

УДК 621.371.322

И.П. ЗАЙКИН, Д.В.УДАЧИН

Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского “ХАИ”, Украина

ДИФРАКЦИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН НА НЕСИММЕТРИЧНОМ СОЕДИНЕНИИ ДВУХ СТРУКТУР ПРЯМОУГОЛЬНОГО СЕЧЕНИЯ. ЧАСТЬ 2. СУЩЕСТВОВАНИЕ И ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЯ. ГЕОМЕТРООПТИЧЕСКОЕ И ДЛИННОВОЛНОВОЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ

Получены выражения для коэффициентов преобразования в случаях геометрического и длинноволнового приближений при решении задачи рассеяния электромагнитных волн Н – и Е – поляризации на несимметричном соединении двух структур прямоугольного сечения. Представлены результаты численных расчетов для этих приближений при различных геометрических соотношениях в структуре.

поляризация, резонатор, волновод, коэффициенты преобразования

Введение

Система уравнений (28; [1], часть 1) всегда, в принципе, может быть решена с любой заданной точностью, однако то обстоятельство, что она имеет бесконечный порядок, заставляет обосновывать законность используемых методов решения. Необходимо, в частности, доказательство существования и единственности решения системы.

Формулирование проблемы. Строгое решение задачи дифракции электромагнитных волн на стыке прямоугольного резонатора и волновода завершено получением бесконечной системы линейных алгебраических уравнений второго рода

$$c_v - \sum_{n=1}^{\infty} c_n P_{nv} = -\beta_v^p \sigma_p^p, \quad (1)$$

где

$$P_{nv} = \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_m^n \beta_v^m = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{L_n^2 - 1}{L_m^2 + 1} \cdot \frac{1}{\Gamma_m \pi^2 r} \times \\ \times \frac{nv \left(\frac{m}{2r}\right)^2 (1 - L_m^2)}{\gamma_v [\gamma_n^2 - (m/2)^2] [\Gamma_m^2 - v^2]}, \quad (2)$$

Система уравнений (1) не охватывается хорошо разработанными теориями регулярных систем типа Кох [2] и в общем виде с большим трудом поддается

анализу. Но можно показать, что она имеет единственное решение в L_2 . Если выполняется соотношение

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{v=1}^{\infty} |P_{nv}|^2 < \infty,$$

то в гильбертовом пространстве L_2 матрица $\|P_{nv}\|$ представляет собой вполне непрерывный оператор. И если столбец правых частей в (1) также принадлежит к пространству L_2 , то в силу альтернативы Фредгольма [3] существует единственное решение неоднородной системы, принадлежащее L_2 . Принадлежность решения системы пространству L_2 обеспечивает выполнение условия конечности энергии рассеянного поля в любой ограниченной части пространства.

Решение проблемы

Оценка P_{nv} в (2) при больших m, n, v позволяет записать (1) в виде

$$c_v - \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sqrt{n} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m \sqrt{n}}{(m^2 + n^2)(m^2 + v^2)} = \\ = -\frac{pi}{p^2 + v^2} \sigma_p^p. \quad (3)$$

Перенормировав (3), получим

$$c_v \sqrt{v} - \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sqrt{n} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m \sqrt{nv}}{(m^2 + n^2)(m^2 + v^2)} =$$

$$= -\frac{pi \sqrt{v}}{p^2 + v^2} \sigma_p^p, \quad (4)$$

откуда:

$$x_v - \sum_{n=1}^{\infty} x_n A_{nv} = -\frac{pi \sqrt{v}}{p^2 + v^2} \sigma_p^p, \quad (5)$$

где

$$x_v = c_v \sqrt{v};$$

$$x_n = c_n \sqrt{n};$$

$$A_{nv} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m \sqrt{nv}}{(m^2 + n^2)(m^2 + v^2)}.$$

Покажем, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{v=1}^{\infty} |A_{nv}|^2 < \infty. \quad (6)$$

