

УДК 512.152

В.А. ПОПОВ, Н.С. ФИЛЕНКО, О.Ю. МИРОНЕНКО*Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского "ХАИ", Украина***НЕПУАССОНОВСКИЕ МОДЕЛИ МНОГОКАНАЛЬНОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ С ОГРАНИЧЕННЫМ НАКОПИТЕЛЕМ**

Предложены модели разомкнутых многоканальных систем массового обслуживания (СМО) с ограниченными накопителями, когда один из потоков требований (входной или обслуживающий) имеет распределение Эрланга, что позволяет использовать их для моделирования широкого класса объектов. Получены системы уравнений относительно вероятностей микросостояний, а также аналитические выражения вероятностей состояний для некоторых систем. Использование программного пакета MathCAD подтвердило правомерность аналитических моделей путем решения серии тестовых примеров.

система массового обслуживания, распределение Эрланга, метод фаз, граф состояний и переходов**Введение и постановка задачи**

Актуальность данной проблемы обусловлена необходимостью применения непуассоновских моделей обслуживания с ограниченными накопителями и произвольными распределениями входного потока и потока обслуживания, так как именно указанные выше особенности являются характерными для реальных систем [1, 2, 3]. В целом ряде случаев возможны отклонения распределений реальных потоков от пуассоновских, а конечные накопители отражают неизбежные на практике ограничения на длину очереди перед обслуживанием заявок.

Целью данной статьи является разработка аналитических моделей для указанных выше условий и требований на основе составления системы уравнений методом Колмогорова и получение расчетных формул для вероятностей состояний при ограниченном числе каналов и емкости буферной памяти.

Особенности методов Эрланга и Колмогорова для многоканальных систем

Для построения графа состояний и переходов рассматриваемых систем используется метод фаз или метод Эрланга [4, 5], в основе которого лежит механизм сведения непуассоновской СМО к пуассо-

новской, если в системе действуют потоки событий, описываемые распределениями, представимыми как совокупность экспоненциальных. Сущность метода состоит в выделении некоторых фиктивных этапов (фаз), распределение времени между которыми подчинено экспоненциальному закону. Такое преобразование дает возможность использовать уравнения типа размножения и гибели.

Таким образом, при эрланговском распределении k -го порядка

$$F(t) = 1 - \sum_{i=1}^k \frac{(\alpha t)^{i-1}}{(i-1)!} \cdot e^{-\alpha t} \quad (1)$$

каждая заявка в промежутке между соседними событиями потока как бы проходит через k последовательно расположенных фаз, а время прохождения заявки между соседними фазами распределено по экспоненциальному закону с параметром $k\alpha$, где α обозначает λ (интенсивность входного потока) или μ (интенсивность потока обслуживания). Только после того, как текущая заявка пройдет k -ю фазу, следующая сможет поступить на первую.

Используя метод фаз, строится граф микросостояний и переходов между ними, на основе которого составляется система дифференциальных или алгебраических уравнений относительно вероятностей микросостояний [6, 7].

Двухканальные системы с эрланговским распределением времени обслуживания $M/E_k/2/N/\infty/Fifo$

В систему поступает пуассоновский входной поток, время обработки имеет распределение Эрланга k -го порядка. Заявка, поступившая в систему, идет на один из свободных обслуживающих каналов. Если все они заняты, то заявка становится в очередь из N мест или получает отказ в случае переполнения буфера. Заявки из очереди извлекаются в соответствии с законом *Fifo* – первой обслуживается заявка, стоящая первой в очереди.

В начале обслуживания заявка поступает на первую фазу, пройдя ее – немедленно переходит на следующую фазу. До момента полного обслуживания заявки на последней k -й фазе в прибор не может поступить следующая заявка.

Идентификатор каждого микросостояния состоит из k цифр, показывающих, сколько заявок находится на соответствующей фазе обслуживания, в скобках указываются порядковые номера микросостояний, которые используются при составлении систем уравнений.

Для отображения количества заявок в системе для определенных микросостояний введены ярусы графа.

