

УДК 624.073:539.319

doi: 10.32620/aktf.2022.2.01

С. С. КУРЄННОВ, К. П. БАРАХОВ, О. О. ВАМБОЛЬ, В. М. СТЕПАНЕНКО

*Національний аерокосмічний університет ім. М. Є. Жуковського  
«Харківський авіаційний інститут», Харків, Україна*

## НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНИЙ СТАН ПЛАСТИНИ, ЯКА ПОСЛАБЛЕНА КРУГОВИМ ВИРІЗОМ ТА ПОСИЛЕНА ДВОМА КРУГЛИМИ НАКЛАДКАМИ

У наведеній роботі розв'язано задачу про вісесиметричну деформацію конструкції, що складається з пластини, яка послаблена круговим вирізом і посилена, в місці вирізу, двома концентричними круглими накладками, приклеєними внапуск з обох боків пластини. Накладки з'єднані з основною пластиною за допомогою тонкого з'єднувального клейового шару, який працює на зсув і відрив. Для розв'язання задачі були використані припущення, відповідно до яких вважалося, що напруження по товщині з'єднувального шару розподілені рівномірно. Для накладок прийняті гіпотези Кирхгофа-Лява. Клейовий шар розглядається як пружна основа Вінклера. Розглянуто вісесиметричну задачу. Вважається, що переміщення шарів залежить тільки від радіальної координати і не залежить від кутової. В силу симетрії конструкції основна пластина вигину не піддається. Ця задача є узагальненням класичної моделі напруженого стану клейового з'єднання стрижнів на область, що має радіальну симетрію. Зроблені припущення дозволили отримати розв'язок задачі в аналітичній формі. Задачу розглянуто окремо в області склеювання та в областях за межами області склеювання. В області склеювання задачу зведено до диференціального рівняння сьомого порядку відносно дотичних напружень, розв'язок якого будується у вигляді розвинення у функціональний ряд за модифікованими функціями Бесселя другого роду. Знайдені дотичні напруження дозволяють знайти нормальні напруження, а також радіальні та поперечні переміщення шарів у області склеювання. За межами області склеювання переміщення знайдені з відомих диференціальних рівнянь деформації круглих пластин за відсутності перерізуючих сил. Невідомі коефіцієнти в обох випадках знаходяться з граничних умов та умов спряження. Розв'язано модельну задачу. Побудовано скінченно-елементну модель даного з'єднання. Оскільки в клейовому шарі дуже великі градієнти напружень, то найбільший розмір елемента клейового шару обраний досить малим, таким, що дорівнює половині товщини клейового шару. Проведено порівняння результатів, отриманих за допомогою запропонованої аналітичної моделі з результатами скінченно-елементного моделювання. Порівняння показало високу точність запропонованої моделі.

**Ключові слова:** клейове з'єднання; вісесиметрична модель; аналітичний розв'язок; кругла пластина.

### 1. Аналіз проблеми і постановка мети дослідження

Тонкостінні конструкції, у тому числі і тонкі пластини, можуть містити дефекти у вигляді отворів і тріщин, які з'являються в процесі експлуатації, наприклад, в результаті механічних пошкоджень. Ремонт локальних пошкоджень авіаційних конструкцій, як правило, проводиться за допомогою створення накладок. При цьому з метою зменшення концентрації напружень в околі отвору при виконанні ремонтних робіт отвору надають, як правило, круглу форму. Накладка приймає на себе частину навантаження, розвантажуючи пошкоджену ділянку. З'єднання накладки з основною пластиною може бути реалізовано по всій поверхні накладки (клеєві з'єднання внапуск [1–4]), лініями (зварні шви [5, 6]) або в системі точок (заклепкові з'єднання). З'єднання накладки з основною

пластиною за допомогою клею забезпечує герметичність та аеродинамічну ефективність конструкції. Розрахунок напруженого стану подібних клесних конструкцій проводиться, як правило, за допомогою методу скінченних елементів [7]. Зумовлено це у тому числі тим, що класичні аналітичні моделі напруженого стану з'єднань внапуск описують з'єднання прямокутної форми і припускають рівномірний розподіл напружень по ширині з'єднання [8, 9]. Існуючі двовимірні математичні моделі клейових з'єднань, які враховують нерівномірність напружень по ширині з'єднання [0, 11] також передбачають прямокутну форму області склеювання. У цьому випадку осьова симетрія аналізованої конструкції дозволяє використовувати полярну систему координат. Математичні моделі клейових з'єднань близькі до моделей напруженого стану тришарових (у тому числі круглих) пластин [12–14]. Однак математичні моделі тришарових пластин припускають однакові

граничні умови на периметрі обох несних шарів. У з'єднаннях внапуск, як правило, граничні умови не однакові і найчастіше не однорідні. Обумовлено це тим, що з'єднання повинні забезпечити передачу зусиль з одного несного шару на інший. Тому математичні моделі клейових з'єднань складніші, ніж моделі тришарових пластин.

У даній роботі побудовано аналітичний розв'язок задачі про вісесиметричний напружений стан пластини, яка ослаблена круглим вирізом, і посилена у місці вирізу з обох боків концентричними круглими накладками, приклеєними внапуск. Задачу, коли накладку приклеєно з однієї сторони, і у пластині та у накладці присутній вигин розглянуто одним із авторів у роботі [15]. Подібну задачу, але без урахування впливу вигину накладок та відривних напружень у клеї, розв'язано у роботі [16]. Застосування накладок з обох сторін з'єднання, як відомо, є кращим конструктивним рішенням, оскільки дозволяє зменшити вигин конструкції і знизити відривні напруження в клейовому шарі [17, 18].

## 2. Постановка задачі

Розглянемо конструкцію, показану на рис. 1. Радіус отвору в основній пластині позначимо  $R_1$ , а радіус накладок –  $R_2$ . Припустимо, що основна пластина має товщину  $2\delta_1$ , а накладки – товщину  $\delta_2$ . Між пластиною та накладками знаходиться клейовий шар, товщину якого позначимо  $\delta_0$ . Зовнішній радіус основної пластини позначимо  $R_3$ . Якщо радіус  $R_3$  достатньо великий, то вплив крайових умов зовнішньої границі пластини буде мати мінімальний вплив на напружений стан з'єднання.

