричной форме:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \\ \dot{x}_4(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{a_{12}}{a_{11}} & -\frac{a_{13}}{a_{11}} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{a'_{21}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{a'_{31}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{a'_{23}}{a'_{21}} & 0 \\ 0 & \frac{a'_{33}}{a'_{31}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} x_1(t_0) \\ x_2(t_0) \\ x_3(t_0) \\ x_4(t_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{10} \\ x_{20} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (11)$$

Для автоматического управления устройством коромысла с винтовыми электроприводами необходимы датчики углового положения и угловой скорости. Тогда выходные сигналы датчиков $u_{д1}(t)$ и $u_{д2}(t)$ будут связаны через коэффициенты передачи $k_{д1}$ и $k_{д2}$ с вектором состояния следующим образом:

$$\begin{bmatrix} u_{д1}(t) \\ u_{д2}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{д1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_{д2} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix}. \quad (12)$$

При использовании одного датчика угла

$$u_{д1}(t) = \begin{bmatrix} \kappa_{д1} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix}. \quad (13)$$

В более компактной форме уравнения (11) и (13) можно представить следующим образом:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t); u_{д}(t) = Cx(t), \quad (14)$$

здесь A , B и C – матрицы коэффициентов и соответствующих уравнениям размерностей.

Для получения математического описания объекта автоматического управления, состоящего из коромысла, винтовых электроприводов и датчиков, в форме передаточных функций используем преобразование Лапласа для уравнений (14) в результате получим следующие операторные уравнения:

$$sX(s) - x_0 = AX(s) + BU(s); U_{д}(s) = CX(s), \quad (15)$$

где s – переменная преобразований Лапласа;

$X(s)$ – изображение вектора состояния $x(t)$;

$U(s)$ – изображение вектора управляющих воздействий $u(t)$;

$U_{д}(s)$ – изображение вектора сигналов датчиков $u_{д}(t)$;

x_0 – вектор начальных условий.

Операторное уравнение для изображения $U_{д}(s)$ будет иметь вид:

$$U_{д}(s) = C[sI - A]^{-1} BU(s) + C[sI - A]^{-1} x_0, \quad (16)$$

здесь I – (4×4) единичная матрица.

С помощью этого операторного уравнения можно получить все передаточные функции, отражающие связь входных и выходных изображений переменных объекта автоматического управления. Так, по управляющим воздействиям:

$$W_1(s) = \frac{U_{д1}(s)}{U_1(s)} = \frac{\kappa_{д1} \begin{pmatrix} -a_{23} \\ a_{21} \end{pmatrix}}{s^2 \begin{pmatrix} a_{11} & s+1 \\ a_{12} \end{pmatrix}} = \frac{\kappa_1}{s^2 (T_1 s + 1)}; \quad (17)$$

$$W_2(s) = \frac{U_{д1}(s)}{U_2(s)} = \frac{\kappa_{д1} \begin{pmatrix} -a_{33} \\ a_{31} \end{pmatrix}}{s^2 \begin{pmatrix} a_{11} & s+1 \\ a_{13} \end{pmatrix}} = \frac{\kappa_2}{s^2 (T_2 s + 1)}; \quad (18)$$

$$W_3(s) = \frac{U_{д2}(s)}{U_1(s)} = \frac{\kappa_{д2} \begin{pmatrix} -a_{23} \\ a_{21} \end{pmatrix} s}{s^2 \begin{pmatrix} a_{11} & s+1 \\ a_{12} \end{pmatrix}} = \frac{\kappa_3}{s (T_1 s + 1)}; \quad (19)$$

$$W_4(s) = \frac{U_{д2}(s)}{U_2(s)} = \frac{\kappa_{д2} \begin{pmatrix} -a_{33} \\ a_{31} \end{pmatrix} s}{s^2 \begin{pmatrix} a_{11} & s+1 \\ a_{13} \end{pmatrix}} = \frac{\kappa_4}{s (T_2 s + 1)}. \quad (20)$$

По возмущающим воздействиям от ненулевых начальных условий:

$$W_1^f(s) = \frac{U_{д1}(s)}{F(s)} = \kappa_{д1}; \quad (21)$$

$$W_2^f(s) = \frac{U_{д2}(s)}{F(s)} = 0. \quad (22)$$

Полученные математические описания коромысла как объекта автоматического управления во временной области: уравнения (11) – (13) и в частотной области: передаточные функции: (17) – (22) можно использовать в задачах синтеза алгоритмов устройства автоматического управления.