Приведем примеры моделей с распределениями Эрланга 2-го и 3-го порядков.

Модель системы с распределением Эрланга второго порядка. В соответствии с п. 1 были составлены графы микросостояний и переходов между ними для ряда систем.

Для модели $M/E_2/2/N$ граф микросостояний и переходов имеет следующий вид (рис. 1). На основании разработанного графа составлена система алгебраических уравнений (табл. 1), где x_i – неизвестные вероятности микросостояний, $i = 0, \dots, n$; $n = 3 \cdot (N + 2) - 1$, $\alpha = \lambda / 2\mu$.

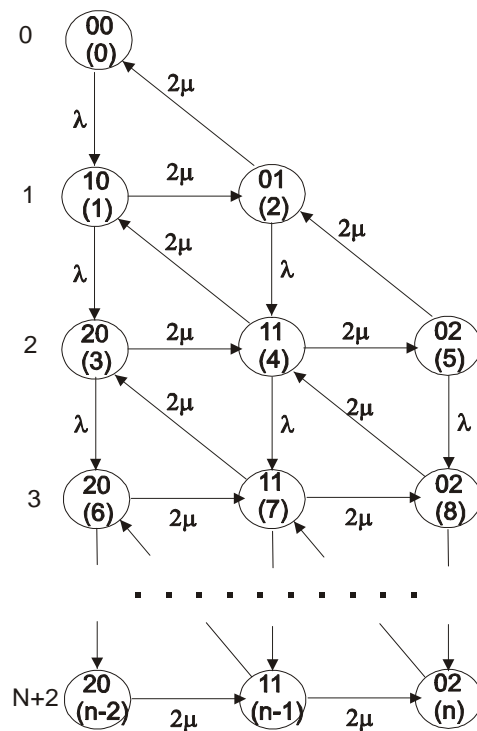


Рис. 1. Граф микросостояний для модели $M/E_2/2/N$

Таблица 1

Система уравнений для модели $M/E_2/2/N$

Уровни	Уравнения (при $r > 1, N > 1$)	Индексы
0	$0 = x_2 - \alpha x_0$	$i = 0$
1	$0 = \alpha x_0 + x_4 - (\alpha + 1)x_1$	$i = 1$
	$0 = x_1 + x_5 - (\alpha + 1)x_2$	$i = 2$
2	$0 = \alpha x_1 + x_7 - (\alpha + 1)x_3$	$i = 3$
	$0 = \alpha x_2 + x_3 + x_8 - (\alpha + 2)x_4$	$i = 4$
	$0 = x_4 - (\alpha + 1)x_5$	$i = 5$
3, ..., N + 1	$0 = \alpha x_{i-3} + x_{i+4} - (\alpha + 1)x_i$	$i = 6, 9, \dots, n - 5$
	$0 = \alpha x_{i-3} + x_{i-1} + x_{i+4} - (\alpha + 2)x_i$	$i = 7, 10, \dots, n - 4$
	$0 = \alpha x_{i-3} + x_{i-1} - (\alpha + 1)x_i$	$i = 8, 11, \dots, n - 3$
N + 2	$0 = \alpha x_{n-5} - x_{n-2}$	$i = n - 2$
	$0 = \alpha x_{n-4} + x_{n-2} - 2x_{n-1}$	$i = n - 1$
	$0 = \alpha x_{n-3} + x_{n-1} - x_n$	$i = n$
	$\sum_{i=0}^n x_i = 1$	

Уравнения в табл. 1 представлены для случая $N > 1$; в случае $N = 0$ необходимо использовать уравнения для 0, 1, $N + 2$ уровней (причем, уравнения $N + 2$ уровня необходимо будет несколько из-

менить в соответствии с графом состояний), а при $N = 1$ – уравнения 0, 1, 2, $N + 2$ уровней.

