

УДК 535.43

Г.І. КОШОВИЙ, О.В. ГОЛОВЧЕНКО, А.Г. КОШОВИЙ

Національний аерокосмічний університет ім. М.Є. Жуковського "ХАІ", Україна

**ЧИСЕЛЬНО-АНАЛІТИЧНЕ ДОСЛІДЖЕННЯ
ПРЕДФРАКТАЛЬНИХ РОЗСІЮВАЧІВ ЕЛЕКТРОМАГНІТНИХ ХВИЛЬ**

Розглядається задача розсіювання Е-поляризованої електромагнітної хвилі предфрактальними системами циліндричних стрічок. Використовується аналітичний метод інтегральних рівнянь та прямий чисельний метод механічних квадратур. В деталях досліджуються задачі, пов'язані з утворювачами фрактальних об'єктів, що належать різним класам як за принципом творення, так і за формою. Наведений підхід може бути узагальнений на будь-яку стадію фракталотворення.

моделювання, розсіювання, чисельні методи, електродинаміка, математична теорія дифракції**Вступ**

Останнім часом з'явилося багато публікацій, пов'язаних з поняттям фракталу, яке вперше було введено Бенуа Мандельбротом при узагальненні робіт своїх попередників (Пуанкаре, Кантора, Хаусдорфа та інших). Він вперше вказав на фрактальну структуру природи у своїй базовій роботі [1]. Було також дано строге математичне означення самоподібного фракталу, але потім виникли узагальнення цього поняття, і тому на даний момент строного і повного означення фракталу не існує. Але фрактальні підходи знайшли своє широке застосування у моделюванні складних об'єктів і структур як природнього, так і штучного характеру в багатьох областях науки і техніки. Не оминули вони матеріалознавство композитів і аерокосмічну техніку [2, 3]. Та особливо широко застосовується фрактальний підхід у теорії динамічних систем, зокрема в електродинаміці [4, 5]. Тут процеси описуються диференціальними рівняннями у частинних похідних, а граничні умови розглядаються на предфракталах штучного чи природнього походження. Одним з найбільш знаних і простих фракталів є множина Кантора (МК), яка в залежності від принципу творення може мати різну фрактальну розмірність. Окрім принципу творення можна також змінювати і початковий об'єкт (утворювач), з якого починається фрактал.

Ними можуть бути не тільки відрізки прямої, як у класичній МК, але й дуги гладких ліній [6]. Це значно розширює можливості практичного застосування у моделюванні. Дана стаття присвячена чисельно-аналітичному дослідженню нових класів предфрактальних розсіювачів електромагнітних хвиль.

Предфрактальні системи циліндричних стрічок. У якості фізичної моделі будуть розглядатися системи ідеально провідних і абсолютно тонких циліндричних стрічок з паралельними краями, що належать одній площині. Напрявні цієї системи утворюють предфрактал вказаного типу. Іншими словами, твірні циліндричних стрічок є прямими лініями, а поперечний перетин утворює предфрактальну систему гладких дуг, отриману за тим чи іншим принципом фракталотворення. У найпростішому випадку це буде третинний принцип, за яким відрізок ділиться на три частини, середня відкидається, а дві крайні замінюються на гладку дугу, ордината якої є цілою функцією типу

$$y = b(t^2 - 1) \prod_{k=1}^m (t - \alpha_k), \text{ де } |\alpha_k| < 1.$$

Ці дуги повинні бути симетричними, тобто утворювачем має бути пара дуг, зокрема наведених на рис. 1, тут:

$$x_1 = a \frac{t-2}{3}, \quad y_1 = b(t^2 - 1) \left(t - \frac{1}{2}\right), \quad x_2 = a \frac{t+2}{3},$$

$$y_2 = b(t^2 - 1)(t + \frac{1}{2}), |t| < 1,$$

є параметричні задання зображених дуг.