4. Структурные схемы объекта автоматического управления

Графические представления математических описаний позволяют визуально оценивать связи и структурные свойства объекта автоматического управления.

Уравнения (11) и (12), описывающие процессы движения во временной области, графически можно представить структурной схемой, изображенной на рис. 6.

Структурные схемы объекта автоматического управления в частотной области с помощью передаточных функций (17) – (22) можно представить схемой, изображенной на рис. 7.

Приведенные структурные схемы отражают как состав преобразовательных элементов математических описаний, так и связи между элементами и характеристиками сигналов в объекте автоматического управления.

5. Анализ функциональных свойств объекта автоматического управления

Векторно-матричное уравнение (11) позволяет установить характер равновесия коромысла с винтовыми приводами. Для этого необходимо сформировать характеристическое уравнение объекта с помощью следующей формулы:

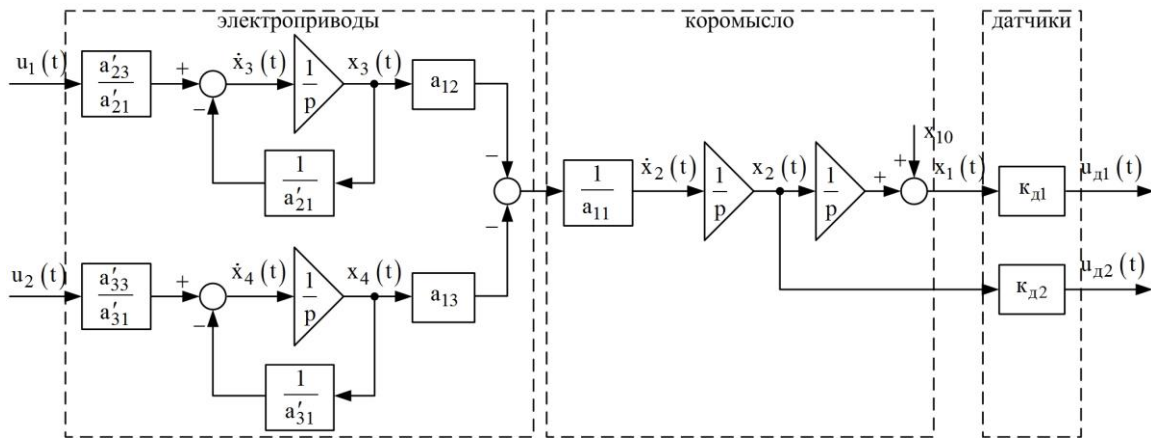


Рис. 6. Структурная схема объекта автоматического управления во временной области

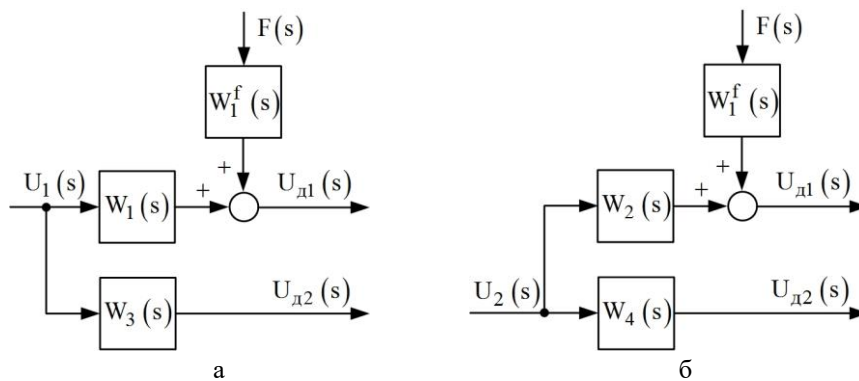


Рис. 7. Структурные схемы объекта автоматического управления в частотной области: а) для изображения управляющего воздействия $U_1(s)$; б) для изображения управляющего воздействия $U_2(s)$

$$\det [sI - A] = 0, \quad (23)$$

здесь \det – символ определителя.