Так как

$$\frac{1}{(m^2 + n^2)(m^2 + v^2)} =$$

$$= \frac{1}{(n^2 - v^2)} \left(\frac{1}{m^2 + v^2} - \frac{1}{m^2 + n^2} \right),$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{v=1}^{\infty} |A_{nv}|^2 =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{v=1}^{\infty} n v \sum_{m=1}^{\infty} \left[\frac{m}{(m^2 + n^2)(m^2 + v^2)} \right]^2 =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{v=1}^{\infty} \frac{nv}{(n^2 - v^2)^2} \times$$

$$\times \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \frac{(m^2 + v^2) - v^2}{(m^2 + v^2)^2} + \frac{(m^2 + n^2) - n^2}{(m^2 + n^2)^2} - \right.$$

$$\left. - \frac{2}{n^2 - v^2} \left[\frac{(m^2 + v^2) - v^2}{m^2 + v^2} - \frac{(m^2 + n^2) - n^2}{m^2 + n^2} \right] \right\} =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{v=1}^{\infty} \frac{nv}{(n^2 - v^2)^2} \times$$

$$\times \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2 + v^2} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2 + n^2} - \right.$$

$$\left. - v^2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(m^2 + v^2)^2} - \right.$$

$$- n^2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(m^2 + n^2)^2} - \frac{2}{n^2 - v^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m^2 + v^2}{m^2 + v^2} +$$

$$+ \frac{2v^2}{n^2 + v^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2 + v^2} +$$

$$\left. + \frac{2}{n^2 - v^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m^2 + n^2}{m^2 + n^2} - \frac{2n^2}{n^2 - v^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2 + n^2} \right\}.$$

Используя интегральное представление сумм, получаем:

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2 + v^2} = \frac{1}{v} \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{1}{v} \right) < \frac{\pi}{2v},$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2 + n^2} = \frac{1}{n} \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{1}{n} \right) < \frac{\pi}{2n},$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(m^2 + v^2)^2} = \frac{1}{v^3} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{v}{1+v^2} - \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{1}{v} \right) <$$

$$< \frac{\pi}{4v^3},$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(m^2 + n^2)^2} = \frac{1}{n^3} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{n}{1+n^2} - \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{1}{n} \right) <$$

$$< \frac{\pi}{4n^3}.$$

Тогда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{v=1}^{\infty} |A_{nv}|^2 < \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{v=1}^{\infty} \left| \frac{nv}{(n^2 - v^2)^2} \times \right.$$

$$\times \left(\frac{\pi}{2v} + \frac{\pi}{2n} - \frac{\pi}{4v} - \frac{\pi}{4n} + \frac{\pi v}{n^2 - v^2} - \frac{\pi n}{n^2 - v^2} \right) \Bigg| = (7)$$

$$= \left| -\frac{3\pi}{4} \sum_{n=1}^{\infty} n \sum_{v=1}^{\infty} \frac{1}{(n^2 - v^2)^2} + \frac{\pi}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{v=1}^{\infty} \frac{v}{(n^2 - v^2)^2} + \right.$$

$$\left. + \pi \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \sum_{v=1}^{\infty} \frac{1}{(n^2 - v^2)^2 (n+v)} \right|.$$

Заменяя в последнем выражении суммы интегралами, найдем:

$$\sum_{v=1}^{\infty} \frac{1}{(n^2 - v^2)^2} = -\frac{1}{2n^3} \left(\frac{n}{n^2 - 1} + \frac{1}{2} \ln \frac{n+1}{n-1} \right) <$$

$$< \frac{1}{4n^3 \sqrt{n}};$$

$$\sum_{v=1}^{\infty} \frac{v}{(n^2 - v^2)^2} = \frac{1}{n^2} \cdot \frac{n^2}{n^2 - 1} < \frac{1}{n^2};$$

$$\ln \frac{n+1}{n-1} < \frac{1}{\sqrt{n}};$$

$$\sum_{v=1}^{\infty} \frac{1}{(n+v)(n^2 - v^2)^2} =$$

$$= \frac{1}{4n^4} \left(\frac{n^2}{2(n+1)^2} + \frac{n}{2(n+1)} - \frac{3}{4} \ln \frac{n+1}{n-1} \right) <$$

$$< \frac{1}{8n^4}.$$

Тогда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{v=1}^{\infty} |A_{nv}|^2 <$$

$$< \left| -\frac{3\pi}{16} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 \sqrt{n}} + \frac{\pi}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} + \frac{\pi}{8} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \right| =$$

$$= \left| \frac{3\pi}{8} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} - \frac{3\pi}{16} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 \sqrt{n}} \right| = \left| -\frac{3\pi}{8n} + \frac{3\pi}{8\sqrt{n}} \right| < \infty$$

при $n \rightarrow \infty$.

Столбец правых частей системы $\sqrt{v} \beta_v^p \sigma_p^p$ ведет себя как $1/v$, т.е. тоже принадлежит к L_2 и, таким образом, система (1) имеет единственное решение в L_2 .