Для перехода от вероятностей микросостояний x_i к вероятностям макросостояний системы p_j необходимо использовать выражения:

$$p_0 = x_0, p_1 = \sum_{i=1}^2 x_i, p_j = \sum_{i=3(j-1)}^{3j-1} x_i, j = 2, \dots, N + 2. \quad (2)$$

Рассмотрим пример применения данных выражений на конкретной модели. Например, при $N = 0$ получим следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} 0 &= x_2 - \alpha x_0; \\ 0 &= \alpha x_0 + x_4 - (\alpha + 1)x_1; \\ 0 &= x_1 + x_5 - (\alpha + 1)x_2; \\ 0 &= \alpha x_1 - x_3; \\ 0 &= \alpha x_2 + x_3 - 2x_4; \\ 0 &= x_4 - x_5; \\ x_0 + x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 &= 1. \end{aligned}$$

Решением данной системы будут следующие выражения:

$$\begin{aligned} x_0 &= (3\alpha^2 + 2\alpha + 1)^{-1}; \\ x_1 &= x_2 = \alpha x_0; \\ x_3 &= x_4 = x_5 = \alpha^2 x_0. \end{aligned}$$

Или с учетом выражений (2):

$$\begin{aligned} p_0 &= \frac{1}{3\alpha^2 + 2\alpha + 1}; p_1 = \frac{2\alpha}{3\alpha^2 + 2\alpha + 1}; \\ p_2 &= \frac{3\alpha^2}{3\alpha^2 + 2\alpha + 1}. \end{aligned}$$

Модель системы с распределением Эрланга третьего порядка. На рис. 2 представлен граф микросостояний и переходов для модели $M/E_3/2/N$.

Для этого случая также составлена система алгебраических уравнений (табл. 2) с неизвестными вероятностями микросостояний $x_i, i = 0, \dots, n, n = 6 \cdot (N + 2) - 3, \alpha = \lambda / 3\mu$.

Переход от вероятностей микросостояний x_i к вероятностям макросостояний системы p_j осуществляется по выражениям:

$$p_0 = x_0, p_1 = \sum_{i=1}^3 x_i, p_j = \sum_{i=2(3j-1)}^{3(2j-1)} x_i, j = 2, \dots, N + 2. \quad (3)$$

