

УДК 539.3:624.073

doi: 10.32620/akt.2021.2.02

К. П. БАРАХОВ

*Національний аерокосмічний університет ім. М. Є. Жуковського
«Харківський авіаційний інститут», Харків, Україна*

УЗАГАЛЬНЕННЯ МОДЕЛІ ГОЛАНДА І РЕЙССНЕРА НА ВИПАДОК ОСЬОВОЇ СИМЕТРІЇ

Метою даної роботи є створення математичної моделі напруженого стану кругових вісесиметричних клейових з'єднань внапуск, і побудова відповідного аналітичного розв'язку задачі. Для розв'язання задачі запропонована спрощена модель клейового з'єднання двох пластин внапуск. Спрощення полягає в тому, що переміщення шарів залежать тільки від радіальної координати і не залежать від кутової. Модель є узагальненням класичної моделі з'єднання Голанда і Рейсснера на випадок осьової симетрії. Напруження вважаються рівномірно розподіленими по товщині шарів, а клейовий шар працює тільки на зсув. Дані спрощення дозволили отримати аналітичний розв'язок досліджуваної задачі. Розв'язана задача про напружений стан клейового з'єднання двох пластин, одна з яких ослаблена круглим отвором, а друга є круглою накладкою, концентричною з отвором. До пластини ослабленою круглим отвором прикладене навантаження. Область що розглядається розділена на три частини: область склеювання, а також області всередині і поза областю склеювання. В області склеювання задача зведена до диференціальних рівнянь третього і четвертого порядку відносно дотичних і нормальних напружень відповідно, розв'язки яких будуються у вигляді лінійних комбінацій функцій Бесселя першого і другого родів, а також модифікованих функцій Бесселя першого і другого родів. Використовуючи знайдені дотичні і нормальні напруження, отримані лінійні неоднорідні диференціальні рівняння Ейлера щодо поздовжніх і поперечних переміщень. Розв'язок отриманих рівнянь також будується з використанням функцій Бесселя. Поза областю склеювання переміщення описуються рівняннями вигину круглих пластин при відсутності перерізуючих сил. Крайові умови задовольняються точно. Задоволення крайових умов, а також умов сполучення призводить до системи лінійних рівнянь відносно невідомих коефіцієнтів отриманих розв'язків. Розв'язано модельну задачу і проведено порівняння чисельних результатів з результатами розрахунків, виконаних за допомогою методу скінченних елементів. Показано, що запропонована модель має достатню для інженерних задач точність і може бути використана для вирішення задач проектування конструкцій аерокосмічної техніки.

Ключові слова: *клейове з'єднання; вісесиметрична модель; аналітичний розв'язок; кругла пластина.*

1. Аналіз проблеми і постановка мети дослідження

Тонкостінні конструкції аерокосмічної техніки можуть містити дефекти у вигляді отворів і тріщин, які є дефектами матеріалу, з якого виготовлена конструкція, або з'являються в процесі експлуатації в результаті, наприклад, механічних пошкоджень. Найявність отворів в пластині викликає концентрацію напружень на границі отворів і призводить, у кінцевому підсумку, до передчасного виходу елемента конструкції з ладу. Для підкріплення отворів часто застосовуються так звані ремонтні накладки. З'єднання накладки з основною пластиною може реалізовуватися по всій поверхні накладки (клейові з'єднання внапуск), по лініям (зварні шви) або у системі точок (заклепкові з'єднання). Дослідження напруженого стану пластини з отворами або тріщинами різної форми, є класичною задачею механіки і має велику історію

[1 - 3]. Отвори можуть бути підкріплені внутрішніми пружними вставками [4], або накладками [5 - 8], які можуть бути з'єднані з основною пластиною заклепками [9]. Для зменшення концентрації напружень отворам любой форми в процесі ремонтних робіт, як правило, надають форму круга. Тому великий інтерес представляє дослідження напруженого стану підкріплених круглих отворів. Відомі аналітичні розв'язки задачі про накладку і напружений стан з'єднання внапуск, як правило, припускають прямокутну форму накладки і основної пластини та рівномірний розподіл напружень за шириною конструкції [10, 11]. Існує декілька різних наближених двовимірних моделей і відповідних методів розв'язання задач зі знаходження напруженого стану клейового з'єднання [12 - 14] та їх розвиток на задачі із дефектами у клейовому шарі [15]. Однак вказані підходи не дозволяють отримати аналітичний розв'язок задачі про пластину

з круглим отвором і круглою накладкою. В даному випадку доцільним буде застосування полярної (циліндричної) системи координат. При цьому, якщо залежність напружень від кутової координати відсутня, задача зводиться до одновимірної. У роботі [16] розглянуто аналітичний розв'язок задачі про пластину з круглим отвором і круглою накладкою але без врахування вигину шарів.

Ціллю даної роботи є побудова аналітичного розв'язку і дослідження напруженого стану клейового з'єднання внапуск круглої пластини з круговим отвором з коаксальною круглою накладкою при рівномірному розтягуванні. Дана задача розв'язується вперше.