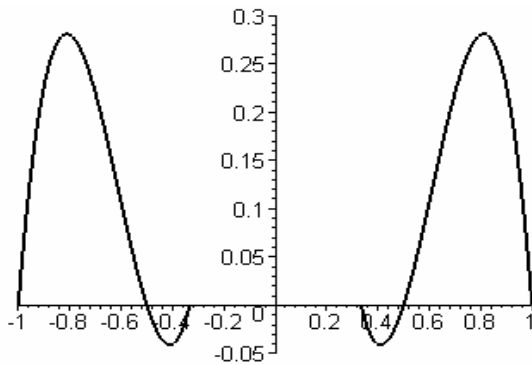


Рис. 1. Поперечний перетин системи з двох циліндричних стрічок

Наступною стадією у творенні фракталу (предфрактал другої генерації) є четвірка дуг, яку отримаємо, коли зменшимо утричі ці дві дуги і перемістимо їх на відрізки $[-1, -1/3]$ і $[1/3, 1]$. Щоб отримати предфрактал третьої генерації, знову утричі зменшуємо утворювач, що складається з двох дуг і переміщуємо на відрізки $[-1, -7/9]$, $[-5/9, -1/3]$, $[1/3, 5/9]$, $[7/9, 1]$, тобто отримаємо систему з 8 (4 пари) дуг. Коли цей процес продовжувати до нескінченності, то утвориться фрактальний об'єкт, який ми назвемо множиною дуг Кантора (МДК). Якщо у цьому процесі використовувати відрізки, то це буде класична Канторова множина, яку називатимемо множиною відрізків Кантора (МВК). Як відомо, МВК є досконалою множиною з нульовою топологічною розмірністю. У той же час її фрактальна розмірність дорівнює $\frac{\ln 2}{\ln 3}$ і є строго додатньою.

Процес творення фракталів можна змінювати як за рахунок кількості дуг утворювача, так і за рахунок їх форми. Тобто, у якості утворювача можна взяти три чи більше дуг [7]. На рис. 2 показано утворювач МДК, де початковий відрізок поділений на п'ять рівних частин і використані дві симетричні дуги четвертого порядку та дуга параболи. Відповідна МВК знову має нульову топологічну розмір-

ність при фрактальній $\frac{\ln 3}{\ln 5} > 0$.

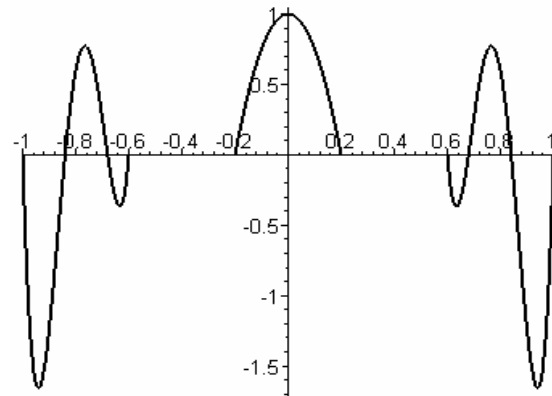


Рис. 2. Поперечний перетин системи з трьох стрічок

Постановка задачі. Розглядається предфрактальна система циліндричних стрічок, що збуджується плоскою лінійно поляризованою електромагнітною хвилею. В результаті взаємодії хвилі з провідними стрічками на останніх виникає поверхневий струм, який обумовлює електромагнітне поле. Це поле називається розсіянням, а задачу називають задачею розсіювання електромагнітної хвилі стрічками. З математичної точки зору вказана задача розділяється на дві зовнішні двовимірні задачі: задачу Діріхле (Е-поляризація) і задачу Неймана (Н-поляризація) для рівняння Гельмгольца [8].

У даній статті буде розглядатись тільки задача Діріхле, тому що вона є більш практично важливою, коли маємо предфрактальну систему. Це пов'язано з тим, що у процесі творення фракталу розміри дуг весь час зменшуються, і досить швидко, а довжина хвилі є незмінною. Отже, частотний параметр весь час зменшується, і довгохвильове наближення стає більш суттєвим.