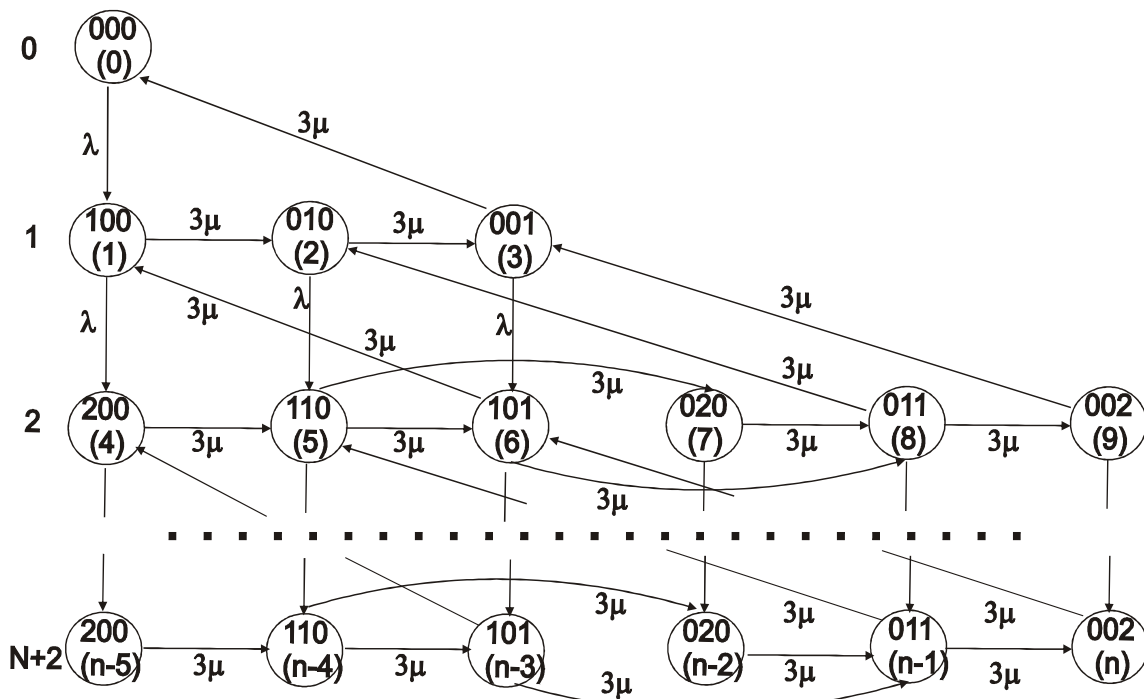


Рис. 2. Граф микросостояний для модели $M/E_3/2/N$

Таблица 2

Система уравнений для модели M/E ₃ /2/N		
Уровни	Уравнения (при $r > 1, N > 1$)	Индексы
0	$0 = x_3 - \alpha x_0$	$i = 0$
1	$0 = \alpha x_0 + x_6 - (\alpha + 1)x_1$ $0 = x_{i-1} + x_{i+6} - (\alpha + 1)x_i$	$i = 1$ $i = 2, 3$
2	$0 = \alpha x_1 + x_{12} - (\alpha + 1)x_4$ $0 = \alpha x_{i-3} + x_{i-1} + x_{i+9} - (\alpha + 2)x_i$ $0 = x_5 - (\alpha + 1)x_7$ $0 = x_6 + x_7 - (\alpha + 2)x_8$ $0 = x_8 - (\alpha + 1)x_9$	$i = 4$ $i = 5, 6$ $i = 7$ $i = 8$ $i = 9$
3, ..., N + 1	$0 = \alpha x_{i-6} + x_{i+8} - (\alpha + 1)x_i$ $0 = \alpha x_{i-6+s} + x_{i-1+s} + x_{i+9+s} - (\alpha + 2)x_{i+s}$ $0 = \alpha x_{i-6} + x_{i-2} - (\alpha + 1)x_i$ $0 = \alpha x_{i-6} + x_{i-2} + x_{i-1} - (\alpha + 2)x_i$ $0 = \alpha x_{i-6} + x_{i-1} - (\alpha + 1)x_i$	$i = 10, 16, \dots, n-11$ $i = 11, 17, \dots, n-10; s = 0, 1$ $i = 13, 19, \dots, n-8$ $i = 14, 20, \dots, n-7$ $i = 15, 21, \dots, n-6$
N + 2	$0 = \alpha x_{n-11} - x_{n-5}$ $0 = \alpha x_{n-10+s} + x_{n-5+s} - 2x_{n-4+s}$ $0 = \alpha x_{n-8} + x_{n-4} - x_{n-2}$ $0 = \alpha x_{n-7} + x_{n-3} + x_{n-2} - 2x_{n-1}$ $0 = \alpha x_{n-6} + x_{n-1} - x_n$	$i = n-5$ $i = n-4; s = 0, 1$ $i = n-2$ $i = n-1$ $i = n$
	$\sum_{i=0}^n x_i = 1$	

Рассмотрим пример применения данных выражений на конкретной модели. Например, при $N = 0$ получим следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned}
 0 &= x_3 - \alpha x_0; \\
 0 &= \alpha x_0 + x_6 - (\alpha + 1)x_1; \\
 0 &= x_1 + x_8 - (\alpha + 1)x_2; \\
 0 &= x_2 + x_9 - (\alpha + 1)x_3; \\
 0 &= \alpha x_1 - x_4; \\
 0 &= \alpha x_2 + x_4 - 2x_5; \\
 0 &= \alpha x_3 + x_5 - 2x_6; \\
 0 &= x_5 - x_7; \\
 0 &= x_6 + x_7 - 2x_8; \\
 0 &= x_8 - x_9; \\
 x_0 + x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 + x_9 &= 1.
 \end{aligned}$$