Выполнив необходимые действия, получим такое характеристическое уравнение

$$s^2 \left(s + \frac{1}{a'_{21}} \right) \left(s + \frac{1}{a'_{31}} \right) = 0. \quad (24)$$

Очевидны следующие решения уравнения

$$s_1 = s_2 = 0; \quad s_3 = -\frac{1}{a'_{21}}; \quad s_4 = -\frac{1}{a'_{31}}. \quad (25)$$

Два полюса s_1 и s_2 имеют нулевые значения и располагаются на s -плоскости в начале координат. Два других значения полюсов s_3 и s_4 имеют отрицательные действительные значения и располагаются на действительной оси левой половины s -плоскости.

Согласно положениям теории устойчивости такое расположение полюсов на s -плоскости свидетельствует о нахождении объекта на границе устойчивости [6].

Необходимым условием для объекта автоматического управления является возможность управлять всеми переменными вектора состояния $x(t)$ и наблюдать все его изменения.

Возможность управления вектором состояния оценим с помощью критерия Р. Калмана [6] в такой форме:

$$\text{rang} R = \text{rang} \begin{bmatrix} B & AB & A^2B & A^3B \end{bmatrix} = 4, \quad (26)$$

здесь rang – символ ранга матрицы управляемости R ; 4 – размерность вектора состояния.

Сделав соответствующие критерию преобразования с матрицами A и B уравнения (11), получим матрицу управляемости размера: $\dim R = 4 \times 8$. Среди столбцов этой матрицы найдем четыре столбца следующей структуры:

$$R_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & r_{13} & r_{14} \\ 0 & 0 & r_{23} & r_{24} \\ r_{31} & 0 & r_{33} & 0 \\ 0 & r_{42} & 0 & r_{44} \end{bmatrix}. \quad (27)$$

Определитель подматрицы R_1 будет равен:

$$\det R_1 = r_{31}r_{42} (r_{13}r_{24} - r_{23}r_{14}). \quad (28)$$

Для того, чтобы был $\text{rang } R = 4$, необходимо и достаточно выполнение условия линейной независимости четырех векторов подматрицы R_1 , состоящее в том, что $\det R_1 \neq 0$, т.е.

$$r_{31}r_{42} (r_{13}r_{24} - r_{23}r_{14}) \neq 0. \quad (29)$$

В этом выражении $r_{31}r_{42} \neq 0$, тогда требуется выполнение следующего условия:

$$r_{13}r_{24} \neq r_{23}r_{14}. \quad (30)$$

Раскроем структуру коэффициентов r_{ij} через коэффициенты матриц A и B уравнения (11). В результате упрощения получим следующее условие полной управляемости:

$$a'_{21} \neq a'_{31}, \quad (31)$$

означающее по Калману, что объект автоматического управления может быть переведен из некоторого начального состояния $x(t_0)$ в желаемое состояние $x(t_1)$ за конечный интервал времени $t_1 - t_0$.

Кроме управляемости объект автоматического управления должен обладать свойством наблюдаемости, означающее возможность по результатам доступных измерений наблюдать изменение вектора $x(t)$. Свойство наблюдаемости оценим с помощью критерия Р. Калмана:

$$\text{rang } Q = \begin{bmatrix} C^T & (CA)^T & (CA^2)^T & (CA^3)^T \end{bmatrix} = 4. \quad (32)$$

Выполнив соответствующие преобразования с матрицами A и C уравнений (11) и (12), получим матрицу наблюдаемости Q , $\dim Q = 4 \times 8$. Среди всех восьми столбцов матрицы требуется найти четыре линейно-независимых. Такие столбцы есть в матрице Q и представим их с помощью подматрицы Q_1 :

$$Q_1 = \begin{bmatrix} q_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q_{21} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q_{33} & q_{34} \\ 0 & 0 & q_{43} & q_{44} \end{bmatrix}. \quad (33)$$

Линейная независимость столбцов означает,

что $\det Q_1 \neq 0$. Выполнив соответствующие действия для нахождения определителя матрицы Q_1 и из условия неравенства его нулю, получаем следующее соотношение:

$$a'_{21} \neq a'_{31}, \quad (34)$$

гарантирующее наблюдение вектора состояния $x(t)$ объекта автоматического управления на интервале наблюдения $t_1 - t_0$ по результатам измерений датчиков угла и угловой скорости. Такой же результат получается и при использовании матрицы уравнения (14).