Для получения приближенных решений обычно пользуются методом редукции, но при этом возникают вопросы: сходится ли метод редукции; если да, то к какому пределу; какова скорость сходимости; устойчиво ли решение и т.д. Обычно ограничиваются численным исследованием метода редукции путем просчёта систем различных порядков [3]. Установление нескольких значащих цифр в решении с возрастанием порядка редукции считается достаточным основанием для того, чтобы говорить о пригодности такого подхода к решению той или иной задачи.

Геометрооптическое приближение. Сложность задач электродинамики требует их упрощения с учетом соотношения рабочей длины волны и гео-

метрических размеров тела, на котором ЭМП рассеивается (задача дифракции). В таком случае используется метод геометрической оптики, при реализации которого длина рабочей волны значительно меньше геометрических размеров окна связи.

При анализе дифракционного поля на больших частотах ($\kappa r \gg 1$) нужно учитывать, что амплитуды a_n, c_n, d_m убывают с ростом n и m .

Если $\kappa \gg |n_1|$ и $\kappa r \gg |m_1|$, где n_1 и m_1 – наибольшие номера гармоник с еще заметными амплитудами, то в представлении полей (8, 10, 11; [1], часть 1) можно учитывать только гармоники с номерами $n < n_1$ и $m < m_1$ и приближенно для них принимать

$$\gamma_n = \sqrt{\kappa^2 - n^2} \approx \kappa, \quad \Gamma_m = \sqrt{\kappa^2 - \left(\frac{m}{2r}\right)^2} \approx \kappa.$$

Тогда уравнения (20, 25, часть 1) будут иметь вид ($v \sim n$):

$$c_v = -\beta_v^0 \sum_{m=1}^{\infty} d_m, \quad (8)$$

$$d_m = -\alpha_m^0 \sum_{n=1}^{\infty} c_n + \sigma_m^m, \quad (9)$$

где

$$\beta_v^0 = \frac{mv(1 - L_{0m}^2)}{\kappa 2r(\kappa^2 - v^2)}, \quad (10)$$

$$\alpha_m^0 = \frac{L_{0m}^2 - 1}{L_{0m}^2 + 1} \cdot \frac{2}{\pi \kappa} \cdot \frac{mn}{(2\kappa r)^2 - m^2}, \quad (11)$$

$$\sigma_m^m = \frac{A_{mn}}{2m\pi^2 r} \cdot \frac{\sin(2m\pi^2 r/b)}{\kappa(L_{0m}^2 + 1)} \times$$

$$\times \left\{ \frac{\frac{m}{2r} \cos\left(m\pi \frac{b_1}{b}\right) + i \frac{m\pi}{b} \cos\left(m\pi \frac{b_1}{b}\right)}{\left(\frac{m\pi}{b}\right)^2 - \left(\frac{m}{2r}\right)^2} \right\}, \quad (12)$$

$$L_{0m}^2 = e^{2i\kappa\pi}, \quad L_{0n}^2 = e^{4i\kappa\pi}. \quad (13)$$

Введем обозначения:

$$\xi_m = \sum_{m=1}^{\infty} d_m, \quad \delta_n = \sum_{n=1}^{\infty} c_n, \quad \Delta_m = \sum_{m=1}^{\infty} \sigma_m^m. \quad (14)$$

Просуммировав по ν уравнение (8), а по m – уравнение (9), получим:

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} c_{\nu} = -\sum_{\nu=1}^{\infty} \beta_{\nu}^0 \sum_{m=1}^{\infty} d_m,$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} d_m = -\sum_{m=1}^{\infty} \alpha_m^0 \sum_{n=1}^{\infty} c_n + \sum_{m=1}^{\infty} \sigma_m^m,$$

или, с учетом (14):

$$\delta_n = -\xi_m S_1, \quad \xi_m = -\delta_n S_2 + \Delta_m, \quad (15)$$

где

$$S_1 = \sum_{\nu=1}^{\infty} \beta_{\nu}^0 = \frac{m(1-L_{0m}^2)}{2\pi\kappa r} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\nu}{\kappa^2 - \nu^2},$$

$$S_2 = \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_m^0 = \frac{2n}{\pi} \frac{L_{0n}^2 - 1}{L_{0m}^2 + 1} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m}{(2\kappa r)^2 - m^2}.$$