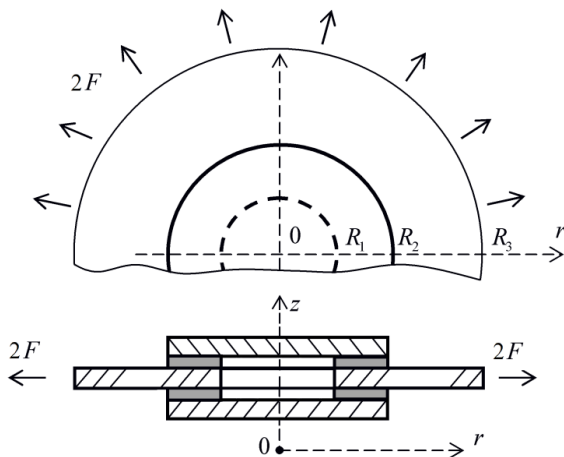


Рис. 1. Схема конструкції

Основна пластина навантажена розтягуючими зусиллями  $2F$  прикладеними по радіусу  $R_3$ . Розглянемо область склеювання  $r \in [R_1; R_2]$ . Завдяки осьовій симетрії зусилля в несних шарах не залежать від кутової координати. В силу симетрії конструкції основна пластина не піддається вигину під впливом прикладеного до неї навантаження. А самі накладки можуть згинатися. Внаслідок симетрії можемо розглянути половину конструкції, яка розташована по одну сторону серединної площини основної пластини (рис. 2). В цьому випадку, товщина основної пластини буде дорівнювати  $\delta_2$ .

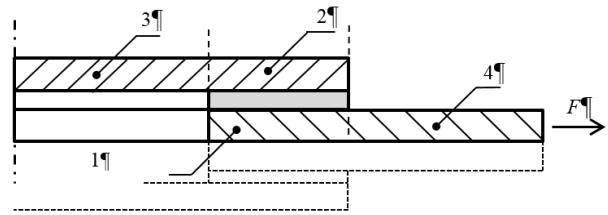


Рис. 2. Схема конструкції

В області склеювання  $r \in [R_1; R_2]$  нижній індекс "1" відповідає основній пластині, а індекс "2" – круглій накладці. За межами області склеювання  $r \in [R_2; R_3]$  основну пластину позначимо індексом «4». Накладку над отвором  $r \in [0; R_1]$  позначимо індексом "3".

Зусилля, згинаючі моменти, і напруження з боку клейового шару, що діють на диференціальний елемент нижньої накладки, наведені на рис. 3.

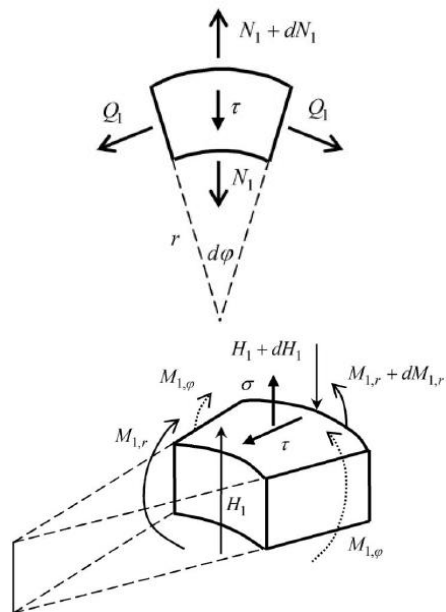


Рис. 3. Диференціальний елемент накладки

Рівняння рівноваги диференціальних елементів накладки та основної пластини мають вигляд.

$$\frac{N_1 - Q_1}{r} + \frac{dN_1}{dr} - \tau = 0, \quad \frac{N_2 - Q_2}{r} + \frac{dN_2}{dr} + \tau = 0, \quad (1)$$

$$\frac{M_{2,r} - M_{2,\varphi}}{r} + \frac{dM_{2,r}}{dr} - H_2 + \frac{\delta_2}{2} \tau = 0, \\ \frac{H_2}{r} + \frac{dH_2}{dr} + \sigma = 0, \quad (2)$$

де  $N_k$ ,  $Q_k$  – нормальні зусилля у шарі  $k$  в радіальному та окружному напрямках,  $k = 1, 2$ ;

$\tau$ ,  $\sigma$  – дотичні і нормальні (відривні) напруження в клейовому шарі;

$M_{k,r}$  – згинальний момент у шарі  $k$  в радіальному напрямку;

$M_{k,\varphi}$  – згинальний момент у шарі  $k$  в окружному напрямку;

$H_k$  – перерізуючі зусилля в шарі  $k$ .

Дотичні і нормальні напруження в клейовому шарі (постійні за товщиною клею) пропорційні різниці поздовжніх і, відповідно, поперечних переміщень сторін пластин, що звернені до клейового шару [0]

$$\tau = P_1 \left( U_1 - U_2 - \frac{\delta_2}{2} \frac{dW_2}{dr} \right), \quad \sigma = P_2 \cdot W_2, \quad (3)$$

де  $P_1$  і  $P_2$  – жорсткість клейового шару на зсув і на відрив відповідно,

$$P_1 = \frac{G_0}{\delta_0}, \quad P_2 = \frac{E_0}{\delta_0(1-\mu_0^2)},$$

де відповідно  $E_0$ ,  $G_0$ ,  $\mu_0$  – модуль пружності, модуль зсуву і коефіцієнт Пуассона клею;

$W_2$  – поперечні переміщення накладки (поперечні переміщення основної пластини дорівнюють нулю);

$U_k$  – поздовжні (радіальні) переміщення шарів,  $k = 1, 2$ .

Закону Гука для пластин запишемо у вигляді

$$N_k = B_k (\varepsilon_{k,r} + \mu_k \varepsilon_{k,\varphi}), \quad Q_k = B_k (\varepsilon_{k,\varphi} + \mu_k \varepsilon_{k,r}), \quad (4)$$

де  $B_k = \frac{\delta_k E_k}{1-\mu_k^2}$  – мембранна жорсткість пластин;

$\mu_k$  – коефіцієнт Пуассона матеріалу пластини,  $k = 1, 2$ ;

$E_k$  – модуль пружності матеріалу пластини  $k$ ;

$\varepsilon_{k,r}$  і  $\varepsilon_{k,\varphi}$  – деформації шару  $k$  у радіальному та окружному напрямках.

Радіальні переміщення пов'язані з деформаціями залежностями

$$\varepsilon_{k,r} = \frac{dU_k}{dr}, \quad \varepsilon_{k,\varphi} = \frac{U_k}{r}. \quad (5)$$

Рівняння вісесиметричного вигину накладки (відповідно до теорії Киргофа-Лява):

$$M_{2,r} = D_2 \left( \frac{d^2 W_2}{dr^2} + \frac{\mu_2}{r} \frac{dW_2}{dr} \right), \\ M_{2,\varphi} = D_2 \left( \mu_2 \frac{d^2 W_2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dW_2}{dr} \right), \quad (6)$$

де  $D_2 = \frac{E_2 \delta_2^3}{12(1-\mu_2^2)}$  – згинальна жорсткість

накладки.