Критерии управляемости и наблюдаемости Р. Калмана позволяют оценить структурные свойства объекта автоматического управления. Критерий управляемости устанавливает факт влияния вектора управляющих воздействий $u(t)$ на вектор состояния $x(t)$. Критерий наблюдаемости отражает факт возможности наблюдения изменений вектора состояния $x(t)$ на доступных измерениях $u_d(t)$. Эти свойства структуры объекта автоматического управления можно оценивать и по структурной схеме во временной области (рис. 6). Действительно, по схеме можно проследить путь прохождения управляющих воздействий $u_1(t)$ и $u_2(t)$, и их связь с переменными вектора состояния $x_i(t)$, $i = \overline{1, 4}$. Аналогично, можно по схеме проанализировать связи переменных вектора состояния с выходными сигналами $u_{d1}(t)$ и $u_{d2}(t)$. Такой анализ структурной схемы приводит к аналогичным выводам, полученным с помощью аналитических критериев Р. Калмана.

Условия управляемости (26) и наблюдаемости (33) совпали. Практическое выполнение этого условия означает одновременное использование различных по динамическим свойствам винтовых электроприводов. Попеременное использование идентичных винтовых электроприводов может обеспечить условия полной управляемости и наблюдаемости объекта автоматического управления.

При формировании системы управления угловым положением коромысла можно использовать следующие принципы управления:

- 1) принцип управления по возмущающему воздействию;
- 2) принцип управления по отклонению;
- 3) принцип управления по диагнозу.

Для использования первых двух принципов объект автоматического управления обладает необходимыми свойствами управляемости и наблюдае-

мости. При использовании третьего принципа – управления по диагнозу объект автоматического управления должен обладать свойством диагностируемости [7], заключающемся в возможности определять характеристики дестабилизирующих воздействий, нарушающих работоспособность объекта автоматического управления.

Для рассматриваемого объекта автоматического управления дестабилизирующими воздействиями в процессе эксплуатации могут быть изменения функциональных характеристик винтовых электроприводов и изменения углового положения и скорости коромысла. Итак, множество D-дестабилизирующих воздействий будет включать следующие события:

$$D = \{d_1, d_2, \dots, d_5\}, \quad (35)$$

где d_1 – изменение инерционных свойств первого электропривода; d_2 – изменения инерционных свойств второго электропривода; d_3 – уменьшение тяги первого винтового электропривода; d_4 – уменьшение тяги второго винтового электропривода; d_5 – изменение углового положения коромысла.

В результате параметризации дестабилизирующих воздействий сформируем следующее множество:

$$P = \{a'_{21}, a'_{31}, a'_{23}, a'_{33}, x_{10}\}. \quad (36)$$

Для оценки структурных свойств объекта используем критерий структурной диагностируемости [7], применив его отдельно к каждому уравнению описания в пространстве состояний. Первые два параметра множества P входят в состав матриц A и B уравнения (11), поэтому матрицы чувствительности по этим параметрам будет иметь следующий вид:

$$L_{a'_{21}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{(a'_{21})^2} & 0 & 0 & -\frac{a'_{23}}{(a'_{21})^2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad (37)$$

$$L_{a'_{31}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{(a'_{31})^2} & 0 & -\frac{a'_{33}}{(a'_{31})^2} \end{bmatrix}. \quad (38)$$

Параметры a'_{23} и a'_{33} входят в состав только матрицы B, поэтому

$$L_{a'_{23}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{1}{a'_{21}} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; L_{a'_{33}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{a'_{31}} \end{bmatrix}. \quad (39)$$

Параметр x_{10} входит в состав уравнения (12), следовательно

$$L_{x_{10}} = \begin{bmatrix} k_{d1} \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (40)$$

В соответствии с критерием полной структурной диагностируемости [7] во всех попарных сочетаниях матрицы чувствительности должны быть линейно независимыми. Очевидно, что приведенные матрицы (37) – (40) линейно независимы, следовательно, объект автоматического управления полностью структурно диагностируем.