Из (15) легко получить

$$\delta_n = -\frac{\Delta_m S_1}{1 - S_1 S_2}, \quad \xi_m = \frac{\Delta_m}{1 - S_1 S_2}.$$

Тогда выражения для коэффициентов преобразования на структуре будут иметь вид:

$$c_{\nu} = -\beta_{\nu}^0 \xi_m; \quad (16)$$

$$d_m = -\alpha_m^0 \delta_n + \sigma_0^0; \quad (17)$$

$$a_n = -\beta_{\nu}^0 \xi_m (L_n^2 - 1). \quad (18)$$

Результаты расчета коэффициента преобразования a_n (18) в зависимости от $\kappa = 2/\lambda$ для колебаний H_{101} при $r = 2$, $b = 6,9$ м, $b_1/b = 1/3$ показаны на рис. 1.

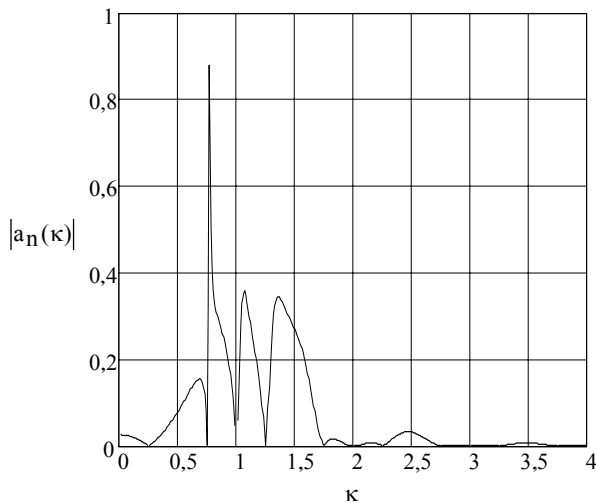


Рис. 1. Коэффициент преобразования a_n для геометрического приближения

E – поляризация. При возбуждении в резонаторе колебаний типа $E_{n p m}$ ($n = 1, 2, \dots; p = 0, 1, 2, \dots; m = 0, 1, 2, \dots$) в волноводе возникают $E (H_y)$ – поляризованные волны, составляющие H_y для которых в трёх областях могут быть представлены в виде ($p = 0$):

$$H_y^{(1)} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cos(nx) \times \left\{ a_n e^{i\gamma_n (z-2\pi r)} + b_n e^{-i\gamma_n (z+2\pi r)} \right\},$$

$$H_y^{(2)} = \sum_{n=1}^{\infty} c_n (-1)^n \cos(nx) \times \left\{ e^{i\gamma_n (2\pi r+z)} + e^{i\gamma_n (2\pi r-z)} \right\} +$$

$$+ \sum_{m=-\infty}^{\infty} d_m L_m \cos(\Gamma_m x) e^{im \left(\frac{z}{2r} - \pi \right)},$$

$$H_y^{(3)} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + \delta_m^0}{2} B_{nm} \cos \left[\frac{n\pi}{a} (x - \pi) \right] \times \cos \left[\frac{m\pi}{b} (z + b_1) \right], \quad (19)$$

где a_n, c_n, d_m и b_n – коэффициенты преобразования на щели; $\gamma_n = \sqrt{\kappa^2 - n^2}$; $\Gamma_m = \sqrt{\kappa^2 - (m/2r)^2}$ – продольные постоянные распространения; $L_m = e^{i\Gamma_m \pi}$; δ_m^0 – символ Кронекера; B_{nm} – амплитудные коэффициенты поля резонатора.

Отличные от нуля компоненты электрического поля определяются из уравнений Максвелла по формулам:

$$E_x = \frac{1}{i\kappa} \frac{\partial H_y}{\partial z}; \quad E_z = \frac{i}{\kappa} \frac{\partial H_y}{\partial x}. \quad (20)$$

Сшивая составляющие E_x на границах областей 1 и 2 (при $z = 2\pi r$) и учитывая, что для E – поляризации выполняется соотношение $d_m = -d_m$, приводящее к тождеству

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} d_m L_m \frac{m}{2r} \cos(\Gamma_m x) \equiv 0,$$

получим

$$a_n = c_n (L_n^2 - 1). \quad (21)$$

Выполняя условие непрерывности составляющих H_y на границе $z = 2\pi r$, найдём с учетом (21) функциональное уравнение

$$-\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n 2c_n \cos(nx) = \sum_{m=0}^{\infty} d_m (2 - \delta_m^0) L_m \cos(\Gamma_m x). \quad (22)$$