2. Постановка задачі

Розглянемо клейове з'єднання двох круглих пластин однакової товщини (рис. 1). Основна пластина навантажена симетричним двоосним розтягуванням. Радіус отвору в основній пластині дорівнює R_1 , радіус накладки – R_2 ($R_2 > R_1$). Розглянемо випадок, коли обидві пластини (основна і накладка) мають однакову товщину δ і вироблені з однакового ізотропного матеріалу. Між пластинами знаходиться з'єднувальний (клейовий) шар, товщина якого δ_0 .

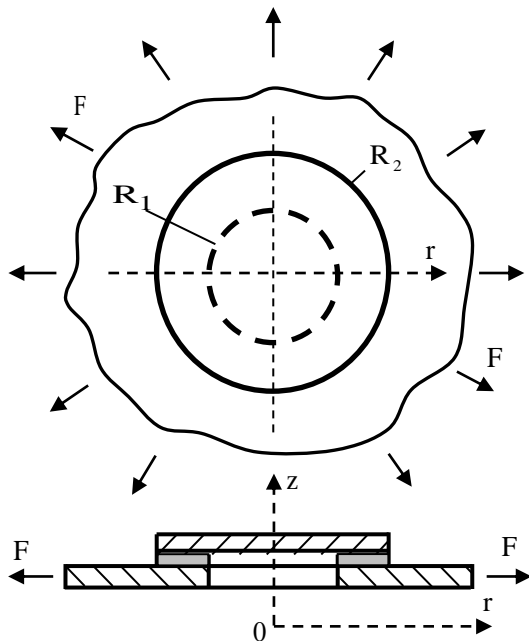


Рис. 1. Схема клейового з'єднання пластини з накладкою

Завдяки осьовій симетрії тангенціальні зусилля в пластинах Q_1 і Q_2 не залежать від кутової координати, дотичні зусилля відсутні. Нижній індекс «1» відповідає основній пластині в межах

області склейки, а індекс «2» – накладці в межах області склейки $x \in [R_1; R_2]$.

На рис. 2 показані зусилля, напруження і розподілені згинальні моменти, які діють на диференціальний елемент основної пластини в області склеювання.

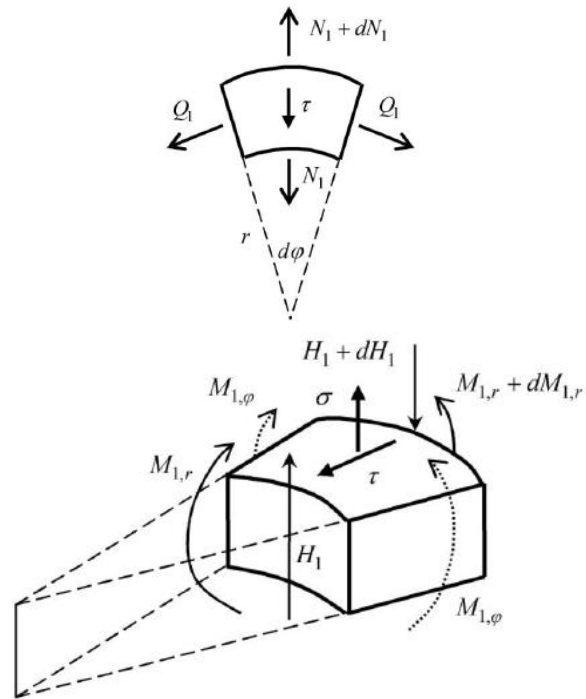


Рис. 2. Рівновага диференціальних елементів з'єднання

Рівняння рівноваги сил, які діють на елементи пластин в межах в області склеювання в напрямку радіальної вісі мають вигляд

$$\frac{N_1 - Q_1}{r} + \frac{dN_1}{dr} - \tau = 0, \frac{N_2 - Q_2}{r} + \frac{dN_2}{dr} + \tau = 0, \quad (1)$$

де N_k , Q_k – відповідно радіальні і тангенціальні нормальні зусилля в пластині k , $k = 1, 2$;

τ – дотичні напруження в клейовому шарі в радіальному напрямку.

Рівняння рівноваги моментів мають вигляд:

$$\frac{M_{1,r} - M_{1,\phi}}{r} + \frac{dM_{1,r}}{dr} - H_1 + \tau \frac{\delta}{2} = 0, \frac{M_{2,r} - M_{2,\phi}}{r} + \frac{dM_{2,r}}{dr} - H_2 + \tau \frac{\delta}{2} = 0. \quad (2)$$

де $M_{k,r}$ і $M_{k,\phi}$ - розподілені згинальні моменти в шарі k ;

H_k - перерізує зусилля в пластині k .

Рівняння рівноваги диференціальних елементів в напрямку вісі z мають вигляд:

$$-\sigma + \frac{H_1}{r} + \frac{dH_1}{dr} = 0, \quad \sigma + \frac{H_2}{r} + \frac{dH_2}{dr} = 0, \quad (3)$$

де σ - нормальні (відривні) напруження в клейовому шарі.

Напруження в клейовому шарі вважаємо пропорційними різності переміщень обернених до клейового шару сторін обох пластин [10, 11].

$$\tau = P_\tau \left(u_1 - u_2 - \frac{\delta}{2} \frac{dw_2}{dr} - \frac{\delta}{2} \frac{dw_1}{dr} \right),$$

$$\sigma = P_\sigma (w_2 - w_1), \quad (4)$$

де P_τ і P_σ - жорсткості клейового шару на зсув та на відрив, які обчислюються за формулами $P_\tau = \frac{G_0}{\delta_0}$

$P_\sigma = \frac{E_0}{\delta_0}$, де відповідно E_0 і G_0 - модуль пружності і модуль зсуву клею;

w_k - переміщення пластин у напрямку вісі z ;

u_k - поздовжні (радіальні) переміщення пластин, $k = 1, 2$.