Для оценки сигнальных свойств объекта автоматического управления используем критерий сигнальной диагностируемости [8], применив его отдельно к каждой матрице чувствительности. Получим следующие функции:

$$\psi_{a'_{21}}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{(a'_{21})^2} x_3(t) - \frac{a'_{23}}{(a'_{21})^2} u_1(t) \\ 0 \end{bmatrix}; \quad (41)$$

$$\psi_{a'_{31}}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{x_4(t) - a'_{33} u_2(t)}{(a'_{31})^2} \end{bmatrix}; \quad (42)$$

$$\psi_{a'_{23}}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{a'_{21}} u_1(t) \\ 0 \end{bmatrix}; \psi_{a'_{33}}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{a'_{31}} u_2(t) \end{bmatrix}; \quad (43)$$

$$\psi_{x_{10}}(t) = \begin{bmatrix} k_{d1} \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (44)$$

Согласно критерию полной сигнальной диагностируемости [7] функции чувствительности должны быть линейно независимы во всех попар-

ных сочетаниях. Парные сочетания следующих функций $\psi_{a'_{21}}$ и $\psi_{a'_{23}}$, а также $\psi_{a'_{31}}$ и $\psi_{a'_{33}}$ будут линейно независимы только в переходных режимах. Таким образом, объект автоматического управления будет полностью сигнально диагностируем в переходных режимах.

6. Математические модели объекта автоматического управления

Построение моделей идеальных или материальных, как отмечали А. Розенблют и Н. Винер [8], «по необходимости занимает центральное место в процедуре любого научного исследования». Это обстоятельство обусловлено тем, что модели выступают в качестве необходимого промежуточного звена между совокупностью утверждений теорий и действительностью, которая приближенно отражается в соответствующих моделях [9].

Для того, чтобы представленные математические уравнения, отражающие преобразовательные свойства коромысла с винтовыми электроприводами, стали инструментальными средствами для задач анализа и синтеза, т.е. математическими моделями [4], необходимо сформировать ряд следующих условий:

- 1) точность линеаризации, выраженную количественно;
 - 2) функциональные характеристики невозмущенного движения;
 - 3) диапазон и характер изменения входных воздействий;
 - 4) диапазон и характер реакций на входные воздействия;
 - 5) математические линейные уравнения возмущенного движения, связывающие отклонения входных и выходных переменных объекта;
 - 6) численные значения коэффициентов уравнений с требуемой точностью;
 - 7) диапазон и масштаб изменения времени моделирования. И так, конкретно, точность аналитической линеаризации определяется наибольшей величиной отброшенных членов разложения более высокого порядка малости.
- Характеристики невозмущенного движения включают следующие параметры: угловое положение коромысла $\gamma(t_0) = 0$; угловую скорость $\dot{\gamma}(t_0) = 0$; угловые скорости электроприводов $\dot{\phi}_1(t_0) = \dot{\phi}_{10}$; $\dot{\phi}_2(t_0) = \dot{\phi}_{20}$; токи в обмотках управления электроприводов $\dot{q}_1(t_0) = i_1(t_0) = i_{10}$; $\dot{q}_2(t_0) = i_2(t_0) = i_{20}$.

Диапазоны изменения входных воздействий

управляющих: Δu_1 и Δu_2 , а также возмущающего Δu_1 вычисляются по результатам линеаризации. Характер процессов – колебательный в инфранизком диапазоне частот.

Диапазон изменения реакций на входные воздействия определяется в результате прикладных расчетов. Характер изменений – колебательный в инфранизком диапазоне частот.

Математические линейные уравнения – это уравнения, описывающие преобразовательные процессы в объекте автоматического управления во временной (11) – (14) и в частотной (17) – (22) областях.

Численные значения коэффициентов уравнений определяются в результате расчетов по результатам измерений, с использованием паспортных данных электроприводов, винтов, датчиков или по результатам обработки экспериментальных данных с точностью не ниже точности линеаризации.

Масштаб времени в моделях $m_t = 1$ и время моделирования определяется возможным временем функционирования экспериментальной установки. С учетом этих условий получают математические модели объекта автоматического управления во временной и частотной областях.