За межами області склеювання, на ділянках 3 та 4, рис. 2, напружено-деформований стан накладки та основної пластини описується відомими рівняннями вісесиметричного деформування круглих пластин [19].

### 3. Побудова розв'язку в області склеювання

Диференціюючи співвідношення (4) і використовуючи рівняння (1) – (3) та співвідношення (5) – (7), одержимо систему диференціальних рівнянь відносно напружень у клейовому шарі:

$$\frac{d^3 \tau}{dr^3} + \frac{2}{r} \frac{d^2 \tau}{dr^2} - \left( a_1 + \frac{1}{r^2} \right) \frac{d\tau}{dr} + \left( \frac{1}{r^3} - \frac{a_1}{r} \right) \tau + P a_2 \sigma = 0; \quad (7)$$

$$\frac{d^4 \sigma}{dr^4} + \frac{2}{r} \frac{d^3 \sigma}{dr^3} - \frac{1}{r^2} \frac{d^2 \sigma}{dr^2} + \frac{1}{r^3} \frac{d\sigma}{dr} + a_3 \sigma - K a_2 \left( \frac{\tau}{r} + \frac{d\tau}{dr} \right) = 0; \quad (8)$$

де  $a_1 = P_1 \left( \frac{1}{B_1} + \frac{1}{B_2} + \frac{\delta_2^2}{4D_2} \right)$ ,  $a_2 = -\frac{\delta_2}{2D_2}$ ,  $a_3 = \frac{P_2}{D_2}$ .

Виразивши  $\sigma$  із співвідношення (7) і підставивши їх у рівняння (8), отримаємо диференціальне рівняння

$$\begin{aligned} & \frac{d^7 \tau}{dr^7} + \frac{4}{r} \frac{d^6 \tau}{dr^6} - \left( a_1 + \frac{6}{r^2} \right) \frac{d^5 \tau}{dr^5} + \left( \frac{18}{r^3} - \frac{3a_1}{r} \right) \frac{d^4 \tau}{dr^4} + \\ & + \left( \frac{3a_1}{r^2} - \frac{51}{r^4} + a_3 \right) \frac{d^3 \tau}{dr^3} + \left( \frac{126}{r^5} - \frac{6a_1}{r^3} + \frac{2a_3}{r} \right) \frac{d^2 \tau}{dr^2} + \\ & + \left( \frac{9a_1}{r^4} - \frac{225}{r^6} - \frac{a_3}{r^2} + a_2^2 P_1 P_2 - a_1 a_3 \right) \frac{d\tau}{dr} + \\ & + \left( \frac{225}{r^7} - \frac{9a_1}{r^5} + \frac{a_3}{r^3} + \frac{a_2^2 P_1 P_2 - a_1 a_3}{r} \right) \tau = 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Загальний розв'язок рівняння (9) шукаємо у вигляді

$$\tau = \sum_{n=1}^6 C_n K_1(\lambda_n r) + \frac{C_7}{r}; \quad (10)$$

де  $K_1(\lambda_n r)$  – модифіковані функції Бесселя другого роду (функції Макдональда);

$C_n$  – довільні константи.

Підставивши (10) в (9), отримаємо характеристичне рівняння

$$\lambda^6 - a_1 \lambda^4 + a_3 \lambda^2 + a_2^2 P_1 P_2 - a_1 a_3 = 0,$$

коренями якого є коефіцієнти  $\lambda_n$ ,  $n=1, \dots, 6$ , що входять у функціональний ряд (10).

З рівняння (7) знаходимо нормальні (відривні) напруження в клейовому шарі

$$\sigma = \sum_{n=1}^6 C_n \alpha_n K_0(\lambda_n r), \quad (11)$$

$$\text{де } \alpha_n = \frac{\lambda_n^3 - a_1 \lambda_n}{P_1 a_2}.$$

Зазначимо, що напружений стан стрижнів або балок, які з'єднані внапуск за допомогою пружного сполучного шару [8, 9], описується за допомогою лінійних комбінацій експоненціальних функцій. У даній задачі внаслідок кругової симетрії аналогами експоненціальних функцій виступають необмежені та неперіодичні модифіковані функції Бесселя.

З рівняння (1) з використанням співвідношень (4) та (5) отримаємо

$$\frac{d^2 U_1}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dU_1}{dr} - \frac{U_1}{r^2} - \frac{\tau}{B_1} = 0,$$

$$\frac{d^2 U_2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dU_2}{dr} - \frac{U_2}{r^2} + \frac{\tau}{B_2} = 0$$

Розв'язок системи даних рівнянь має вигляд

$$U_1 = \frac{1}{B_1} \sum_{n=1}^6 \frac{C_n}{\lambda_n^2} K_1(\lambda_n r) + \frac{C_7}{4B_1} r(2 \ln r - 1) + C_8 r + \frac{C_9}{r}$$

$$U_2 = \frac{1}{B_2} \sum_{n=1}^6 \frac{C_n}{\lambda_n^2} K_1(\lambda_n r) - \frac{C_7}{4B_2} r(2 \ln r - 1) + C_{10} r + \frac{C_{11}}{r}$$

Зі співвідношення (3) знайдемо поперечні переміщення накладки  $W_2$ . Використовуючи співвідношення для напружень у клейовому шарі (10), (11), поздовжні та поперечні переміщення накладки та основної пластини, з (4) – (6) знайдемо радіальні та окружні зусилля в пластинах та згинальні моменти у накладці. Перерізувальні зусилля в накладці  $H_2$  знаходимо з рівнянь (2).

#### 4. Побудова розв'язку за межами області склеювання

За межами області склеювання маємо дві області – основна пластина ( $R_2 \leq r \leq R_3$ ) та накладка над вирізом ( $0 \leq r \leq R_1$ ). Індексом «4» позначені переміщення та силові фактори в основній пластині за межами області склеювання. Індексом «3» позначені переміщення та силові фактори у накладці над вирізом. Переміщення на цих ділянках описуються відомими рівняннями деформації круглих пластин за відсутності перерізуючих сил [19]

$$\frac{d^2 U_m}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dU_m}{dr} - \frac{U_m}{r^2} = 0,$$

$$\frac{d^3 W_3}{dr^3} + \frac{1}{r} \frac{d^2 W_3}{dr^2} - \frac{1}{r^2} \frac{dW_3}{dr} = 0,$$

де  $m = 3, 4$ .

Розв'язки даних рівнянь мають вигляд

$$U_3 = c_1 r + \frac{c_2}{r}, \quad U_4 = c_3 r + \frac{c_4}{r}, \quad W_3 = s_1 + s_2 \ln r + s_3 r^2.$$

Згинальні моменти, радіальні та окружні зусилля знаходимо, використовуючи співвідношення (4) – (6).