Рівняння фізичного закону для пластин мають вигляд:

$$N_k = B(\varepsilon_{k,r} + \mu\varepsilon_{k,\varphi}), \quad Q_k = B(\varepsilon_{k,\varphi} + \mu\varepsilon_{k,r}), \quad (5)$$

де $B = \frac{\delta E}{1 - \mu^2}$ - мембранна жорсткість пластин;

μ - коефіцієнт Пуассона матеріалу пластин;

E - модуль пружності матеріалу пластин;

$\varepsilon_{k,r}$ і $\varepsilon_{k,\varphi}$ - деформація пластини k у радіальному та тангенціальному напрямку.

Кінематичні співвідношення теорії пружності мають вигляд:

$$\varepsilon_{k,r} = \frac{du_k}{dr}, \quad \varepsilon_{k,\varphi} = \frac{u_k}{r}. \quad (6)$$

Рівняння вигину круглих пластин мають вигляд:

$$M_{k,r} = D \left(\frac{d^2 w_k}{dr^2} + \frac{\mu}{r} \frac{dw_k}{dr} \right),$$

$$M_{k,\varphi} = D \left(\mu \frac{d^2 w_k}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dw_k}{dr} \right), \quad (7)$$

де $D = \frac{E\delta^3}{12(1-\mu^2)}$ - жорсткість пластин на вигін.

3. Побудова розв'язку в області склеювання

Систему рівнянь (1) – (7) зведено до двох рівнянь відносно напружень в клейовому шарі:

$$\frac{d^3 \tau}{dr^3} + \frac{2}{r} \frac{d^2 \tau}{dr^2} - \left(\frac{2P_\tau}{B} + \frac{P_\tau \delta^2}{2D} + \frac{1}{r^2} \right) \frac{d\tau}{dr} + \left(\frac{1}{r^3} - \frac{P_\tau}{r} \left(\frac{2}{B} + \frac{\delta^2}{2D} \right) \right) \tau = 0. \quad (8)$$

$$\frac{d^4 \sigma}{dr^4} + \frac{2}{r} \frac{d^3 \sigma}{dr^3} - \frac{1}{r^2} \frac{d^2 \sigma}{dr^2} + \frac{1}{r^3} \frac{d\sigma}{dr} + \frac{2P_\sigma}{D} \sigma = 0. \quad (9)$$

Аналітичні розв'язки цих рівнянь мають вигляд:

$$\tau = \frac{C_1}{r} + C_2 I_1(\beta r) + C_3 K_1(\beta r). \quad (10)$$

$$\sigma = S_1 J_0(\lambda r) + S_2 Y_0(\lambda r) + S_3 I_0(\lambda r) + S_4 K_0(\lambda r). \quad (11)$$

$$\text{де } \beta = \sqrt{\frac{P_\tau (\delta^2 B + 4D)}{2BD}};$$

$$\lambda = 4 \sqrt{\frac{2P_\sigma}{D}};$$

I_0, I_1 , - модифіковані функції Бесселя;

K_0, K_1 , - функції Макдональда;

J_0, Y_0 - функції Бесселя і Неймана відповідно;

C_1, C_2, C_3 і S_1, \dots, S_4 - довільні константи.

Можна відмітити, що в задачі про напружений стан клейового з'єднання пластин прямокутної форми напруження в клеї описуються лінійною комбінацією експоненціальних функцій, які мають комплексні аргументи [9, 11]. В вісесиметричній задачі аналогом цих функцій є циліндричні функції.

Із рівнянь (1), з використанням (5) та (6), отримаємо рівняння:

$$\frac{d^2 u_k}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du_k}{dr} - \frac{u_k}{r^2} + (-1)^k \frac{\tau}{B} = 0, \quad k = 1, 2. \quad (12)$$

Підставивши в (5) дотичні напруження (3) і розв'язавши отримані неоднорідні диференційні рівняння Ейлера, отримаємо

$$\begin{aligned} u_1(r) &= \sum_{i=1}^3 g_i(r) C_i + C_4 r + \frac{C_5}{r}, \\ u_2(r) &= -\sum_{i=1}^3 g_i(r) C_i + C_6 r + \frac{C_7}{r}, \end{aligned} \quad (13)$$

де

$$\begin{aligned} g_1(r) &= \frac{r(2 \ln r - 1)}{4B}; \quad g_2(r) = \frac{I_1(\beta r)}{\beta^2 B}; \\ g_3(r) &= \frac{K_1(\beta r)}{\beta^2 B}. \end{aligned}$$