Выполняя условие непрерывности составляющих H_y на границе $x = \pi$, получим функциональное уравнение

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \left(d_m \frac{L_m^2 + 1}{2} e^{im(\frac{z}{2r} - \pi)} - \frac{1 + \delta_m^0}{2} B_{nm} \cos\left[\frac{m\pi}{b}(z + b_1)\right] \right) = -\sum_{n=1}^{\infty} c_n \left(e^{i\gamma_n(2\pi r + z)} + e^{i\gamma_n(2\pi r - z)} \right). \quad (23)$$

Переразлагая в (22) функции, полные на интервале $-2\pi r \leq z \leq 2\pi r$, по функциям, полным на интервале $-\pi \leq x \leq \pi$, получим бесконечную систему алгебраических уравнений

$$c_n = -\sum_{m=0}^{\infty} d_m \beta_n^m \quad (24)$$

с коэффициентами переразложения

$$\beta_n^m = \begin{cases} \frac{(2 - \delta_m^0)(L_m^2 - 1)}{2\pi i} \cdot \frac{\Gamma_m}{\Gamma_m^2 - n^2}, & \Gamma_m \neq n; \\ (2 - \delta_m^0)/2, & \Gamma_m = n. \end{cases} \quad (25)$$

После переразложения в (23) функций, полных на интервале $-\pi \leq x \leq \pi$, по функциям, полным на интервале $-2\pi r \leq z \leq 2\pi r$, имеем систему уравнений

$$d_m = -\sum_{n=1}^{\infty} c_n \alpha_m^n + \sigma_m^m \quad (26)$$

с коэффициентами переразложения

$$\alpha_m^n = \begin{cases} \frac{L_n^2 - 1}{L_m^2 + 1} \cdot \frac{1}{\pi r i} \cdot \frac{\gamma_n}{\gamma_n^2 - (m/2r)^2}, & \gamma_n \neq m/2r \\ 1, & \gamma_n = m/2r, \end{cases}$$

$$\sigma_m^m = \begin{cases} \frac{(1 + \delta_m^0) B_{nm} \sin(\frac{2m\pi^2 r}{b})}{2\pi r (L_m^2 + 1)} \times \frac{\frac{m\pi}{b} \cos\left(m\pi \frac{b_1}{b}\right) + i \frac{m}{2r} \sin\left(m\pi \frac{b_1}{b}\right)}{\left(\frac{m\pi}{b}\right)^2 - \left(\frac{m}{2r}\right)^2}, & \text{при } \frac{m\pi}{b} \neq \frac{m}{2r}; \\ \frac{(1 + \delta_m^0) B_{nm} (-1)^m e^{im\pi \frac{b_1}{b}}}{2(L_m^2 + 1)}, & \frac{m\pi}{b} = \frac{m}{2r}; \\ \frac{2B_{nm}}{(L_0^2 + 1)} \cdot \frac{(\pi/b)^2}{(\pi/b)^2 - (1/2r)^2}, & m = 0. \end{cases} \quad (27)$$

Подставив (26) в (24), получим бесконечную систему линейных алгебраических уравнений второго рода относительно коэффициентов преобразования c_v :

$$c_v - \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sum_{m=0}^{\infty} \alpha_m^n \beta_v^m = -\beta_v^p \sigma_p^p \quad (28)$$

или

$$c_v - \sum_{n=1}^{\infty} c_n P_{nv} = -\beta_v^p \sigma_p^p, \quad (29)$$

с матричными коэффициентами

$$P_{nv} = \sum_{m=0}^{\infty} \alpha_m^n \beta_v^m. \quad (30)$$

Коэффициенты прохождения в волновод a_v определяются из (21).

Длинноволновое приближение. Формулы для определения коэффициентов преобразования на соединении в длинноволновом приближении ($\kappa r \ll 1$) определим способом, использованным при исследовании наклонного падения Н – поляризованной волны на решетку из идеально проводящих брусьев прямоугольного поперечного сечения с узкими ще-

лями [4]. Он пригоден также и для рассмотрения задач дифракции $E(Hy)$ – поляризованных волн на волноводных структурах.

