УДК 621.396

І.В. БАРИШЕВ[1], О.В. ВИСОЦЬКИЙ[2]

[1]*Національний аерокосмічний університет ім. М.Є. Жуковського «ХАІ», Україна*
[2]*Харківський інститут Військово-Повітряних Сил ім. Івана Кожедуба, Україна*

АЛГОРИТМ ОЦІНКИ ТОЧНОСТНИХ ХАРАКТЕРИСТИК РАДІОТЕХНІЧНОЇ СИСТЕМИ УПРАВЛІННЯ ПОСАДКОЮ ЛІТАКІВ

В роботі синтезований алгоритм оцінки точностних характеристик радіотехнічної системи управління посадкою літаків на основі використання методу Монте-Карло для дослідження ймовірностних характеристик попадання значень положення ЛА в круг заданих розмірів

радіотехнічна система, посадка літаків, літальний апарат, точка прийняття рішення, точностні характеристики, статистичні оцінки

Вступ

Роботі радіотехнічної системи управління посадкою літаків (РТС УПЛ) з виведення ЛА в точку прийняття рішення (ТПР) на здійснення посадки присутні погрішності, обумовлені як систематичними помилками, так і випадковими факторами, що приводить загалом до помилки управління. Тому для оцінки точностних характеристик системи необхідно отримати алгоритм оцінки, а потім провести статистичні дослідження її роботи моделюванням.

1. Формулювання проблеми

На практиці, як правило, можна отримати кінцеве, часто зовсім невелике число спостережень. Тому за їх результатами можна лише приблизно сказати про значення шуканих імовірних характеристик. В той же час, статистичні оцінки повинні бути спроможними, незміщеними та ефективними [1, 2]. Статистична оцінка спроможна, якщо вона сходиться за ймовірністю із шуканою величиною; незміщена, якщо при будь-якому об'ємі вибірки її математичне очікування співпадає із шуканим параметром; ефективна, якщо з декількох спроможних та незміщених оцінок вибирається та, яка має найменшу дисперсію.

Відповідно [3, 4], якщо $x_1, y_1, z_1, \ldots, x_k, y_k, z_l$ - значення випадкових величин із нормальним розподілом, отриманих внаслідок виконання n незалежних досліджень в однакових умовах, то спроможні та незміщені оцінки для математичних очікувань $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$, дисперсій $\sigma_x^2, \sigma_y^2, \sigma_z^2$ і кореляційного моменту випадкових величин визначається як:

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \\ \bar{y} &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i\ , \\ \bar{z} &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} z_i \end{aligned} \qquad (1)$$

$$\begin{aligned} \sigma_x^2 &= k_n^2 \cdot \left[\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2\right], \\ \sigma_y^2 &= k_n^2 \cdot \left[\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2\right], \\ \sigma_z^2 &= k_n^2 \cdot \left[\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(z_i-\bar{z})^2\right], \end{aligned} \qquad (2)$$

де k_n - коефіцієнт, значення якого визначається числом проведених досліджень:

$$k_n = \sqrt{\frac{n-1}{2}} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}. \qquad (3)$$

Оцінку коефіцієнта кореляції ρ знаходять за формулою

$$\rho = \frac{k_{xyz}}{\sigma_x \sigma_y \sigma_z}, \qquad (4)$$

де

$$k_{xyz} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})(z_i - \bar{z}). \qquad (5)$$

На рис. 1 показана система координат з реалізаціями експерименту, де положення програмної точки суміщено з початком декартової системи координат *OXYZ*, а x_i - значення помилки управління зі своїм знаком по осі *OX* в i-му експерименті, y_i - значення помилки управління зі своїм знаком по осі *O*Y в i-му експерименті; z_i - значення помилки управління зі своїм знаком по осі *OZ* в i-му експерименті.

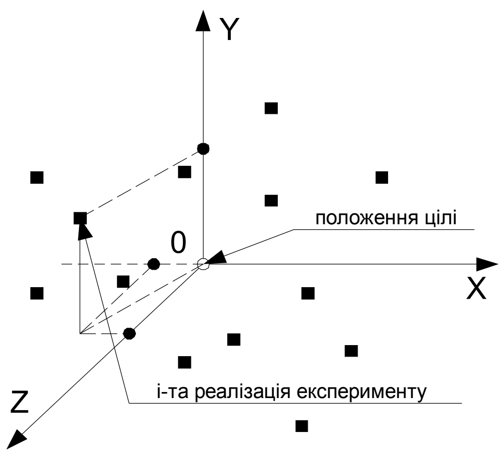

Рис. 1. Система координат із реалізаціями експерименту

Для знаходження ймовірних характеристик скористаємося трьохмірною щільністю ймовірності при $\rho \neq 0$:

$$P(x,y,z) = \frac{1}{2\pi\sqrt{2\pi}\sigma_x\sigma_y\sigma_z} \times \\ \times \exp\left\{ -\frac{1}{2(1`-\rho^2)}\left[\frac{(x_i-\bar{x})^2}{\sigma_x^2} + \frac{(y_i-\bar{y})^2}{\sigma_y^2} + \frac{(z_i-\bar{z})^2}{\sigma_z^2} - \frac{2\rho(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})(z_i-\bar{z})}{\sigma_x\sigma_y\sigma_z}\right]\right\}. \qquad (6)$$