Підставивши (11) та (13) в рівняння (4), та розв'язавши отриману систему знайдемо поперечні переміщення пластин в області склеювання:

$$\begin{aligned} w_1 &= \sum_{i=1}^3 C_i f_i(r) + \frac{r^2}{2\delta} (C_4 - C_6) + \frac{\ln r}{\delta} (C_5 - C_7) + C_8 - \\ &\quad - \frac{S_1 J_0(\lambda r) + S_2 Y_0(\lambda r) + S_3 I_0(\lambda r) + S_4 K_0(\lambda r)}{2P_\sigma}; \\ w_2 &= \sum_{i=1}^3 C_i f_i(r) + \frac{r^2}{2\delta} (C_4 - C_6) + \frac{\ln r}{\delta} (C_5 - C_7) + C_8 + \\ &\quad + \frac{S_1 J_0(\lambda r) + S_2 Y_0(\lambda r) + S_3 I_0(\lambda r) + S_4 K_0(\lambda r)}{2P_\sigma}, \end{aligned} \quad (14)$$

де

$$\begin{aligned} f_1(r) &= \frac{P_\tau r^2 (\ln r - 1) - 2B \ln r}{2P_\tau \delta B}; \\ f_2(r) &= \frac{(2P_\tau - \beta^2 B)}{P_\tau B \delta \beta^3} I_0(\beta r); \\ f_3(r) &= \frac{(\beta^2 B - 2P_\tau)}{P_\tau B \delta \beta^3} K_0(\beta r). \end{aligned}$$

Знаючи радіальні (13) і поперечні (14) переміщення пластин, та напруження в клейовому шарі (10) и (11), знаходимо радіальні і тангенціальні зусилля в пластинах із співвідношень (5) та (1).

$$\begin{aligned} N_1(r) &= \sum_{i=1}^5 C_i h_i(r), \\ N_2(r) &= -\sum_{i=1}^3 C_i h_i(r) + C_6 h_4(r) + C_7 h_5(r), \end{aligned} \quad (15)$$

$$Q_1(r) = \sum_{i=1}^3 C_i \tilde{h}_i(r) + C_4 h_4(r) - C_5 h_5(r),$$

$$Q_2(r) = -\sum_{i=1}^3 C_i \tilde{h}_i(r) + C_6 h_4(r) - C_7 h_5(r), \quad (16)$$

де

$$\begin{aligned} h_1(r) &= \frac{2(1+\mu) \ln r + (1-\mu)}{4}, \\ h_2(r) &= \frac{I_0(\beta r) \beta r - (1-\mu) I_1(\beta r)}{\beta^2 r}, \\ h_3(r) &= -\frac{K_0(\beta r) \beta r + (1-\mu) K_1(\beta r)}{\beta^2 r}, \\ h_4(r) &= B(1+\mu), \quad h_5(r) = -\frac{B(1-\mu)}{r^2}. \\ \tilde{h}_1(r) &= \frac{2(1+\mu) \ln r - (1-\mu)}{4}, \\ \tilde{h}_2(r) &= \frac{(1-\mu) I_1(\beta r) + \mu \beta r I_0(\beta r)}{\beta^2 r}, \\ \tilde{h}_3(r) &= \frac{(1-\mu) K_1(\beta r) - \mu \beta r K_0(\beta r)}{\beta^2 r}. \end{aligned}$$

Аналогічно, із співвідношень (7) та (2) можна знайти погонні згинальні моменти.

4. Побудова розв'язку за межами області склеювання

Переміщення у внутрішній області ($r < R_1$) та у зовнішній області ($r > R_2$), тобто за межами області склеювання, описуються рівняннями вигину круглих пластин за відсутності перерізуючих сил

$$\frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du}{dr} - \frac{u}{r^2} = 0, \quad \frac{d^3 w}{dr^3} + \frac{1}{r} \frac{d^2 w}{dr^2} - \frac{1}{r^2} \frac{dw}{dr} = 0.$$

Позначимо радіальні і поперечні переміщення накладки у внутрішній частині з'єднання (над отвором) u_3 і w_3 , а переміщення основної пластини за межами області склеювання u_4 і w_4 . Наведені вище рівняння мають загальні розв'язки:

$$\begin{aligned} u_3 &= c_1 r + \frac{c_2}{r}, \quad u_4 = c_3 r + \frac{c_4}{r}, \\ w_3 &= s_1 + s_2 \ln r + s_3 r^2, \quad w_4 = s_4 + s_5 \ln r + s_6 r^2. \end{aligned}$$

Згинальні моменти, радіальні і тангенціальні зусилля знаходимо за (7) і (5). Перерізуючи зусилля в пластинках знаходимо за наступною формулою

$$H_m = D \frac{d}{dr} \left(\frac{d^2 w_m}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dw_m}{dr} \right),$$

де $m = 3, 4$.

5. Задоволення крайових умов

Константи C_1, C_2, \dots, C_8 , S_1, \dots, S_4 і c_1, \dots, c_4 с s_1, \dots, s_6 можна знайти із крайових умов, а також умов спряження переміщень і зусиль на границях областей.