У цьому наближенні продовжня складова поверхневого струму зростає зі зменшенням частотного параметру, а от поперечна навпаки зменшується. Саме продовжня складова і пов'язана з розсіюванням Е-поляризованої хвилі, тобто з задачею Діріхле. Таким чином, маємо знайти розв'язок рівняння Гельмгольца

$$\Delta u + k^2 u = 0, \quad (1)$$

де шукана функція $v = v(\bar{r}), \bar{r} \in R^2$, (k – хвильове число), що задовольняє крайовим умовам

$$v(\bar{r}) = v_0(\bar{r}), \bar{r} \in \gamma_m; \quad (2)$$

v_0 – відома функція, яка визначається плоскою електромагнітною хвилею, що набігає на стрічки.

Тут система дуг γ_m є предфракталом МДК. Щоб задача мала єдиний розв'язок, слід також вказати ще додаткові умови: це умова випромінювання Зоммерфельда і умови Мейнера у кінцевих точках дуг [8].

Методи розв'язку

Метод інтегральних рівнянь (ІР) дозволяє зводити крайову задачу для диференціальних рівнянь у частинних похідних у багатовимірних областях до інтегральних рівнянь меншої вимірності. При його застосуванні використовується фундаментальний розв'язок двовимірного рівняння Гельмгольца

$$G(u) = -\frac{i}{4} H_0^{(1)}(k|u|).$$

Тут $H_0^{(1)}(z)$ є першою функцією Ханкеля нульового порядку. Окрім рівняння Гельмгольца, ця функція задовольняє умови випромінювання і дає можливість інтегрального подання шуканої функції $v(\bar{r})$:

$$v(\bar{r}) = \int_{\gamma} G(k|\bar{r}' - \bar{r}|) J(\bar{r}') dl', \bar{r} \in R^2 \setminus \gamma, \gamma = \bigcup_m \gamma_m.$$

Отже, замість $v(\bar{r})$ слід знайти функцію $J(\bar{r})$, що визначена на системі дуг γ_m . Для цього використаємо крайові умови (2) і отримаємо систему сингулярних інтегральних рівнянь (СІР):

$$\int_{\gamma} G(k|\bar{r}' - \bar{r}|) J(\bar{r}') dl' = v_0(\bar{r}), \bar{r} \in \gamma. \quad (3)$$

Щоб перейти від криволінійних до звичайних інтегралів, скористаємось параметричною формою завдання системи дуг

$$\gamma_m : \bar{r}_m(t) = (x_m(t), y_m(t)), |t| \leq 1.$$

Розгорнемо систему (3):

$$\sum_m \int_{-1}^1 j_m(t) H_0^{(1)}(k|\bar{r}_k(\tau) - \bar{r}_m(t)|) dt = \frac{2i}{\pi} f_k(\tau), |\tau| \leq 1. \quad (4)$$

Тут невідомими є функції $j_m(t) = J(\bar{r}_m(t)) \dot{\bar{r}}_m(t)$, а права частина $f_k(\tau) = 2\pi v_0(\bar{r}_k(\tau))$.

Розглянемо детальніше аргументи у функції Ханкеля, що визначає ядра даної системи. Зупинимось для простоти на утворювачі МДК-фракталу, зображеному на рис. 2. Тут маємо дві дуги, то і система (4) має два рівняння і дві шукані функції. Коли підставимо параметризовані радіуси-вектори до аргументів діагональних ядер, то отримаємо:

$$k|\bar{r}_m(\tau) - \bar{r}_m(t)| = \chi_1 |\tau - t| \sqrt{1 + \varepsilon^2 w_m^2(\tau, t)},$$

$$\text{де } \varepsilon = \frac{b}{a}, \quad \chi_1 = \frac{ka}{3}, \quad w_m(\tau, t) = \frac{y_m(\tau) - y_m(t)}{\tau - t} = \tau^2 + \tau \cdot t + t^2 + (-1)^m \frac{1}{2} (\tau - t) - 1.$$