Якщо показник ступені (6) покласти рівним постійному значенню $\frac{1}{2}C^2$, то отримаємо співвідношення між x, y і z:

$$\frac{1}{2(1`-\rho^2)}\left[\frac{(x_i-\bar{x})^2}{\sigma_x^2} + \frac{(y_i-\bar{y})^2}{\sigma_y^2} + \frac{(z_i-\bar{z})^2}{\sigma_z^2} - \frac{2\rho(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})(z_i-\bar{z})}{\sigma_x\sigma_y\sigma_z}\right] = C^2. \qquad (7)$$

Вираз (7) є рівнянням еліпсоїду, впродовж якого ймовірність $P(x,y,z)$ зберігає постійне значення, тому його називають еліпсоїдом рівних імовірностей, еліпсоїдом розсіювання. Вид даного еліпсоїда зображений на рис. 2.

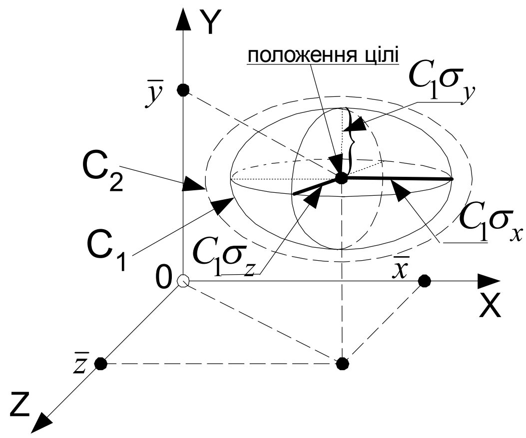

Рис. 2. Еліпсоїди розсіювання з різними

величинами заданих щільностей імовірностей

2. Визначення точностних характеристик радіотехнічної системи управління посадкою літаків

Імовірність виведення ЛА в ТПР, тобто в середину еліпса розсіювання, визначається наступним виразом:

$$P_V = \iiint_V P(x, y, z) dxdydz, \qquad (8)$$

де V - область, обмежена еліпсоїдом розсіювання із заданим розміром полуосей.

Після інтегрування (8) отримаємо:

$$P_V = 1 - \exp\left(-C^2/2\right), \qquad (9)$$

$$C = \sqrt{-2\ln(1 - P_V)}. \qquad (10)$$

За допомогою (9) може бути знайдена вірогідність попадання усередину еліпсоїду заданих розмірів, а з виразу (10) визначаються розміри еліпсоїду, вірогідність попадання якого зафіксована. Вираз (10) використовується у випадку, коли треба знайти область, усередині якої зосереджені всі отримані значення із заданою величиною вірогідності. Наприклад, можна знайти область, усередині якої зосереджено 99 % всіх результатів визначення кінцевого положення ЛА.

Таким чином, необхідно рішити задачу, пов'язану з визначення вірогідності виведення ЛА в ТПР, обмежену радіусом $R_{ТПР}$. Відповідно до рис. 3 не всі точки еліпсоїду розсіювання даного розміру попадуть в область, обмежену радіусом $R_{ТПР}$.

Для рішення поставленої задачі необхідно скористатися формулою (8), де V - область, обмежена радіусом $R_{ТПР}$, а $P(x, y, z)$ - щільність вірогідності (6) із відомими значеннями $\bar{x}, \bar{z}, \bar{y}, \sigma_x, \sigma_z, \sigma_y, \rho$. Для обчислення інтегралу (8) застосуємо один із методів численного рішення, а саме метод Монте-Карло (із використанням культурної форми Гауса), як найбільш сприятливий метод для моделювання на ЕОМ.