Положимо, що основна пластина має зовнішній радіус R_3 . Нехай крайові умови на зовнішній границі основної пластини мають вигляд:

$$N_4(R_3) = F; \quad w_4(R_3) = 0; \quad \left. \frac{dw_4}{dr} \right|_{r=R_3} = 0.$$

Умови на зовнішній границі області склеювання і основної пластини:

$$\begin{aligned} u_1(R_2) - u_4(R_2) &= 0; \quad w_1(R_2) - w_4(R_2) = 0; \\ \left. \frac{dw_1}{dr} \right|_{r=R_2} - \left. \frac{dw_4}{dr} \right|_{r=R_2} &= 0; \\ M_{1,r}(R_2) - M_{4,r}(R_2) &= 0; \quad N_1(R_2) - N_4(R_2) = 0; \\ H_2(R_2) &= 0; \quad M_{2,r}(R_2) = 0; \quad N_2(R_2) = 0. \end{aligned}$$

Умови на внутрішній границі області склеювання і на отворі:

$$\begin{aligned} u_2(R_1) - u_3(R_1) &= 0; \quad w_2(R_1) - w_3(R_1) = 0; \\ \left. \frac{dw_2}{dr} \right|_{r=R_1} - \left. \frac{dw_3}{dr} \right|_{r=R_1} &= 0; \\ M_{2,r}(R_1) - M_{3,r}(R_1) &= 0; \quad N_2(R_1) - N_3(R_1) = 0; \\ H_2(R_1) &= 0; \quad H_1(R_1) = 0; \\ M_{1,r}(R_1) &= 0; \quad N_1(R_1) = 0. \end{aligned}$$

Ще дві константи знаходимо із умов рівності нулю радіальних переміщень накладки і скінченої величини її поперечних переміщень при $r = 0$:

$$c_2 = 0, \quad s_2 = 0.$$

Таким чином, отримуємо систему із двадцяти лінійних рівнянь відносно двадцяти невідомих констант.

6. Модельна задача

При дослідженні напруженого стану з'єднання бажано мінімізувати вплив на напружений стан клейового шару умов на зовнішній границі основної пластини. Тому положимо, що основна пластина має вельми великий радіус R_3 .

Параметри задачі: $R_1 = 40 \text{ мм}$, $R_2 = 60 \text{ мм}$, $R_3 = 5R_2$, $\delta = 3 \text{ мм}$, $\delta_0 = 0,1 \text{ мм}$, $E = 70 \text{ ГПа}$ (алюмінієвий сплав), $\mu = 0,28$, $E_0 = 0,8 \text{ ГПа}$, $G_0 = 0,3125 \text{ ГПа}$. Радіальне розтяжне зусилля F прикладене вздовж периметру основної пластинки.

На рис. 3 показано графіки дотичних τ (лінія 1) і відривних σ (лінія 2) напружень у клейовому шарі (4), які розраховано за запропонованою моделлю. Напруження показано у безрозмірній формі.

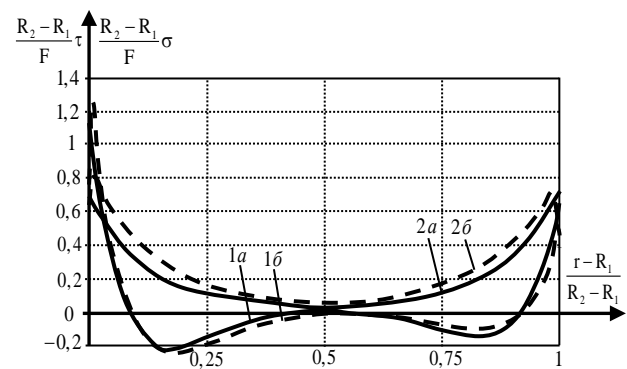


Рис. 3. Нормальні σ (1) і дотичні τ (2) напруження у клейовому шарі

На рис. 3 показані графіки нормальних (1) і дотичних (2) напружень в клейовому шарі, розраховані за запропонованою моделлю (а), і за допомогою методу скінчених елементів (б). Напруження на наведених графіках показані у безрозмірній формі.

Із рисунка видно, що дотичні і нормальні напруження в клеї, що розраховані за запропонованою моделлю максимальні на границі області склеювання. Ця особливість напруженого стану клейових з'єднань стрижнів добре відома [10, 17, 18], і, як бачимо присутня також і при передачі зусиль з пластини на круглу накладку.

Висновки

Запропоновано математичну модель вісесиметричного напруженого стану конструкції, яка складається з пластини, що містить круглий виріз, та приклеєної внапуск коаксіальної круглої накладки. Задачу зведено до лінійних диференціальних рівнянь відносно дотичних і нормальних напружень в клейовому шарі, які мають аналітичні розв'язки в функціях Бесселя.

Особливістю задачі є те, що в на відміну від з'єднань стрижнів [6, 10, 17, 18], не всі зусилля с основної пластини передаються на накладку, накладка лише частково розвантажує основну пластину біля отвору. Частка навантаження, яку приймає накладка, залежить від піддатливості клею. Запропонована модель є розвитком класичної моделі напруженого стану клейового з'єднання двох стрижнів Голанда і Рейсснера [18] на вісесиметричну область склеювання.