Если коэффициенты P_{nv} представить в следующем виде:

$$P_{nv} = P_{nv}^{(0)} + \tilde{P}_{nv}, \quad (31)$$

а решение системы (29) в виде

$$c_v = c_v^{(0)} + \tilde{c}_v, \quad (32)$$

и в выражениях для P_{nv} удержать лишь слагаемые, пропорциональные $1/\kappa r$, то решение приближенной системы $c_v^{(0)}$ будет отличаться от решения исходной системы (29) c_v на величину

$$\tilde{c}_v = c_v - c_v^{(0)},$$

пропорциональную κr .

Выражения для $P_{nv}^{(0)}$ ($m = 0$) и \tilde{P}_{nv} в (31) имеют вид

$$P_{nv}^{(0)} = \frac{1}{\kappa r} \cdot \frac{1 - L_\kappa^2}{1 + L_\kappa^2} \cdot \frac{\kappa^2}{2\pi^2} \cdot \varphi_v \phi_n, \quad (33)$$

где $\varphi_v = \frac{1}{\kappa^2 - v^2}$, $\phi_n = \frac{L_n^2 - 1}{\gamma_n}$, $L_\kappa^2 = e^{2i\kappa\pi}$, (34)

$$\tilde{P}_{nv} = (\kappa r)^2 \left(\frac{2}{\kappa\pi} \right)^2 \times \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(1 - L_n^2)(L_m^2 - 1) \sqrt{\kappa^2 - n^2} \sqrt{(2\kappa r)^2 - m^2}}{(1 + L_m^2)[(2\kappa r)^2 - (2nr)^2 - m^2][(2\kappa r)^2 - (2vr)^2 - m^2]} \quad (35)$$

Тогда $c_v^{(0)}$ будет решением системы

$$c_v^{(0)} - \sum_{n=1}^{\infty} c_n^{(0)} P_{nv}^{(0)} = -\sigma_p^p \beta_v^p, \quad (36)$$

а \tilde{c}_v удовлетворяют уравнениям

$$\tilde{c}_v - \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{c}_n P_{nv} = \sum_{n=1}^{\infty} c_n^{(0)} \tilde{P}_{nv}. \quad (37)$$

Из представлений (31), (33) видно, что система (36) имеет вырожденное ядро и может быть записана в виде

$$c_v^{(0)} - \frac{1}{\kappa r} \cdot \frac{1 - L_\kappa^2}{1 + L_\kappa^2} \cdot \frac{\kappa^2}{2\pi^2} \cdot \varphi_v \sum_{n=1}^{\infty} c_n^{(0)} \phi_n = -\sigma_p^p \beta_v^p.$$

Умножив последнюю систему на ϕ_v и просуммировав по v , получим

$$\sum_{v=1}^{\infty} c_v^{(0)} \phi_v - \frac{1}{\kappa r} \cdot \frac{1 - L_\kappa^2}{1 + L_\kappa^2} \times \times \frac{\kappa^2}{2\pi^2} \sum_{v=1}^{\infty} \varphi_v \phi_v \sum_{n=1}^{\infty} c_n^{(0)} \phi_n = -\sigma_p^p \sum_{v=1}^{\infty} \beta_v^p \phi_v,$$

откуда

$$\sum_{v=1}^{\infty} c_v^{(0)} \phi_v = \frac{2(\kappa r)\pi^2(1 + L_\kappa^2)\sigma_p^p \sum_{v=1}^{\infty} \beta_v^p \phi_v}{\kappa^2(1 - L_\kappa^2)S - 2(\kappa r)\pi^2(1 + L_\kappa^2)},$$

где

$$S = \sum_{S=1}^{\infty} \varphi_S \phi_S. \quad (38)$$

Тогда

$$c_v^{(0)} = \frac{(1 - L_\kappa^2)\kappa^2 \varphi_v \sigma_p^p \sum_{v=1}^{\infty} \beta_v^p \phi_v}{\kappa^2(1 - L_\kappa^2)S - 2(\kappa r)\pi^2(1 + L_\kappa^2)} - \sigma_p^p \beta_v^p, \quad (39)$$

а коэффициенты прохождения в прямоугольный волновод $a_v^{(0)}$:

$$a_v^{(0)} = (L_v^2 - 1) \times \left[\frac{(1 - L_\kappa^2)\kappa^2 \varphi_v \sum_{v=1}^{\infty} \beta_v^p \phi_v}{\kappa^2(1 - L_\kappa^2)S - 2(\kappa r)\pi^2(1 + L_\kappa^2)} - \beta_v^p \sigma_p^p \right]. \quad (40)$$

Подставляя значения для $c_v^{(0)}$ в выражение для правой части (37), получим оценку