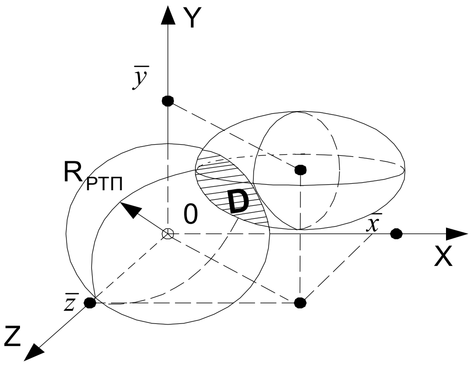

Рис. 3. Графічне представлення задачі оцінки точності управління

Представимо потрійний інтеграл (8) у вигляді

$$\begin{aligned} P_V &= \iiint_D P(x, y, z) dxdydz = \\ &= \iiint_{r\pi R_{ТПР}} g(x, y, z) dxdydz = , \\ &= \bar{g} \cdot \left(\frac{4}{3}\pi \cdot R^3_{ТПР}\right) \end{aligned} \qquad (11)$$

де D - сумісна область, яка належить сфері та еліпсоїду;

$\bar{g}$ - усереднена функція $g(x, y, z)$.

Функція $g(x, y, z)$ у рівнянні (11) відповідає виразу

$$g(x, y, z) = \begin{cases} P(x, y, z) \text{ при } (x, y, z) \in D, \\ 0 \qquad \text{ при } (x, y, z) \notin D. \end{cases} \qquad (12)$$

Таким чином, для знаходження значення вірогідності (11) необхідно обчислити усереднену функцію $\bar{g}$.

3. Алгоритм рішення задачі

Алгоритм рішення задачі оцінки точностних характеристик РТС УПЛ буде таким:

1. Вибираються три випадкових числа ξ, μ та η, які приймають значення випадкових чисел, що мають рівномірне розподілення в діапазоні 0...1.

2. Обчислюються сферичні координати випадкової точки усередині сфери

$$\varepsilon = 2\pi\xi, \qquad \psi = 2\pi\mu, \qquad r = R\sqrt{\eta}. \qquad (13)$$

3. Обчислюються декартові координати випадкової точки усередині сфери

$$\left.\begin{aligned} x &= r\sin(\varepsilon)\cos(\psi) \\ z &= r\sin(\varepsilon)\sin(\psi) \\ y &= r\cos(\varepsilon) \end{aligned}\right\}. \qquad (14)$$

4. Вводяться позначення для постійного коефіцієнта C, який визначає розмір еліпсоїду. Для вибраного розміру еліпсоїду (10) коефіцієнт C позначають із індексом "з", що відповідає заданому значенню, тобто $C_з$. Коефіцієнт C, обчислений по формулі (7) при використанні (14), має індекс "var", тобто C_{var}.

5. Виконується порівняння значень C_{var} і $C_з$.

6. Якщо $C_{var}^2 \pi C_з^2$, то по формулі (6) обчислюється щільність ймовірності $P(x, y, z)$, тому що при цьому випадкова точка з координатами (14) належить області D. Якщо $C_{var}^2 \phi C_з^2$, то координати випадкової точки належать тільки до області сфери і не належать еліпсоїду.

7. Всі значення $P(x, y, z)$, отримані при виконанні умови $C_{var}^2 \pi C_з^2$, складаються та діляться на число N, де N - загальне число точок усередині сфери. Тоді

$$\overline{g} = \frac{\sum\limits_{(x,y,z)\in D} P(x, y, z)}{N}, \text{ при } C_{var}^2 \pi C_з^2. \qquad (15)$$

Відповідно до (15) шукана ймовірність визначається виразом

$$P_D == \frac{\sum\limits_{(x,y,z)\in D} P(x, y, z)}{N} \cdot \left(\frac{4}{3} \cdot \pi \cdot R_{ТПР}^3\right), \qquad (16)$$

Висновок

Таким чином, маючи алгоритм оцінки точностних характеристик РТС УПЛ, який дозволяє отримати ймовірність попадання значень положення ЛА в круг заданих розмірів, можна провести комплексне моделювання процесу виведення ЛА в ТПР.

Дослідженням ймовірностних характеристик роботи радіотехнічної системи управління посадкою літаків присвячені подальші роботи авторів.

Література

1. Ждаюк Б.Ф. Основы статистической обработки траекторных измерений. - М.: Сов. радио, 1979. - 384 с.

2. Luenberger D.G. Optimization by Vector Space Methods. Wiley, New York, 1989. - 328 p.

3. Анго А. Математика для электро и радиосигналов. - М.: Наука, 1965. - 780 с.

4. Абчук В.А., Матвейчук Ф.А., Томашевский Л.П. Справочник по исследования операций. - М.: МО СССР, 1979. - 368 с.

Надійшла до редакції 11.10.03

Рецензент: д-р техн. наук, професор Колпаков Ф.Ф., Національний аерокосмічний університет ім. М.Є. Жуковського „ХАІ", м. Харків