### 5. Задоволення крайових умов.

Невідомі коефіцієнти знаходимо із крайових умов та умов спряження на межах областей. У точці  $r=0$  поперечні переміщення мають бути обмежені за величиною, а радіальні переміщення дорівнюють нулю. Звідси слідує що

$$c_2 = 0, \quad s_2 = 0.$$

На зовнішній границі основної пластини задані розтягуючі радіальні зусилля.

$$N_4(R_3) = F.$$

На границях області склеювання маємо умови

$$\begin{aligned} N_4(R_2) &= N_1(R_2), & U_4(R_2) &= U_1(R_2), \\ N_2(R_2) &= M_{2,r}(R_2) = N_2(R_2) = 0, \\ N_1(R_1) &= 0, & U_2(R_1) &= U_3(R_1), \\ W_2(R_1) &= W_3(R_1), & \frac{dW_2}{dr} \Big|_{r=R_1} &= \frac{dW_3}{dr} \Big|_{r=R_1}, \\ M_{2,r}(R_1) &= M_{3,r}(R_1), & N_2(R_1) &= N_3(R_1), \\ H_2(R_1) &= H_3(R_1), \end{aligned}$$

Крім того, радіальні переміщення  $U_1(r)$ ,  $U_2(r)$  і поперечні переміщення накладки  $W_2(r)$  повинні обертати співвідношення (3) в тотожність. Звідси випливає

$$C_7 = 0, \quad -C_9 + C_{11} + \frac{C_7}{R_1} = 0, \quad C_{10} - C_8 = 0.$$

Таким чином, отримуємо замкнуту систему лінійних рівнянь відносно невідомих коефіцієнтів.

### 6. Модельна задача

Для аналізу напруженого стану з'єднання та верифікації запропонованої аналітичної моделі розглянемо з'єднання двох алюмінієвих ( $E^{(1)} = E^{(2)} = 70 \text{ ГПа}$ , коефіцієнт Пуассона,  $\mu = 0,28$ ) пластин. Товщини пластин  $\delta_1 = \delta_2 = 3 \text{ мм}$ . Пластини склеєні клеєм, пружні параметри якого  $G_0 = 0,3125 \text{ ГПа}$ ,  $E_0 = 0,8 \text{ ГПа}$  і товщина  $\delta_0 = 0,1 \text{ мм}$ . Радіус отвору у пластині  $R_1 = 20 \text{ мм}$ ,

радіус накладок  $R_2 = 50 \text{ мм}$ . При розрахунках вважатимемо, що основна пластина має нескінченно великий радіус  $R_3 = \infty \text{ мм}$ . Це припущення пояснюється тим, що вплив отвору і накладок на напружено-деформований стан основної пластини має локальний характер. І в разі відносно великої пластини будь-якої форми при значному віддаленні вирізу від її краю можемо вважати, що основна пластина нескінченно велика. По зовнішній границі основної пластини задані розтягуючі радіальні зусилля  $F$ . Очевидно, що в цьому випадку і радіальні зусилля в основній пластині на нескінченності також дорівнюють  $F$ .

Для верифікації запропонованої аналітичної моделі напружено-деформованого стану з'єднання було створено осесиметричну скінченно-елементну модель. Геометричну форму конструкції показано на рис. 4. Зовнішній радіус  $R_3 = 3R_2$ .

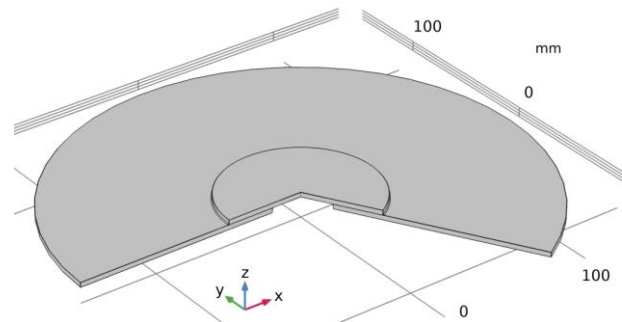


Рис. 4. Конструкція з'єднання накладки із пластиною (фрагмент)

У скінченно-елементній моделі з'єднання внесені фаски та надлишки видавленого клею, що відображено на рис. 5, на якому зображено фрагмент моделі в околі краю клейового шва. Оскільки в клейовому шарі дуже великі градієнти напружень, то найбільший розмір елемента клейового шару обраний досить малим, таким, що дорівнює половині товщини клейового шару.

Дотичні напруження в клейовому шарі  $\tau$  наведено на рис. 6.

Суцільною лінією показано напруження, які обчислено за запропонованою у роботі аналітичною моделлю (АМ). Пунктирною лінією показано дотичні напруження в серединній площині клейового шва, обчислені згідно зі скінченно-елементною моделлю (FEM). Напруження наведені у безрозмірній формі, у вигляді відношення діючих напружень до деяких напружень  $\tau^* = \frac{F}{R_2 - R_1}$ . Тут  $F$  – прикладені до торця основної пластини погонні зусилля,  $R_2 - R_1$  – ширина клейового шва.

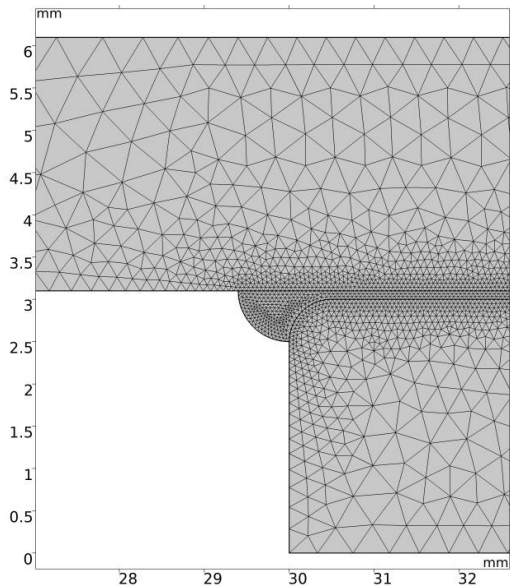


Рис. 5. Фрагмент скінченно-елементної моделі

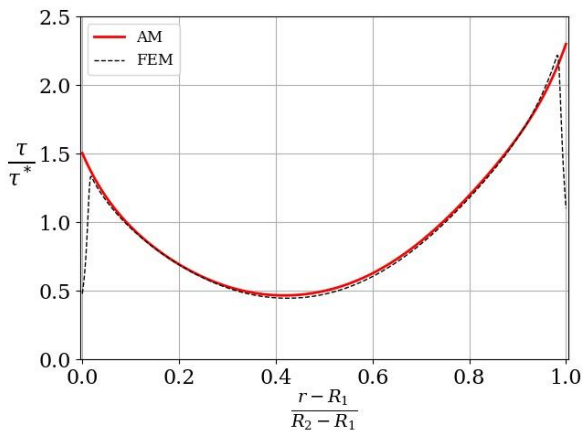


Рис. 6. Дотичні напруження в клейовому шарі

Нормальні напруження в клеї наведено на рис. 7.