Заключение

В результате проведенных исследований удалось сформировать для экспериментальной установки исследования углового движения коромысла с винтовыми электроприводами нелинейные и линейные математические модели, отражающие процессы углового движения, как во временной, так и в частотной областях. Полученные математические модели представляют собой основу для анализа и изучения функциональных процессов конкретных устройств с винтовыми электроприводами в среде Simulink. Отработанные в результате компьютерного моделирования машинные модели позволят перейти к синтезу алгоритмов управления как во временной [6], так и в частотной [10] областях, а затем к синтезу цифровых алгоритмов управления положением коромысла в экспериментальной установке.

Полученные результаты могут использоваться как в учебном процессе: в курсовом и дипломном проектировании, так и на этапах эскизного проектирования систем автоматического управления динамически подобными моделями конвертопланов.

Литература

1. Чегин, А. А. Аппараты вертикального взлета и посадки. Начало пути [Электронный ресурс] / А. А. Чегин, Н. Н. Околелов. – Режим доступа:

<https://naukatehnika.com/apparatyi-vertikalnogo-vzleta-i-posadki.html>. – 19.03.2020.

2. Ружицкий, Е. И. *Европейские самолеты вертикального взлета [Текст] / Е. И. Ружицкий*. – М. : АСТ «Астрель», 2000. – 256 с.

3. Ружицкий, Е. И. *Американские самолеты вертикального взлета [Текст] / Е. И. Ружицкий*. – М. : АСТ «Астрель», 2000. – 130 с.

4. Кулик, А. С. *Методы моделирования объектов автоматического управления [Текст] : учеб. пособие / А. С. Кулик, С. Н. Пасичник*. – Харьков : Нац. аэрокосм. ун-т им. Н. Е. Жуковского «ХАИ», 2018. – 168 с.

5. Симонов, В. Ф. *Метод пространства состояний в теории непрерывных линейных систем [Текст] : учеб. пособие / В. Ф. Симонов*. – Харьков : Харьк. авиац. ин-т, 1983. – 122 с.

6. Dorf, R., Bishop, R. *Современные системы управления [Текст] / Р. Dorf, Б. Бишоп*. – М. : Лаборатория базовых знаний, 2002. – 832 с.

7. Kulik, A. S. *Rational Control of the Operability of Autonomous Aircrafts. Part I [Text] / A. S. Kulik // Journal of Automation and Information Sciences*. – 2017. – Vol. 49 (5). – P. 1–15.

8. Rosenblueth, A. *The Rode of Models in Science [Текст] / A. Rosenblueth, Н. Wiener // Philosophy of Science*. – 1945. – Vol. 12, № 4. – P. 316–321.

9. Штоф, В. А. *Проблемы методологии научного познания [Текст] / В. А. Штоф*. – М. : Высш. шк., 1978. – 296 с.

10. *Методы синтеза систем автоматической стабилизации и позиционирования [Текст] : учеб. пособие / А. Е. Басова, А. С. Кулик, С. Н. Пасичник, Н. Н. Харина*. – Харьков : Нац. аэрокосм. ун-т им. Н. Е. Жуковского «ХАИ», 2019. – 192 с.

References

1. Chegin, A. A., Okolelov, N. N. *Apparaty vertikal'nogo vzleta i posadki. Nachalo puti* [Devices of

vertical take-off and landing. The beginning of the way]. Available at: <https://naukatehnika.com/apparatyi-vertikalnogo-vzleta-i-posadki.html> (accessed 19.03.2020).

2. Ruzhitskii, E. I. *Evropeiskie samolety vertikal'nogo vzleta* [European vertical take-off aircraft]. Moscow, AST «Astrel» Publ., 2000. 256 p.

3. Ruzhitskii, E. I. *Amerikanskie samolety vertikal'nogo vzleta* [American vertical take-off aircraft]. Moscow, AST «Astrel» Publ., 2000. 130 p.

4. Kulik, A. S., Pasichnik, S. N. *Metody modelirovaniya ob"ektov avtomaticheskogo upravleniya* [Methods for modeling objects of automatic control]. Kharkov, Nat. aerokosm. univ. im. N. Ye. Zhukovskogo «KhAI» Publ., 2018. 168 p.