Література

1. Савин, Г. Н. Распределение напряжений около отверстий [Текст] / Г. Н. Савин. – К. : Наукова думка, 1968. – 891 с.
2. Хома, И. Ю. Напряженное состояние нетонкой трансверсально-изотропной пластины с криволинейным отверстием [Текст] / И. Ю. Хома, О. Г. Дашко // Прикладная механика. – 2015. – Т. 51, № 4. – С. 112-124.
3. Guz, A. N. Establishing the Foundations of the Mechanics of Fracture of Materials Compressed Along Cracks (Review) [Text] / A. N. Guz // International Applied Mechanics. – 2014. – Vol. 50. – P. 1-57. DOI: 10.1007/s10778-014-0609-y.
4. Максимюк, В. А. Напряженно-деформированное состояние гибких ортотропных цилиндрических оболочек с подкрепленным круговым отверстием [Текст] / В. А. Максимюк, Е. А. Сторожук, И. С. Чернышенко // Прикладная механика. – 2015. – Т. 51, № 4. – С. 71-80.
5. Zemlyanova, A. Y. The problem of a circular patch [Text] / A. Y. Zemlyanova, V. V. Sil'vestrov // Journal of Applied Mathematics and Mechanics. – 2005. – Vol. 69, Iss. 4. – P. 611-617. DOI: 10.1016/j.japmathmech.2005.07.010.
6. Khan, M. A. Interfacial stresses in single-side composite patch-repairs with material tailored bondline [Text] / M. A. Khan, S. Kumar // Mechanics of Advanced Materials and Structures. – 2017. – Vol. 25, Iss. 4. – P. 304-318. DOI: 10.1080/15376494.2016.1255824.
7. Design, analysis and performance of adhesively bonded composite patch repair of cracked aluminum aircraft panels [Text] / A. C. Okafor, N. Singh, U. E. Enemuoh, S. V. Rao // Composite Structures. – 2005. – Vol. 71, Iss. 2. – P. 258-270. DOI: 10.1016/j.compstruct.2005.02.023.
8. Zemlyanova, A. Y. The problem of the reinforcement of a plate with a cutout by a two-

dimensional patch [Text] / A. Y. Zemlyanova, V. V. Sil'vestrov // Journal of Applied Mathematics and Mechanics. – 2007. – Vol. 71, Iss. 1. – P. 40-51.

9. Максименко, В. Н. Расчет напряженного состояния клееклепаных слоистых пластин с трещиной [Текст] / В. Н. Максименко, А. В. Тягний // Ученые записки ЦАГИ. – 1990. – № 5. – С. 92-101.

10. Kurennov, S. S. Two-Dimensional Stressed State of an Adhesive Joint. Nonclassical Problem [Text] / S. S. Kurennov, O. G. Polyakov, K. P. Barakhov // Journal of Mathematical Sciences. – 2021. – Vol. 254. – P. 156-163. DOI: 10.1007/s10958-021-05295-5.

11. Stress analysis of adhesive in a cracked steel plate repaired with CFRP [Text] / Y. Zhang, K. Zhang, H. Zhao, J. Xin, M. Duan // Journal of Constructional Steel Research. – 2018. – Vol. 145. – P. 210-217. DOI: 10.1016/j.jcsr.2018.02.029.

12. Transient hygro-thermo-mechanical stresses analysis in multi-layers bonded structure with coupled bidirectional model [Text] / R. Kessentini, O. Klinkova, I. Tawfiq, M. Haddar // International Journal of Mechanical Sciences. – 2019. – Vol. 150. – P. 188-201. DOI: 10.1016/j.ijmecsci.2018.10.004.

13. Куреннов, С. С. Напряженное состояние двухслойной прямоугольной пластинки при сдвиге. Упрощенная двумерная модель [Text] / С. С. Куреннов, К. П. Барахов // Вестник ПНИПУ. Механика. – 2019. – № 3. – С. 166-174. DOI: 10.15593/perm.mech/2019.3.16.

14. Rapp, P. Mechanics of adhesive joints as a plane problem of the theory of elasticity. Part II: Displacement formulation for orthotropic adherends [Text] / P. Rapp // Archives of Civil and Mechanical Engineering. – 2015. – Vol. 15, Iss. 2. – P. 603-619. DOI: 10.1016/j.acme.2014.06.004.

15. Kurennov, S. S. Determining Stresses in an Adhesive Joint with a Longitudinal Unadhered Region Using a Simplified Two-Dimensional Theory [Text] / S. S. Kurennov // Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. – 2019. – Vol. 60. – P. 740-747. DOI: 10.1134/s0021894419040199.

16. Barakhov, K. One-Dimensional Axisymmetric Model of the Stress State of the Adhesive Joint [Text] / K. Barakhov, D. Dvoretzkaya, O. Poliakov // Intern. Sci. and Techn. Conf., Kharkiv, Ukraine; 29-30 Oct. 2020. – P. 310-319. (Lecture Notes in Networks and Systems Vol. 188). DOI: 10.1007/978-3-030-66717-7_26

17. Grigorenko, A. Y. Stress State of a Threaded Joint in a Dental Implant-Bone System [Text] / A. Y. Grigorenko, V. V. Los', V. A. Malanchuk, N. N. Tormakhov // International Applied Mechanics. – 2020. – Vol. 56. – P. 33-39. DOI: 10.1007/s10778-020-00994-z.

18. Analytical models of adhesively bonded joints. Part I: Literature survey [Text] / L. F. M. da Silva, P. J. C. das Neves, R. D. Adams, J. K. Spelt // International Journal of Adhesion and Adhesives. – 2009. – Vol. 29, Iss. 3. – P. 319-330. DOI: 10.1016/j.ijadhadh.2008.06.005.