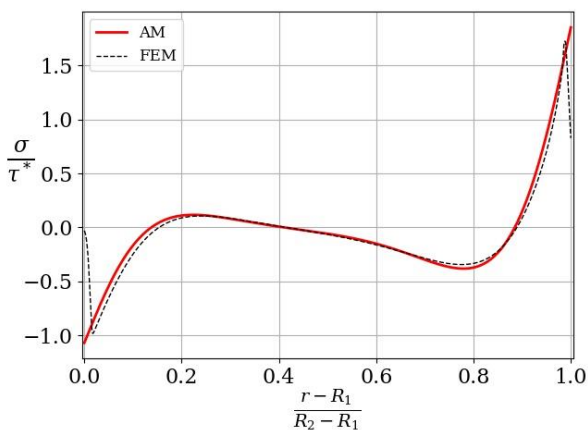


Рис. 7. Нормальні напруження в клейовому шарі

Як і на попередньому графіку, суцільною лінією показано напруження, які обчислені за запропонованою в роботі аналітичною моделлю (АМ). Пунктирною лінією показано дотичні напруження в серединній площині клейового шва, обчислені згідно зі скінченно-елементною моделлю (FEM).

Слід зазначити, що на наведених графіках дотичні напруження досягають максимальних значень на краях області склеювання. Однак, з іншого боку, якщо зовнішній край клейового шару вільний від навантаження, то в силу закону парності дотичних напружень дотичні напруження на границі клейового шару повинні дорівнювати нулю. Точніші математичні моделі напруженого стану клейового шару [20–24], а також розбиття клейового шару біля границі з'єднання на кінцеві елементи з розміром, значно меншим за товщину клейового шару, виявляють цей ефект. Дослідження показують, що відносні напруження досягають максимуму на відстані порядку товщини клейового шару від краю шва. Однак максимальні значення напружень при цьому мало відрізняються від напружень, які розраховані за більш простими моделями.

Крім того, в клейовому шарі присутні нормальні напруження, які не враховуються у роботі [16]. Розрахунки показали, що це напруження на разі мають той самий порядок, як і дотичні напруження.

Підсилення отвору накладкою зазвичай має мету зменшити напруження на границі отвору. Добре відомо, що за відсутності накладки на границі отвору за даних граничних умов на нескінченності із граничної умови  $N_1(R_1) = 0$  випливає  $Q_1(R_1) = 2F$ . Але наявність накладки має зменшити ці окружні зусилля на границі отвору. На рис. 8 у безрозмірній формі показано графіки окружних та радіальних зусиль у основній пластині в околі отвору. За введеної вище нормованою радіальною координатою відрізок  $[0; 1]$  – це область з'єднання.

З наведених графіків помітно, що накладка суттєво розвантажує отвір – окружні напруження на границі отвору завдяки наявності накладки зменшилися більш ніж у двічі. Крім того, ми бачимо добру збіжність результатів скінченно-елементного моделювання (графіки «FEM») із розрахунками за запропонованою аналітичною моделлю (графіки «AM»).

### Висновки

1) Запропоновано вісесиметричну математичну модель двостороннього з'єднання внапуск пластини,

яка містить круговий виріз, з двома круглими накладками з обох боків пластини. Запропонований підхід ґрунтується на класичній теорії пластин Кіргофа-Лява. Клейовий шар розглядається як пружна основа Вінклера. Розв'язок задачі отримано в аналітичній формі.

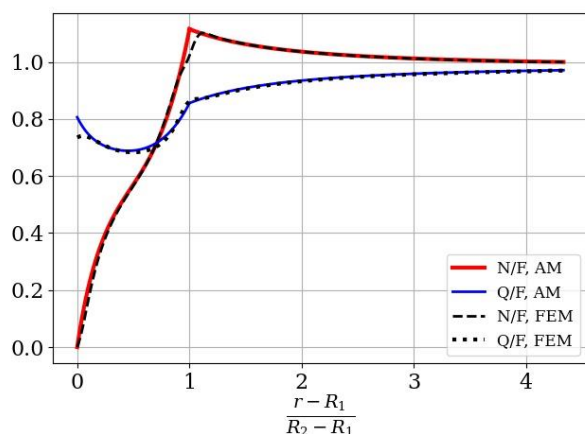


Рис. 8. Зусилля у основній пластині

2) Незважаючи на наявність накладок з обох боків пластини, завдяки чому основна пластина не згинається при навантаженні, в клейовому шарі виникають нормальні напруження. Ці напруження обумовлені вигином накладок. Для зменшення вигину накладок доцільно простір вирізу між накладками заповнювати деякою вставкою.

3) Скінченно-елементне моделювання показало високу точність запропонованої моделі.

## Література

1. Design, analysis and performance of adhesively bonded composite patch repair of cracked aluminum aircraft panels [Text] / A. C. Okafor, N. Singh, U. E. Enemuoh, S. V. Rao // *Composite Structures*. – 2005. – Vol. 71. Iss. 2. – P. 258-270. DOI: 10.1016/j.compstruct.2005.02.023.

2. Bonded Repair of Aircraft Composite Sandwich Structures [Text] / J. S. Tomblin, L. Salah, J. M. Welch, M. D. Borgman. – Report DOT/FAA/AR-03/74. 2004.

3. Wang, Gul-Fang. Stress analysis of plates with a circular hole reinforced by flange reinforcing member [Text] / Gul-Fang Wang // *Applied Mathematics and Mechanics*. – 1987. – Vol. 6. – P. 569-588. DOI: 10.1007/bf02017406.

4. Bonded Repairs of Composite Panels Representative of Wing Structure [Text] / J. G. Bakuckas, R. Chadha, P. Swindell, M. Fleming, J. Z. Lin, J. B. Ihn, M. Freisthler // *Lecture Notes in Mechanical Engineering*. – 2019. – P. 565-580. DOI: 10.1007/978-3-030-21503-3\_45.

5. Zemlyanova, A. Y. Reinforcement of a plate weakened by multiple holes with several patches for different types of plate-patch attachment [Text] / A. Y. Zemlyanova // *Mathematics and Mechanics of*

*Solids*. – 2016. – Vol 21, Iss. 3. – P. 281-294. DOI: 10.1177/1081286513519812.