Отже, стає очевидним, що система (4) є системою сингулярних ІР, бо діагональні ядра містять логарифмічну особливість, яку можна досить просто виділити, користуючись відомим розвиненням функції Ханкеля:

$$H_0^{(1)}(z) = \frac{2i}{\pi} \left[\ln \frac{\gamma z}{2i} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(m!)^2} \left(\frac{z}{2} \right)^{2m} \times \left(\ln \frac{\gamma z}{2i} - \sum_{k=1}^m \frac{1}{k} \right) \right].$$

В результаті отримаємо систему з виділеною особливістю "у чистому вигляді":

$$\int_{-1}^1 j_k(t) \ln |\tau - t| dt + \sum_{m=1}^1 \int_{-1}^1 j_m(t) R_{km}(\tau, t) dt = f_k(\tau), |\tau| < 1. \quad (5)$$

Тут $R_{km}(\tau, t)$ є регулярними ядрами:

$$R_{km}(\tau, t) = \frac{\pi}{2i} H_0^{(1)}(k|\bar{r}_k(\tau) - \bar{r}_m(t)|), k \neq m; \quad (6)$$

$$R_{mm}(\tau, t) = \frac{\pi}{2i} H_0^{(1)}(k|\bar{r}_m(\tau) - \bar{r}_m(t)|) - \ln |\tau - t|.$$

Подібним чином здійснюється виділення особливості "у чистому вигляді", що є принциповим для використання чисельних та чисельно-аналітичних

методів розв'язку СІР, у випадку будь-якого утворювача для вказаного класу МДК.

Більше того, це можна успішно робити для будь-якої стадії творення МДК. Хоча при цьому і збільшується кількість рівнянь у системі та кількість інтегралів у рівняннях, але також відбувається зменшення частотного параметру, що приводить, наприклад, до зменшення кількості квадратурних вузлів для досягнення необхідної точності.

Система ІР (5) є вже повністю підготовленою до застосування прямого чисельного методу механічних квадратур (МК), який був розроблений і обґрунтований у монографії [9]. Він також себе добре зарекомендував і у випадку криволінійних стрічок вказаного класу [10].

Тут тільки зазначимо, що шукану функцію подаємо у вигляді $j(t) = \frac{\varphi(t)}{\sqrt{1-t^2}}$ і до першого інтеграла у формулі (5) застосовується спеціальна квадратурна формула, що є точною до полінома $(n-1)$ степеня, де n – кількість квадратурних вузлів. До решти інтегралів береться квадратурна формула, що має найвищу алгебраїчну точність. Після підстановки замість інтегралів квадратурних формул обираються точки коллокацій (зовнішні вузли) і в результаті отримуємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь відносно значень шуканої функції, яка потім відновлюється за допомогою інтерполяційного полінома Лагранжа.

Чисельні результати

У цьому розділі перейдемо до чисельних експериментів і обговорення деяких результатів розрахунків. Основним параметром тут буде кількість n квадратурних (внутрішніх) вузлів, що співпадає з кількістю точок коллокацій (зовнішніх вузлів). Окрім цього (властивого методу МК) параметру важливим є частотний параметр χ , який визначається відношеннями поперечного розміру окремого

розсіювача та довжини хвилі, і геометричний параметр ε , що визначається відношенням вертикального та поперечного розмірів розсіювача.

Ще використовуватись буде кут θ набігання хвилі на генератор – це кут між напрямком плоскої електромагнітної хвилі і осі ординат. Він входить до правої частини системи (5) у наступному вигляді:

$$f_k(\tau) = 2\pi \exp[i\chi \cdot \bar{q} \cdot \bar{r}_k(\tau)];$$

$$\bar{q} = (\sin \theta, \cos \theta).$$

На рис. 3. наведені результати розрахунків густини поверхневих струмів для генератора, зображеного на рис. 2 (час розрахунку вказаних кривих біля однієї хвилини).