5. Simonov, V. F. *Metod prostranstva sostoyanii v teorii nepreryvnykh lineinykh system* [The state space method in the theory of continuous linear systems]. Kharkov, Khar'k. aviats. in-t Publ., 1983. 122 p.

6. Dorf, R., Bishop, R. *Modern control systems. 1st ed*, 2002. 832 p. (Russ. ed.: Dorf R., Bishop R. *Sovremennye sistemy upravleniya*. Moscow, Laboratoriya bazovykh znanii Publ., 2002. 832 p.).

7. Kulik, A. S. *Rational Control of the Operability of Autonomous Aircrafts. Part I. Journal of Automation and Information Sciences*. 2017, vol. 49 (5), pp. 1-15.

8. Rosenblueth, A., Wiener, H. *The Rode of Models in Science. Philosophy of Science*, 1945, vol. 12, no. 4, pp. 316-321.

9. Shtof, V. A. *Problemy metodologii nauchnogo poznaniya* [Problems of the methodology of scientific knowledge]. Moscow, Vyssh. shk. Publ., 1978. 296 p.

10. Basova, A. E., Kulik, A. S., Pasichnik, S. N., Kharina, N. N. *Metody sinteza sistem avtomaticheskoi stabilizatsii i pozitsionirovaniya* [Synthesis methods for automatic stabilization and positioning systems]. Kharkov, Nats. aerokosm. un-t im. N. E. Zhukovskogo «KhAI» Publ., 2019. 192 p.

Поступила в редакцію 12.05.2020, рассмотрена на редколлегии 15.06.2020

УПРАВЛІНСЬКІ МОДЕЛІ КУТОВОГО РУХУ КОРОМИСЛА З ГВИНТОВИМИ ЕЛЕКТРОПРИВОДАМИ

А. С. Кулік, Є. В. Філіппович, К. Ю. Дергачов, С. М. Пасічник, Ю. О. Немшилов

Предметом вивчення в статті є процес формування моделей кутового руху коромисла з гвинтовими електроприводами. **Метою** є розробка підходу до формування найпростіших моделей кутового руху коромисла з гвинтовими електроприводами як об'єкту автоматичного управління. **Завдання:** сформувати фізичну модель коромисла з гвинтовими електроприводами. Розробити за допомогою лагранжевого формалізму нелінійний математичний опис процесу кутового руху коромисла з гвинтовими електроприводами. Отримати лінеаризований математичний опис об'єкту автоматичного управління в просторі станів у разі використання одного датчика (кутового положення) і двох датчиків (кутового положення й кутової швидкості коромисла). Отримати опис об'єкту автоматичного управління в частотній області за допомогою перетворень Лапласа. Сформувати графічні моделі об'єкту автоматичного управління за допомогою структурних схем у часовій та частотній областях. Проаналізувати функціональні властивості об'єкту автоматичного управління: стійкість, керованість, спостережуваність, структурну та сигнальну діагностованість у разі використання одного датчика (кутового положення) і двох датчиків (кутового положення та кутової швидкості коромисла). Сформувати умови використання математичних описів як математичних моделей об'єкту автоматичного управління. Використовуваними **методами** є: метод Лагранжа, аналітичної лінеаризації, простору станів, перетворення Лапласа, критерії Ляпунова, Калмана, діагностування. Отримані наступні **результати:** сформовано підхід щодо отримання найпростіших моделей кутового руху коромисла з гвинтовими електроприводами як об'єкту автоматичного уп-

равління для вирішення конкретних завдань аналізу й синтезу. **Висновки.** Наукова новизна полягає у формуванні підходу щодо отримання найпростіших управлінських моделей кутового руху коромисла з гвинтовими електроприводами, що відрізняється від відомих повнотою обліку діючих сил і моментів.

Ключові слова: коромисло; гвинтовий електропривод; об'єкт автоматичного управління; керованість; спостережуваність; діагностуємість; математичні моделі; простір станів.