6. Kurennov, S. Stressed State of an Infinite Plate with a Circular Opening and a Concentric Cover Plate [Text] / S. Kurennov, N. Smetankina // *Lecture Notes in Networks and Systems*. – 2021. – Vol. 188. – P. 344-354. DOI: 10.1007/978-3-030-66717-7\_29.

7. Development of design allowables for the design of composite bonded double-lap joints in aerospace applications [Text] / M. A. Khan, G. S. Aglietti, A. D. Crocombe, A. D. Viquerat, C. O. Hamar // *International Journal of Adhesion and Adhesives*. – 2018. – Vol. 82. – P. 221-232. DOI: 10.1016/j.ijadhadh.2018.01.011.

8. Analytical models of adhesively bonded joints. Part I: Literature survey [Text] / L. F. M. da Silva, P. J. C. das Neves, R. D. Adams, J. K. Spelt // *Int. Journal Adhes. & Adhesiv.* – 2009. – Vol. 29. – P. 319-330. DOI: 10.1016/j.ijadhadh.2008.06.005.

9. Wong, E. H. Interface and interconnection stresses in electronic assemblies – A critical review of analytical solutions [Text] / E. H. Wong, J. Liu // *Microelectronics Reliability*. – 2017. – Vol. 79. – P. 206-220. DOI: 10.1016/j.microrel.2017.03.010.

10. Kurennov, S. S. Determining Stresses in an Adhesive Joint with a Longitudinal Un-adhered Region Using a Simplified Two-Dimensional Theory [Text] / S. S. Kurennov // *J Appl Mech Tech Phy*. – 2019. – Vol. 60. – P. 740-747. DOI: 10.1134/S0021894419040199.

11. Kurennov, S. S. The Stressed state of the double-layer rectangular plate under shift. The Simplified two-dimensional model [Text] / S. S. Kurennov, K. P. Barakhov // *PNRPU Mechanics Bulletin*. – 2019. – Vol. 3. – P. 166-174. DOI: 10.15593/perm.mech/2019.3.16.

12. Starovoitov, E. I. Thermoelastic deformation of a circular sandwich plate by local loads [Text] / E. I. Starovoitov, D. V. Leonenko, D. V. Tarlakovskii // *Mechanics of Composite Materials*. – 2018. – Vol. 54, Iss. 3. – P. 299-312. DOI: 10.1007/s11029-018-9740-x.

13. Kudin, A. V. Axisymmetric bending of circular and annular sandwich plates with nonlinear elastic core material [Text] / A. V. Kudin, S. V. Choporov, S. I. Gomenyuk // *Math Models Comput Simul*. – 2017. – Vol. 9. – P. 601-612. DOI: 10.1134/S2070048217050076.

14. Stress-strain assessment for laminated aircraft cockpit windows at static and dynamic loads [Text] / Yu. M. Rodichev, N. V. Smetankina, O. M. Shupikov, S. V. Ugrimov // *Strength of Materials*. – 2018. – Vol. 50, Iss. 6. – P. 868-873. DOI: 10.1007/s11223-019-00033-4.

15. Барахов, К. П. Узагальнення моделі Голанда і Рейсснера на випадок осьової симетрії [Текст] / К. П. Барахов // *Авіаційно-космічна техніка і технологія*. – 2021. – № 2 (170). – С. 12-19. DOI: 10.32620/akt.2021.2.02.

16. Barakhov, K. One-Dimensional Axisymmetric Model of the Stress State of the Adhesive Joint [Text] / K. Barakhov, D. Dvoretzka, O. Poliakov // *Lecture Notes in Networks and Systems*. – 2021. – Vol. 188. – P. 310-319. DOI: 10.1007/978-3-030-66717-7\_26.

17. Strength prediction of single- and double-lap joints by standard and extended finite element modelling [Text] / R. D. S. G. Campilho, M. D. Banea, A. M. G. Pinto, L. F. M. da Silva, A. M. P. de Jesus //

*International Journal of Adhesion and Adhesives*. – 2011. – Vol. 31, Iss. 5. – P. 363-372. DOI: 10.1016/j.ijadhadh.2010.09.008.

18. Osnes, H. *Analysis of overlaminated double-lap joints [Text] / H. Osnes, D. McGeorge // Composites Part B: Engineering*. – 2005. – Vol. 36, Iss. 6-7. – P. 544-558. DOI: 10.1016/j.compositesb.2005.01.002.

19. Timoshenko, S. P. *Theory of Plates and Shells [Text] / S. P. Timoshenko, S. Woinowsky-Krieger*. – McGraw-Hill, New York, 1959. second edition. – 595 p.

20. Kurennov, S. S. *Longitudinal-Flexural Vibrations of a Three-Layer Rod. An Improved Model [Text] / S. S. Kurennov // J Math Sci*. – 2016. – Vol. 215, Iss. 2. – P. 159-169. DOI: 10.1007/s10958-016-2829-7.

21. Kurennov, S. S. *Refined Mathematical Model of the Stress State of Adhesive Lap Joint: Experimental Determination of the Adhesive Layer Strength Criterion [Text] / S. S. Kurennov // Strength of Materials*. – 2020. – Vol. 52. – P. 779-789. DOI: 10.1007/s11223-020-00231-5.

22. Wang, J. *Three-parameter elastic foundation model for analysis of adhesively bonded joints [Text] / J. Wang, C. Zhang // Int. J. Adhesion Adhesives*. – 2009. – Vol. 29. – P. 495-502. DOI: 10.1016/j.ijadhadh.2008.10.002.

23. Frostig, Y. *Analysis of adhesive-bonded joints, square-end, and spew-fillet—high-order theory approach [Text] / Y. Frostig, O. T. Thomsen, F. Mortensen // J. of Engineering Mechanics*. – 1999. – Vol. 125. – P. 1298–1307. DOI: 10.1061/(ASCE)0733-9399(1999)125:11(1298).

24. Amidi, S. *An analytical model for interfacial stresses in double-lap bonded joints [Text] / S. Amidi, J. Wang // The J. Adhesion*. – 2019. – Vol. 95, iss. 11. – P. 1031-1055. DOI: 10.1080/00218464.2018.1464917.

## References

1. Okafor, A. C., Singh, N., Enemuoh, U. E., Rao, S. V. Design, analysis and performance of adhesively bonded composite patch repair of cracked aluminum aircraft panels. *Composite Structures*, 2005, vol. 71, iss. 2, pp. 258-270. DOI: 10.1016/j.compstruct.2005.02.023.

2. Tomblin, J. S., Salah, L., Welch, J. M., Borgman, M. D. Bonded Repair of Aircraft Composite Sandwich Structures. Report DOT/FAA/AR-03/74, 2004.