References

1. Savin, G. N. Raspredelenie napryazhenii okolo otverstii [Distribution of stresses around holes]. Kyiv, Naukova dumka Publ., 1968. 891 p.

2. Homa, I. Ju., Dashko, O. G. *Napryazhennoe sostoyanie netonkoi transversal'no-izotropnoi plastiny s krivolineinym otverstiem* [Stress State of Non-Thin Transversely Isotropic Plate with Curvilinear Hole]. *Prikladnaja mehanika – International Applied Mechanics*, 2015, vol. 51, iss. 4, pp. 112-124.
3. Guz, A. N. Establishing the Foundations of the Mechanics of Fracture of Materials Compressed Along Cracks (Review). *International Applied Mechanics*, 2014, vol. 50, pp. 1-57. DOI: 10.1007/s10778-014-0609-y.
4. Maksimjuk, V. A., Storozhuk, E. A., Chernyshenko, I. S. *Napryazhenno-deformirovanoe sostoyanie gibkikh ortotropnykh tsilindricheskikh obolochek s podkreplennym krugovym otverstiem* [Stress-Strain State of Flexible Orthotropic Cylindrical Shells with Stiffened Circular Hole]. *Prikladnaja mehanika – International Applied Mechanics*, 2015, vol. 51, iss. 4, pp. 71-80.
5. Zemlyanova, A. Y., Sil'vestrov, V. V. The problem of a circular patch. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 2005, vol. 69, iss. 4, pp. 611-617. DOI: 10.1016/j.jappmathmech.2005.07.010.
6. Khan, M.A., Kumar, S. Interfacial stresses in single-side composite patch-repairs with material tailored bondline. *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, 2017, vol. 25, iss. 4, pp. 304-318. DOI: 10.1080/15376494.2016.1255824.
7. Okafor, A. C., Singh, N., Enemuoh, U. E., Rao, S. V. Design, analysis and performance of adhesively bonded composite patch repair of cracked aluminum aircraft panels. *Composite Structures*, 2005, vol. 71, iss. 2, pp. 258-270. DOI: 10.1016/j.compstruct.2005.02.023.
8. Zemlyanova, A. Y., Sil'vestrov V. V. The problem of the reinforcement of a plate with a cutout by a two-dimensional patch. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 2007, vol. 71, iss. 1, pp. 40-51.
9. Maksimenko, V. N., Tjagnij, A. V. *Raschet napryazhennogo sostoyaniya kleeklepnykh sloistykh plastin s treshchinoi* [Calculation of the stress state of glued laminated plates with a crack]. *Uchenye zapiski TsAGI – TsAGI scientific notes*, 1990, no. 5, pp. 92-101.
10. Kurennov, S. S., Polyakov, A. G., Barakhov, K. P. Two-Dimensional Stressed State of an Adhesive Joint. Nonclassical Problem. *Journal of Mathematical Sciences*, 2021, vol. 254, pp. 156-163. DOI: 10.1007/s10958-021-05295-5.
11. Zhang, Y., Zhang, K., Zhao, H., Xin, J., Duan, M. Stress analysis of adhesive in a cracked steel plate repaired with CFRP. *Journal of Constructional Steel Research*, 2018, vol. 145, pp. 210-217. DOI: 10.1016/j.jcsr.2018.02.029.
12. Kessentini, R., Klinkova, O., Tawfiq, I., Haddar, M. Transient hygro-thermo-mechanical stresses analysis in multi-layers bonded structure with coupled bidirectional model. *International Journal of Mechanical Sciences*, 2019, vol. 150, pp. 188-201. DOI: 10.1016/j.ijmecsci.2018.10.004.
13. Kurennov, S. S., Barakhov, K. P. *Napryazhennoe sostoyanie dvukhsloinoi pryamougol'noi plastinki pri sdvige. Uproshchennaya dvumernaya model'* [The Stressed state of the double-layer rectangular plate under shift. The simplified two-dimensional model]. *Vestnik PNIPU. Mekhanika – PNRPU Mechanics Bulletin*, 2019, no. 3, pp. 166-174. DOI: 10.15593/perm.mech/2019.3.16
14. Rapp, P. Mechanics of adhesive joints as a plane problem of the theory of elasticity. Part II: Displacement formulation for orthotropic adherends. *Archives of Civil and Mechanical Engineering*, 2015, vol. 15, iss. 2, pp. 603-619. DOI: 10.1016/j.acme.2014.06.004.
15. Kurennov, S. S. Determining Stresses in an Adhesive Joint with a Longitudinal Unadhered Region Using a Simplified Two-Dimensional Theory. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 2019, vol. 60, pp. 740-747. DOI: 10.1134/s0021894419040199.
16. Barakhov, K., Dvoret'skaya, D., Poliakov, O. One-Dimensional Axisymmetric Model of the Stress State of the Adhesive Joint. *Intern. Sci. and Techn. Conf., Kharkiv, Ukraine; 29-30 Oct. 2020*, pp. 310-319, (*Lecture Notes in Networks and Systems Vol. 188*). DOI: 10.1007/978-3-030-66717-7_26.
17. Grigorenko, A. Y., Los', V. V., Malanchuk, V. A., Tormakhov, N. N. Stress State of a Threaded Joint in a Dental Implant-Bone System. *International Applied Mechanics*, 2020, vol. 56, pp. 33-39. DOI: 10.1007/s10778-020-00994-z.
18. da Silva, L. F. M., das Neves, P. J. C., Adams, R. D., Spelt, J. K. Analytical models of adhesively bonded joints. Part I: Literature survey. *International Journal of Adhesion and Adhesives*, 2009, vol. 29, iss. 3, pp. 319-330. DOI: 10.1016/j.ijadhadh.2008.06.005.