Решением данной системы будут следующие выражения:

$$\begin{aligned}
 x_0 &= (6\alpha^2 + 3\alpha + 1)^{-1}; \\
 x_1 &= x_2 = x_3 = \alpha x_0; \\
 x_4 &= x_5 = x_6 = x_7 = x_8 = x_9 = \alpha^2 x_0.
 \end{aligned}$$

Или с учетом выражений (3):

$$\begin{aligned}
 P_0 &= \frac{1}{6\alpha^2 + 3\alpha + 1}; \quad P_1 = \frac{3\alpha}{6\alpha^2 + 3\alpha + 1}; \\
 P_2 &= \frac{6\alpha^2}{6\alpha^2 + 3\alpha + 1}
 \end{aligned}$$

Многоканальные системы E_r/M/m/N/∞/Fifo

В систему поступает входной поток с распределением Эрланга r -го порядка. Считаем, что заявка попадает в фиктивное приемное устройство, в котором проходит последовательно r фаз. Фиктивный прибор может в конкретный момент времени содержать не более одной заявки, т.е. после поступления заявки на первую фазу и до момента ее выхода с последней фазы прибор не может принять следующую. Время обработки подчинено экспоненциальному закону. Заявка обрабатывается в одном из свободных приборов, если она застает все m приборов занятыми, то становится в очередь из N мест или получает отказ в случае переполнения буфера.

Расширенное множество состояний, т.е. микросостояний, включает в себя состояния, отличающиеся количеством заявок (первая цифра) и фазой входного потока (вторая цифра), в скобках также указываются порядковые номера микросостояний. Граф состояний и переходов представлен на рис. 3.

Приведем общую систему алгебраических выражения: уравнений (табл. 3) для указанного класса моделей с неизвестными $x_i, i = 0, \dots, n; n = r \cdot (N + m); \alpha = r\lambda/\mu$.

Для нахождения вероятностей макросостояний системы p_j необходимо использовать следующие

$$p_j = \sum_{i=rj}^{r(j+1)-1} x_i, p_{N+m} = x_n, j = 0, \dots, N + m - 1. \quad (4)$$