3. Wang, Gul-Fang. Stress analysis of plates with a circular hole reinforced by flange reinforcing member. *Applied Mathematics and Mechanics*, 1987, vol. 6, pp. 569-588. DOI: 10.1007/bf02017406.

4. Bakuckas, J. G., Chadha, R., Swindell, P., Fleming, M., Lin, J. Z., Ihn, J. B., Freisthler, M. Bonded Repairs of Composite Panels Representative of Wing Structure. *Lecture Notes in Mechanical Engineering*, 2019, pp. 565–580. DOI: 10.1007/978-3-030-21503-3\_45.

5. Zemlyanova, A. Y. Reinforcement of a plate weakened by multiple holes with several patches for different types of plate-patch attachment. *Mathematics and Mechanics of Solids*, 2016, vol. 21, iss. 3, pp. 281-294. DOI: 10.1177/1081286513519812.

6. Kurennov, S., Smetankina, N. Stressed State of an Infinite Plate with a Circular Opening and a

Concentric Cover Plate. *Lecture Notes in Networks and Systems*, 2021, vol. 188, pp. 344-354. DOI: 10.1007/978-3-030-66717-7\_29.

7. Khan, M. A., Aglietti, G. S., Crocombe, A. D., Viquerat, A. D., Hamar, C. O. Development of design allowables for the design of composite bonded double-lap joints in aerospace applications. *International Journal of Adhesion and Adhesives*, 2018, vol. 82, pp. 221–232. DOI: 10.1016/j.ijadhadh.2018.01.011.

8. da Silva, L. F. M., das Neves, P. J. C., Adams, R. D., Spelt, J. K. Analytical models of adhesively bonded joints. Part I: Literature survey. *Int. Journal Adhes. & Adhesiv*, 2009, vol. 29, pp. 319-330. DOI: 10.1016/j.ijadhadh.2008.06.005.

9. Wong, E. H., Liu, J. Interface and interconnection stresses in electronic assemblies – A critical review of analytical solutions. *Microelectronics Reliability*, 2017, vol. 79, pp. 206-220. DOI: 10.1016/j.microrel.2017.03.010.

10. Kurennov, S. S. Determining Stresses in an Adhesive Joint with a Longitudinal Un-adhered Region Using a Simplified Two-Dimensional Theory. *J Appl Mech Tech Phy*, 2019, vol. 60, pp. 740–747. DOI: 10.1134/S0021894419040199.

11. Kurennov, S. S., Barakhov, K. P. The Stressed state of the double-layer rectangular plate under shift. The Simplified two-dimensional model. *PNRPU Mechanics Bulletin*, 2019, vol. 3, pp. 166-174. DOI: 10.15593/perm.mech/2019.3.16.

12. Starovoitov, E. I., Leonenko, D. V., Tarlakovskii, D. V. Thermoelastic deformation of a circular sandwich plate by local loads. *Mechanics of Composite Materials*, 2018, vol. 54, iss. 3, pp. 299-312. DOI: 10.1007/s11029-018-9740-x.

13. Kudin, A. V., Choporov, S. V. Gomenyuk, S. I. Axisymmetric bending of circular and annular sandwich plates with nonlinear elastic core material. *Math Models Comput Simul*, 2017, vol. 9, pp. 601-612. DOI: 10.1134/S2070048217050076.

14. Rodichev, Yu. M., Smetankina, N. V., Shupikov, O. M., Ugrimov, S. V. Stress-strain assessment for laminated aircraft cockpit windows at static and dynamic loads. *Strength of Materials*, 2018, vol. 50, iss. 6, pp. 868-873. DOI: 10.1007/s11223-019-00033-4.

15. Barakhov, K. P. Uzahalnennia modeli Holanda i Reissnera na vypadok osovoi symetrii [Generalization of the Holland and Reissner Model in Case of Axial Symmetry]. *Aviacijno-kosmicna tehnika i tehnologia – Aerospace technic and technology*, 2021, no. 2(170), pp. 12 – 19. DOI: 10.32620/akt.2021.2.02.

16. Barakhov, K., Dvoretzka, D., Poliakov, O. One-Dimensional Axisymmetric Model of the Stress State of the Adhesive Joint. *Lecture Notes in Networks and Systems*, 2021, vol. 188, pp. 310-319. DOI: 10.1007/978-3-030-66717-7\_26.

17. Campilho, R. D. S. G., Banea, M. D., Pinto, A. M. G., da Silva, L. F. M., de Jesus, A. M. P. Strength prediction of single- and double-lap joints by standard and extended finite element modelling. *International Journal of Adhesion and Adhesives*, 2011, vol. 31, iss. 5, pp. 363-372. DOI: 10.1016/j.ijadhadh.2010.09.008.

18. Osnes, H., McGeorge, D. Analysis of overlaminated double-lap joints. *Composites Part B: Engineering*, 2005, vol. 36, iss. 6-7, pp. 544–558. DOI: 10.1016/j.compositesb.2005.01.002.



19. Timoshenko, S. P., Woinowsky-Krieger, S. *Theory of Plates and Shells*. McGraw-Hill, New York, 1959, second edition. 595 p.

20. Kurennov, S. S. Longitudinal-Flexural Vibrations of a Three-Layer Rod. An Improved Model. *J Math Sci*, 2016, vol. 215, iss. 2, pp. 159-169. DOI: 10.1007/s10958-016-2829-7.

21. Kurennov, S. S. Refined Mathematical Model of the Stress State of Adhesive Lap Joint: Experimental Determination of the Adhesive Layer Strength Criterion. *Strength Mater*, 2020, vol. 52, pp. 779-789. DOI: 10.1007/s11223-020-00231-5.

22. Wang, J., Zhang, C. Three-parameter elastic foundation model for analysis of adhesively bonded joints. *Int. J. Adhesion Adhesives*, 2009, vol. 29, pp. 495-502. DOI: 10.1016/j.ijadhadh.2008.10.002.

23. Frostig, Y., Thomsen, O. T., Mortensen, F. Analysis of adhesive-bonded joints, square-end, and spew-fillet—high-order theory approach. *J. of Engineering Mechanics*, 1999, vol. 125, pp. 1298-1307. DOI: 10.1061/(ASCE)0733-9399(1999)125:11(1298).

24. Amidi, S., Wang, J. An analytical model for interfacial stresses in double-lap bonded joints. *The J. Adhesion*, 2019, vol. 95, iss. 11, pp. 1031-1055. DOI: 10.1080/00218464.2018.1464917.