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} c_n^{(0)} \tilde{P}_{nv} \right|,$$

где $c_v^{(0)}$ и \tilde{P}_{nv} определяются выражениями (39) и (35). Для этого достаточно оценить

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} [c_n^{(0)} + \sigma_p^p \beta_n^p] \tilde{P}_{nv} \right| =$$

$$= \left| \left(\frac{2\kappa r}{\pi} \right)^2 C \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-L_n^2}{\sqrt{\kappa^2-n^2}} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{L_m^2-1}{L_m^2+1} \times \right. \\ \left. \times \frac{\sqrt{(2\kappa r)^2-m^2}}{\left((2\kappa r)^2-(2nr)^2-m^2 \right) \left((2\kappa r)^2-(2vr)^2-m^2 \right)} \right|,$$

где

$$C = \frac{(1-L_{\kappa}^2)\sigma_p^p \sum_{S=1}^{\infty} \beta_S^p \phi_S}{\kappa^2(1-L_{\kappa}^2)S - 2(\kappa r)\pi^2(1+L_{\kappa}^2)}.$$

При больших m, n, v и $(\kappa r \ll 1)$:

$$1-L_n^2 = 1 - e^{4i\gamma_n \pi r} = \\ = 1 - e^{-4n\pi r} = 1 - 1/e^{4n\pi r} \cong 1;$$

$$\sqrt{\kappa^2-n^2} \cong in;$$

$$\sqrt{(2\kappa r)^2-m^2} \cong im;$$

$$\left((2\kappa r)^2-(2nr)^2-m^2 \right) \cong -(2nr)^2+m^2;$$

$$\left((2\kappa r)^2-(2vr)^2-m^2 \right) \cong -(2vr)^2+m^2;$$

$$L_m^2-1 = e^{2\Gamma_m i\pi} - 1 = e^{\frac{m\pi}{r}} - 1 = 1/e^{-\frac{m\pi}{r}} - 1 \cong -1;$$

$$L_m^2+1 \approx 1.$$

Тогда

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} \left[c_n^{(0)} + \sigma_p^p \beta_n^p \right] \tilde{P}_{nv} \right| \cong \\ \cong \left| \left(\frac{2\kappa r}{\pi} \right)^2 C \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m}{\left(m^2+(2nr)^2 \right) \left(m^2+(2vr)^2 \right)} \right|.$$

Выражение под знаком суммы по m можно представить в виде

$$\frac{m}{\left(m^2+(2vr)^2 \right) \left(m^2+(2nr)^2 \right)} = \\ = \frac{1}{(2r)^2(n^2-v^2)} \left[\frac{m}{m^2+(2vr)^2} - \frac{m}{m^2+(2nr)^2} \right].$$

Тогда

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{m}{\left(m^2+(2nr)^2 \right) \left(m^2+(2vr)^2 \right)} = \\ = \frac{1}{(2r)^2(n^2-v^2)} \times$$

$$\times \left[\sum_{m=1}^{\infty} \frac{m}{m^2+(2vr)^2} - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m}{m^2+(2nr)^2} \right].$$

Используя интегральное представление сумм, находящихся в скобках, имеем

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{m}{m^2+(2vr)^2} = \int_1^{\infty} \frac{xdx}{x^2+(2vr)^2} = \\ = \frac{1}{2} \ln|x^2+(2vr)^2|_1^{\infty};$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{m}{m^2+(2nr)^2} = \int_1^{\infty} \frac{xdx}{x^2+(2nr)^2} = \\ = \frac{1}{2} \ln|x^2+(2nr)^2|_1^{\infty}.$$

Тогда

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{m}{m^2+(2vr)^2} - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m}{m^2+(2nr)^2} = \\ = \frac{1}{2} \left(\ln|x^2+(2vr)^2| - \ln|x^2+(2nr)^2| \right)_1^{\infty} = \\ = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x^2+(2vr)^2}{x^2+(2nr)^2} \right|_1^{\infty} = \\ = \frac{1}{2} \left[\ln|1+(2nr)^2| - \ln|1+(2vr)^2| \right].$$

Учитывая, что:

$$\ln|1+(2nr)^2| < 2nr; \quad \ln|1+(2vr)^2| < 2vr,$$

получим, что

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{m}{\left(m^2+(2nr)^2 \right) \left(m^2+(2vr)^2 \right)} < \frac{1}{2r} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n+v} = \\ = \frac{1}{(2\kappa r)} \frac{\kappa}{2} \frac{1}{n+v}.$$