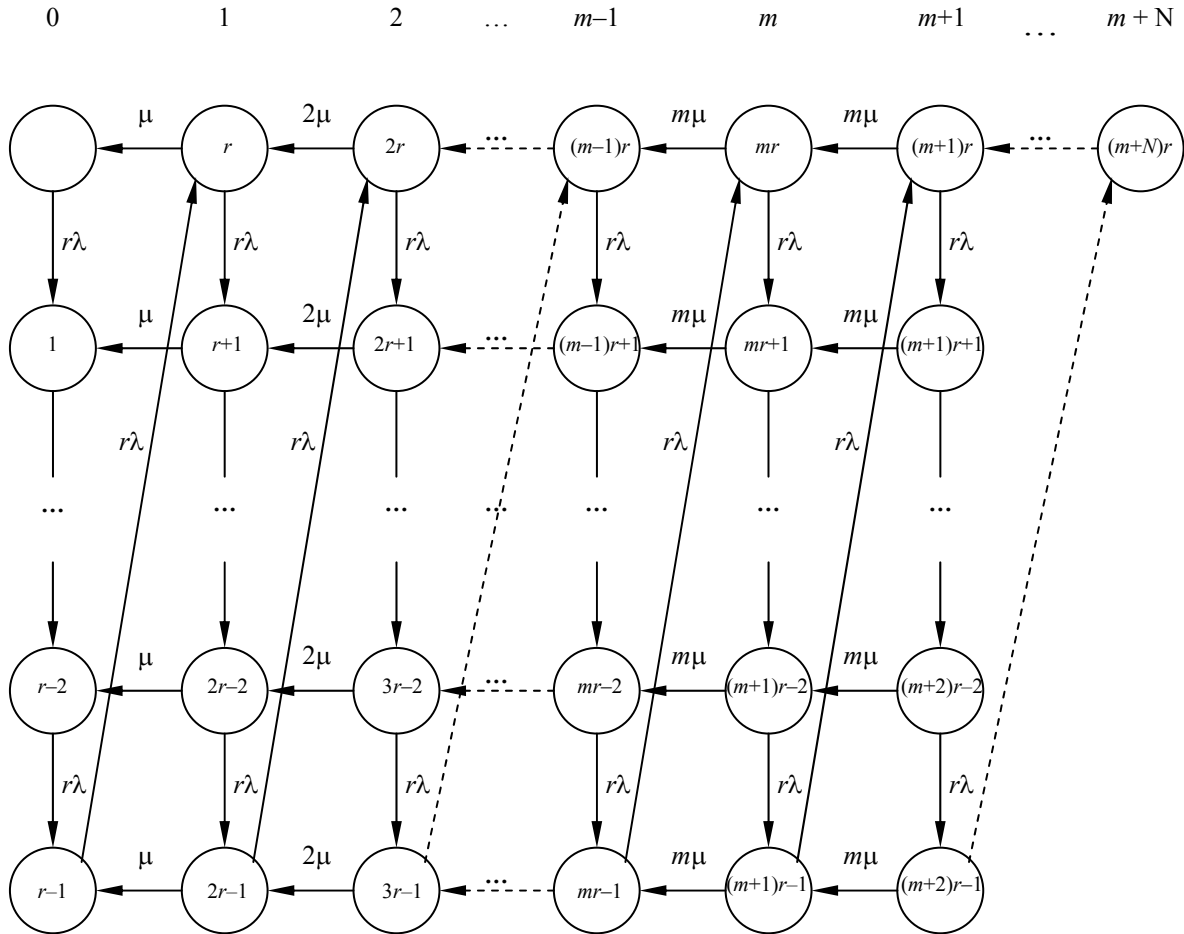


Рис. 3. Граф микросостояний для систем E_r/M/m/N

Таблица 3 Система уравнений для модели E_r/M/m/N

Кол-во заявок	Уравнения	Индексы
0	$0 = \mu x_r - r \lambda x_0$ $0 = r \lambda x_{i-1} + \mu x_{i+r} - r \lambda x_i$	$i = 0$ $i = 1, \dots, r - 1$
1	$0 = r \lambda x_{i-1} + 2 \mu x_{i+r} - (\mu + r \lambda) x_i$	$i = r, \dots, 2r - 1$
2	$0 = r \lambda x_{i-1} + 3 \mu x_{i+r} - (2\mu + r \lambda) x_i$	$i = 2r, \dots, 3r - 1$
...
m - 1	$0 = r \lambda x_{i-1} + m \mu x_{i+r} - ((m - 1)\mu + r \lambda) x_i$	$i = (m - 1)r, \dots, mr - 1$
m	$0 = r \lambda x_{i-1} + m \mu x_{i+r} - (m\mu + r \lambda) x_i$	$i = mr, \dots, (m + 1)r - 1$

...
m + N	$0 = r \lambda x_{n-1} - m \mu x_n$	$i = (m + N)r$
	$\sum_{i=0}^n x_i = 1$	

Рассмотрим пример, для которого возьмем модель E₂/M/2/1. Система уравнений будет следующая:

$$\begin{aligned} 0 &= \mu x_2 - 2 \lambda x_0; \\ 0 &= 2 \lambda x_0 + \mu x_3 - 2 \lambda x_1; \\ 0 &= 2 \lambda x_1 + 2 \mu x_4 - (\mu + 2 \lambda) x_2; \\ 0 &= 2 \lambda x_2 + 2 \mu x_5 - (\mu + 2 \lambda) x_3; \\ 0 &= 2 \lambda x_3 + 2 \mu x_6 - (2 \mu + 2 \lambda) x_4; \\ 0 &= 2 \lambda x_4 - (2 \mu + 2 \lambda) x_5; \\ 0 &= 2 \lambda x_5 - 2 \mu x_6; \\ x_0 + x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 &= 1. \end{aligned}$$