*Поступила в редакцію 12.02.2022, рассмотрена на редколлегии 15.04.2022*

## НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ ПЛАСТИНЫ ОСЛАБЛЕННОЙ КРУГОВЫМ ВЫРЕЗОМ И УСИЛЕННОЙ ДВУМЯ КРУГЛЫМИ НАКЛАДКАМИ

*С. С. Куреннов, К. П. Барахов, А. А. Вамболь, В. Н. Степаненко*

В приведенной работе решена задача о осесимметричной деформации конструкции, состоящей из пластины, ослабленной круговым вырезом и усиленной, в месте выреза, двумя концентрическими круглыми накладками, приклеенными внахлест с обеих сторон пластины. Накладки соединены с основной пластиной с помощью тонкого соединительного клеевого слоя, работающего на сдвиг и отрыв. Для решения задачи были использованы гипотезы, согласно которым считалось, что напряжения равномерно распределены по толщине соединительного слоя. Для накладок приняты гипотезы Кирхгофа-Лява. Клеевой слой рассматривается как упругая основа Винклера. Рассмотрена осесимметричная задача. Считается, что перемещение слоев зависит только от радиальной координаты и не зависит от угловой. В силу симметрии конструкции основная пластина не подвергается изгибу. Эта задача является обобщением классической модели напряженного состояния клеевого соединения стержней на область, имеющую радиальную симметрию. Сделанные предположения позволили получить решение задачи в аналитической форме. Задача рассмотрена отдельно в области склеивания и в областях за пределами области склеивания. В области склеивания задача сведена к дифференциальному уравнению седьмого порядка относительно касательных напряжений, решение которого строится в виде разложения в функциональный ряд по модифицированным функциям Бесселя второго рода. Найденные касательные напряжения позволяют найти нормальные напряжения, а также радиальные и поперечные перемещения слоев в области склеивания. За пределами области склеивания перемещения найдены из известных дифференциальных уравнений деформации круглых пластин при отсутствии перерезающих сил. Неизвестные коэффициенты в обоих случаях находятся из граничных условий и условий сопряжения. Решена модельная задача. Построена конечно-элементная модель данного соединения. Поскольку в клеевом слое очень большие градиенты напряжений, то наибольший размер элемента клеевого слоя выбран достаточно малым, равным половине толщины клеевого слоя. Произведено сравнение результатов, полученных с помощью предложенной аналитической модели с результатами конечно-элементного моделирования. Сравнение показало высокую точность предлагаемой модели.

**Ключевые слова:** клеевое соединение; осесимметричная модель; аналитическое решение; круглая пластина.

## THE STRESS-STRAIN STATE OF A PLATE IS WEAKENED BY A CIRCULAR CUTOUT AND REINFORCED BY TWO ROUND PATCHES

*Sergiy Kurennov, Kostiantyn Barakhov, Olexiy Vambol, Volodymyr Stepanenko*

The problem of axisymmetric deformation of a structure was solved in this article. This structure consists of a plate that was weakened by a circular cutout and at the same time reinforced by two concentric round patches. The patches are glued overlapping on both sides of the plate, in the place of the cutout. The patches are joined to the main plate by a thin adhesive layer and perceive shearing and tearing forces. To solve the problem, some hypotheses were used, namely: it was assumed that the stresses were distributed uniformly over the thickness of the adhesive layer. For patches, the Kirchhoff-Love hypothesis is adopted. The adhesive layer is considered an elastic Winkler base. An axisymmetric problem is considered. It is assumed that the displacement of the layers depends only on the radial coordinate and doesn't depend on the angular coordinate. The main plate is not subjected to bending due to the symmetry of the structure. This problem is a generalization of the classic model of the stress state of the adhesive joint for the rods to an area with radial symmetry. These assumptions have allowed obtaining a solution to the problem in an analytical form. The problem is considered separately in the adhesive joint area and as well as the

outside of the adhesive joint area. In the area of gluing, the problem is reduced to a seventh-order differential equation concerning shear stresses. The solution to this problem is presented as an expansion into a functional series in terms of modified Bessel functions of the second kind. The obtained shear stresses make it possible to obtain normal stresses, as well as radial and transverse displacements of the layers in the adhesive joint zone. The displacements outside the adhesive joint zone were obtained from the well-known differential equations for the deformation of round plates in the absence of shear forces. The unknown coefficients in both cases are found from the boundary and conjugation conditions. The model task was solved. A finite element model of an adhesive joint has been developed. The largest size of the adhesive layer element is chosen to be sufficiently small and equal to half the thickness of the adhesive layer because of the enormous stress gradients in the adhesive layer. The results of the analytical model were compared with those results of the finite element model. The comparison showed the high accuracy of the proposed model.

**Keywords:** adhesive joint; axisymmetric model; analytical solution; round plate.

**Куреннов Сергій Сергійович** – д-р техн. наук, доц., проф. каф. вищої математики та системного аналізу, Національний аерокосмічний університет ім. М. Є. Жуковського «Харківський авіаційний інститут», Харків, Україна.

**Барахов Костянтин Петрович** – канд. техн. наук, старш. викл. каф. вищої математики та системного аналізу, Національний аерокосмічний університет ім. М. Є. Жуковського «Харківський авіаційний інститут» Харків, Україна.

**Вамболь Олексій Олександрович** – канд. техн. наук, доц., доц. каф. композиційних конструкцій і авіаційного матеріалознавства, Національний аерокосмічний університет ім. М. Є. Жуковського «Харківський авіаційний інститут», Харків, Україна.

**Степаненко Володимир Миколайович** – доц. каф. технології виробництва літальних апаратів, Національний аерокосмічний університет ім. М. Є. Жуковського «Харківський авіаційний інститут», Харків, Україна.

**Sergiy Kurennov** – Doctor of Technical Science, Professor of Higher Mathematics and System Analysis Chair, National Aerospace University "Kharkiv Aviation Institute", Kharkiv, Ukraine, e-mail: kurennov.ss@gmail.com, ORCID: 0000-0002-3835-3288.

**Kostiantyn Barakhov** – Candidate of Technical Science, Senior lecturer of Higher Mathematics and System Analysis Chair, National Aerospace University "Kharkiv Aviation Institute", Kharkiv, Ukraine, e-mail: kpbarkhov@gmail.com, ORCID: 0000-0003-1714-7917.

**Olexiy Vambol** – Candidate of Technical Science, Associate Professor of Department of Composite Structures and Aviation Materials, National Aerospace University "Kharkiv Aviation Institute", Kharkiv, Ukraine, e-mail: olexii.vambol@khai.edu, ORCID: 0000-0002-1719-8063.

**Volodymyr Stepanenko** – Associate Professor of Aircraft Manufacturing Department, National Aerospace University "Kharkiv Aviation Institute", Kharkiv, Ukraine, e-mail: v.stepanenko@khai.edu, ORCID: 0000-0001-6878-7637.