UNSTABLE STATES STABILIZATION OF THE REVERSE PENDULUM WITH SCREW ACTUATORS

A. Kulik, Ye. Filippovich, K. Dergachov, S. Pasichnik, Yu. Nemshilov

The **subject** of study in the article is the forming models' process for the angular motion of the rocker with screw electric actuators. The **purpose** is to develop the approach to the simplest models formation for the angular motion of the rocker with screw electric actuators as the automatic control object. **Tasks:** to form the physical model of rocker with screw electric actuators. Using the Lagrangian formalism develop the non-linear mathematical description of the angular motion process of a rocker with screw electric actuators. To obtain the linearized mathematical description of the automatic control object in form of state space in the cases when one sensor (angular position) and two sensors (angular position and angular velocity of the rocker) are used. To obtain the description of the automatic control object in the frequency domain using Laplace transforms. To form graphic models of the automatic control object using structural diagrams in the time and frequency domains. To analyze the functional properties of the automatic control object: stability, controllability, observability, structural and signal diagnosability in the cases when one sensor (angular position) and two sensors (angular position and angular velocity of the rocker) are used. To formulate the conditions for using mathematical descriptions as mathematical models of the automatic control object. The **methods** used are the Lagrange method, analytical linearization, state space, Laplace transform, Lyapunov, Kalman criteria, diagnosability. The following **results** were obtained: the approach to the formation of the simplest models for the angular motion of a rocker with screw electric actuators as an object of automatic control for solving specific problems of analysis and synthesis was formed. **Conclusions.** The scientific novelty lies in the formation of the approach to the formation of the simplest control models for the angular motion of the rocker with screw electric actuators which differs from the known completeness of accounting for the acting forces and moments.

Keywords: rocker; screw electric actuator; automatic control object; controllability; observability; diagnosability; mathematical models; state space.

Кулик Анатолій Степанович – д-р техн. наук, проф., проф. каф. «Системи управління летательных аппаратов», Национальный аэрокосмический университет им. Н. Е. Жуковского «Харьковский авиационный институт», Харьков, Украина.

Филиппович Евгений Валерьевич – зав. лабораториями каф. «Системи управління летательных аппаратов», Национальный аэрокосмический университет им. Н. Е. Жуковского «Харьковский авиационный институт», Харьков, Украина.

Дергачев Константин Юрьевич – канд. техн. наук, доцент, зав. каф. «Системи управління летательных аппаратов», Национальный аэрокосмический университет им. Н. Е. Жуковского «Харьковский авиационный институт», Харьков, Украина.

Пасичник Сергей Николаевич – канд. техн. наук, доцент каф. «Системи управління летательных аппаратов», Национальный аэрокосмический университет им. Н. Е. Жуковского «Харьковский авиационный институт», Харьков, Украина.

Немшилов Юрий Александрович – канд. техн. наук, доцент, доцент каф. «Системи управління летательных аппаратов», Национальный аэрокосмический университет им. Н. Е. Жуковского «Харьковский авиационный институт», Харьков, Украина.

Anatoliy Kulik – Doctor of Technical Science, Professor of the Department «Fly Vehicle's Control Systems», National Aerospace University «Kharkiv Aviation Institute», Kharkiv, Ukraine, e-mail: anatolyKulik@gmail.com, ORCID Author ID: 0000-0001-8253-8784.

Yevgeniy Filippovich – Head of laboratory of the Department «Fly Vehicle's Control Systems», National Aerospace University «Kharkiv Aviation Institute», Kharkiv, Ukraine, e-mail: efilippovic96@gmail.com, ORCID Author ID: 0000-0002-2143-492X.

Konstantin Dergachov – Candidate of Technical Science, Associate Professor, Head of the Department «Fly Vehicle's Control Systems», National Aerospace University «Kharkiv Aviation Institute», Kharkiv, Ukraine, e-mail: k.dergachov@khai.edu. ORCID Author ID: 0000-0002-6939-3100.

Sergey Pasichnik – Candidate of Technical Science, Associate Professor of the Department «Fly Vehicle's Control Systems», National Aerospace University «Kharkiv Aviation Institute», Kharkiv, Ukraine, e-mail: snpasichnik@gmail.com, ORCID Author ID: 0000-0001-7016-8835.

Yuriy Nemshilov – Candidate of Technical Science, Associate Professor of the Department «Fly Vehicle's Control Systems», National Aerospace University «Kharkiv Aviation Institute», Kharkiv, Ukraine, e-mail: gnemsh59@gmail.com, ORCID Author ID: 0000-0001-6610-461X.