Решением вышеуказанной системы будет:

$$x_0 = \frac{1}{2} \cdot \frac{(2a^2 + 4a + 1)}{(2a^5 + 4a^4 + 8a^3 + 10a^2 + 6a + 1)};$$

$$x_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{(6a^2 + 6a + 1)}{(2a^5 + 4a^4 + 8a^3 + 10a^2 + 6a + 1)};$$

$$x_2 = a \cdot \frac{(2a^2 + 4a + 1)}{(2a^5 + 4a^4 + 8a^3 + 10a^2 + 6a + 1)};$$

$$x_3 = 2a^2 \cdot \frac{(2a + 1)}{(2a^5 + 4a^4 + 8a^3 + 10a^2 + 6a + 1)};$$

$$x_4 = 2a^3 \cdot \frac{(a + 1)}{(2a^5 + 4a^4 + 8a^3 + 10a^2 + 6a + 1)};$$

$$x_5 = 2 \cdot \frac{(a^4)}{(2a^5 + 4a^4 + 8a^3 + 10a^2 + 6a + 1)};$$

$$x_0 = 2 \cdot \frac{(a^5)}{(2a^5 + 4a^4 + 8a^3 + 10a^2 + 6a + 1)},$$

где $a = \frac{\lambda}{\mu}$.

Для нахождения p_i воспользуемся формулами (4). В результате окончательно получим:

$$p_0 = \frac{(4a^2 + 5a + 1)}{(2a^5 + 4a^4 + 8a^3 + 10a^2 + 6a + 1)};$$

$$p_1 = \frac{(6a^3 + 6a^2 + a)}{(2a^5 + 4a^4 + 8a^3 + 10a^2 + 6a + 1)};$$

$$p_2 = \frac{(4a^4 + 2a^3)}{(2a^5 + 4a^4 + 8a^3 + 10a^2 + 6a + 1)};$$

$$p_3 = \frac{(2a^5)}{(2a^5 + 4a^4 + 8a^3 + 10a^2 + 6a + 1)}.$$

Заключение

Полученные в данной работе аналитические модели непуассоновских СМО могут использоваться при разработке и совершенствовании систем управления, когда объект управления адекватно представляется через соответствующую модель СМО.

Используя возможности пакета MathCAD, был решен ряд предложенных примеров СМО. Полученные значения характеристик (среднее число и время

нахождения заявок в очереди и системе обслуживания соответственно) подтвердили правомерность разработанных графов и систем уравнений

Некоторые из предложенных моделей были использованы для анализа процесса тестирования программного обеспечения и подготовки решений для управления персоналом и длительностью рабочих смен.

Литература

1. Таранцев А.А., Эрьюжев М.В. Об аналитических соотношениях в одноканальных незамкнутых системах массового обслуживания // Известия академии наук. Теория и системы управления. – 2004. – № 1. – С. 120 – 124.
2. Заикин О.А. Математическая модель распределения ресурсов в АСУ производством нематериальной продукции // Автоматика и телемеханика. – 2002. – № 8. – С. 32 – 39.
3. Основы моделирования сложных систем / Под общ. ред. И.В. Кузьмина – К.: Вища школа. – 1981. – 360 с.
4. Клейнрок Л. Теория массового обслуживания. Пер. с англ. / Пер. И.И. Глушко; ред. В.И. Нейман. – М.: Машиностроение, 1979. – 432 с, ил.
5. Рыжиков Ю.И. Алгоритм расчета многоканальной системы с эрланговским обслуживанием // Автоматика и телемеханика. – 1980. – № 5. – С. 30 – 37.
6. Попов В.А., Мироненко О.Ю. Анализ систем обслуживания с гиперэкспоненциальными и эрланговскими потоками // Радиоэлектронные и компьютерные системы. – 2004. – № 3 (7). – С. 80 – 88.
7. Белов А.П., Попов В.А., Н.Л. Литвинов, Герба-ли С.Н. Автоматизированные системы управления с цифровыми вычислительными машинами. – Х.: ХВВКУ, 1974. – 176 с.

Поступила в редакцию 22.11.2005

Рецензент: д-р техн. наук, проф. А.Ю. Соколов, Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского «ХАИ», Харьков.