Надійшла до редакції 5.02.2021, розглянута на редколегії 16.04.2021

ОБОБЩЕНИЕ МОДЕЛИ ГОЛАНДА И РЕЙССНЕРА НА СЛУЧАЙ ОСЕВОЙ СИММЕТРИИ

К. П. Барахов

Целью данной работы является создание математической модели напряженного состояния круговых осесимметричных клеевых соединений внахлест, и построение соответствующего аналитического решения задачи. Для решения задачи предложена упрощенная модель клеевого соединения двух пластин внахлест. Упрощение заключается в том, что перемещения слоев зависят только от радиальной координаты и не зависят от угловой. Модель является обобщением классической модели соединения Голанда и Рейсснера на случай осевой симметрии. Напряжения считаются равномерно распределенными по толщине слоев, а клеевой слой работает только на сдвиг. Данные упрощения позволили получить аналитическое решение исследуемой задачи. Решена задача о напряженном состоянии клеевого соединения двух пластин, одна из

которых ослаблена круглым отверстием, а вторая является круглой накладкой, концентрической с отверстием. К пластине ослабленной круглым отверстием приложенная нагрузка. Рассматриваемая область разделена на три части: область склейки, а также области внутри и вне области склейки. В области склейки задача сведена к дифференциальным уравнениям третьего и четвертого порядка относительно касательных и нормальных напряжений соответственно, решения которых строятся в виде линейных комбинаций функций Бесселя первого и второго родов, а также модифицированных функций Бесселя первого и второго родов. Используя найденные касательные и нормальные напряжения, получены линейные неоднородные дифференциальные уравнения Эйлера относительно продольных и поперечных перемещений. Решение полученных уравнений также строится с использованием функций Бесселя. Вне области склейки перемещения описываются уравнениями изгиба круглых пластин при отсутствии перерезывающих сил. Краевые условия удовлетворяются точно. Удовлетворение краевых условий, а также условий сопряжения приводит к системе линейных уравнений относительно неизвестных коэффициентов полученных решений. Решена модельная задача и проведено сравнение численных результатов с результатами расчетов, выполненными с помощью метода конечных элементов. Показано, что предложенная модель имеет достаточную для инженерных задач точность и может быть использована для решения задач проектирования конструкций аэрокосмической техники.

Ключевые слова: клеевое соединение; осесимметричная модель; аналитическое решение; круглая пластина.

GENERALIZATION OF THE HOLLAND AND REISSNER MODEL IN CASE OF AXIAL SYMMETRY

K. Barakhov

The purpose of this work is to create a mathematical model of the stress state of overlapped circular axisymmetric adhesive joints and to build an appropriate analytical solution to the problem. To solve the problem, a simplified model of the adhesive bond of two overlapped plates is proposed. The simplification is that the movement of the layers depends only on the radial coordinate and does not depend on the angular one. The model is a generalization of the classical model of the connection of Holland and Reissner in the case of axial symmetry. The stresses are considered to be evenly distributed over the thickness of the layers, and the adhesive layer works only on the shift. These simplifications allowed us to obtain an analytical solution to the studied problem. The problem of the stress state of the adhesive bond of two plates is solved, one of which is weakened by a round hole, and the other is a round plate concentric with the hole. A load is applied to the plate weakened by a round hole. The discussed area is divided into three parts: the area of bonding, as well as areas inside and outside the bonding. In the field of bonding, the problem is reduced to third- and fourth-order differential equations concerning tangent and normal stresses, respectively, the solutions of which are constructed as linear combinations of Bessel functions of the first and second genera and modified Bessel functions of the first and second genera. Using the found tangential and normal stresses, we obtain linear inhomogeneous Euler differential equations concerning longitudinal and transverse displacements. The solution of the obtained equations is also constructed using Bessel functions. Outside the area of bonding, displacements are described by the equations of bending of round plates in the absence of shear forces. Boundary conditions are met exactly. The satisfaction of marginal conditions, as well as boundary conditions, leads to a system of linear equations concerning the unknown coefficients of the obtained solutions. The model problem is solved and the numerical results are compared with the results of calculations performed by using the finite element method. It is shown that the proposed model has sufficient accuracy for engineering problems and can be used to solve problems of the design of aerospace structures.

Keywords: adhesive bonding; axisymmetric model; analytical solution; round plate.

Барахов Костянтин Петрович – старший викладач кафедри вищої математики та системного аналізу, Національний аерокосмічний університет ім. М. С. Жуковського «Харківський авіаційний інститут», Харків, Україна.

Kostiantyn Barakhov – senior lecturer of Higher Mathematics and System Analysis Chair, National Aerospace University “Kharkiv Aviation Institute”, Kharkiv, Ukraine,
e-mail: kparakhov@gmail.com; ORCID: 0000-0003-1714-7917.