Тогда

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} \left[c_n^{(0)} - \sigma_p^p \beta_n^p \right] \tilde{P}_{nv} \right| < \left| \left(\frac{\kappa r}{\pi} \right) \frac{\kappa}{\pi} C \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+v)} \right|.$$

Выражение под знаком суммы по n можно представить в виде

$$\frac{1}{n(n+v)} = \frac{1}{vn} - \frac{1}{v(n+v)},$$

откуда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+v)} = \frac{1}{v} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} - \frac{1}{v} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+v} =$$

$$= \frac{1}{v} \ln \left| \frac{n}{n+v} \right|_1^{\infty} = -\frac{1}{v} \ln \left| \frac{n}{1+v} \right| = \frac{1}{v} \ln |1+v|.$$

Окончательно

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} [c_n^{(0)} - \sigma_p^p \beta_n^p] \tilde{P}_{nv} \right| <$$

$$< \left(\frac{\kappa r}{\pi} \right) \frac{\kappa \ln |1+v|}{\pi v} \frac{(1-L_{\kappa}^2) \sigma_p^p \sum_{S=1}^{\infty} \beta_S^p \phi_S}{\kappa^2 (1-L_{\kappa}^2) S - 2(\kappa r) \pi^2 (1+L_{\kappa}^2)}.$$

Как видно из оценки, решения приближенной системы уравнений $c_v^{(0)}$ отличаются от решения исходной системы (29) на величину, пропорциональную κr . Следовательно, при $\kappa r \ll 1$ решения, найденные для \tilde{c}_v , будут малыми, и в решении для (29) можно полагать $c_v \cong c_v^{(0)}$.

Результаты расчета коэффициента преобразования a_n (18) в зависимости от $\kappa = 2/\lambda$ для колебаний E_{101} при $r = 0,13$; $b = 11,8$ м, $b_1/b = 1/3$ показаны на рис. 2.

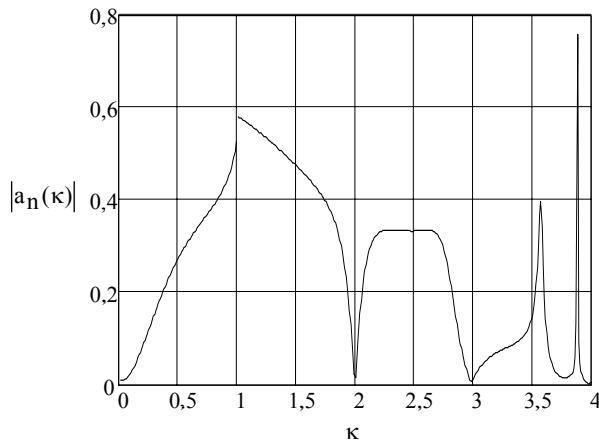


Рис. 2. Коэффициент преобразования a_n для длинноволнового приближения

Заключение

Таким образом, подтверждено, что полученная бесконечная система линейных алгебраических

уравнений имеет единственное решение. При определенных соотношениях рабочей длины волны и геометрических параметров элемента возбуждения, а также прямоугольного резонатора, получены геометрическое и длинноволновое приближения. Выполнен численный расчет коэффициента преобразования для колебаний H_{101} и E_{101} , показывающий возможность эффективного возбуждения волновода.

Литература

1. Заикин И.И., Удачин Д.В. Дифракция электромагнитных волн на несимметричном соединении двух структур прямоугольного сечения. Часть 1. Постановка и строгое решение задачи // Радиоэлектронні і комп'ютерні системи. – 2006. – Вип. 1 (13). – С. 20-27.
2. Конторович Л.В., Крылов В.И. Приближенные методы высшего анализа. – М.-Л.: Гос. издательство техн.-теорет. литературы, 1950. – 695 с.
3. Заикин И.П. О численном решении некоторых уравнений второго рода // Радиоэлектроника летательных аппаратов: Тематический сборник научных трудов. – Х.: ХАИ, 1978. – Вып. 11. – С. 59-64.
4. Сологуб В.Г., Шестопалов В.И., Половников Г.Г. Дифракция электромагнитных волн на металлических решетках с узкими щелями // ЖТФ. – 1967. – 38, № 4. – С. 666-679.

Поступила в редакцию 19.01.2006

Рецензент: канд. физ.-мат. наук В.А. Солодовник, ИРЭ НАН Украины, Харьков.