На рис.4 наведені результати розрахунків густини поверхневих струмів для того ж самого генератора, але з $n=15$ (час розрахунку 5 хвилин). Коли частотний параметр збільшується, то необхідна кількість квадратурних вузлів зростає, спочатку повільно, а потім досить суттєво.

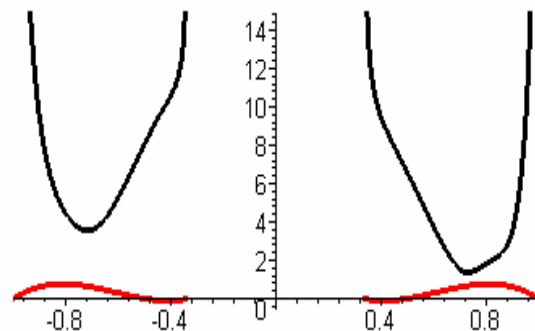


Рис. 3. Абсолютна величина нормованої густини поверхневого струму на стрічках при $\theta = 30^\circ$, $\chi = \pi/8$ (суцільні лінії) для $n = 4$

Тут також присутні частотний χ та геометричний ε параметри.

В першу чергу зазначимо, що коли частотний параметр не перевищує значення $\pi/6$, для дуг досить простої форми (квадратні, кубічні параболи) графічна точність досягається вже для $n = 5$. Оцінка точності проводилась аналогічно зазначеним роботам [9, 10].

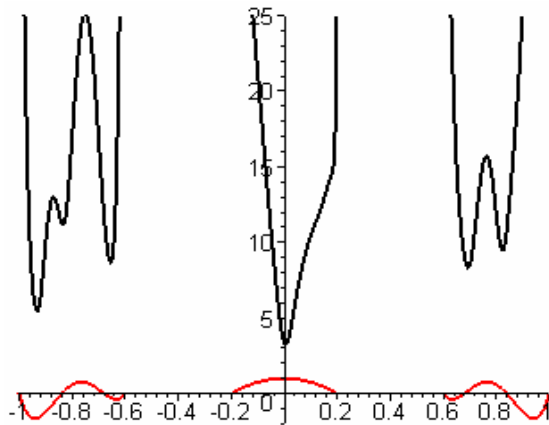


Рис. 4. Абсолютна величина нормованої густини поверхневого струму на стрічках при $\theta = 30^\circ$, $\chi = \pi/8$ (суцільні лінії) для $n = 15$

Висновки

Розглянута задача розсіювання плоскої Е-поляризованої електромагнітної хвилі на предфрактальних системах циліндричних стрічок. Основна увага приділена дослідженню певного класу утворювачів МДК, які є напрямними вказаної системи. В результаті застосування методу ІР двовимірна задача Дірихле для рівняння Гельмгольца приведена до системи ІР, діагональні ядра якої мають логарифмічні особливості. Чисельний розв'язок здійснюється за методом МК з використанням спеціальних квадратних формул, за розробленими авторами алгоритмом і складеними програмами обчислення на ЕОМ. Приводяться чисельні розрахунки абсолютної величини густин поверхневих струмів на утворювачах, що належать різним як за принципом творення, так і за формою дуг, МДК-фракталам.

Пропоновані методи є досить загальними. Вони можуть бути застосованими до будь-якої стадії творення МДК-фракталу.

Література

1. Мандельброт Б. Фрактальная геометрия природы.- М.: ИКИ, 2002, – 655 с.
2. Иванова В.С., Баланкин А.С., Бунин И.Ж.,

Оксогоев А.А. Сенергетика и фракталы в материаловедении. – М.: Наука, 1994. – 384 с.

3. Нейман О.Б., Давыдова М.М. Топологический (фрактальный) анализ кинетики накопления дефектов при оценке прочности углеродных композитов // Механика композиционных материалов. – 1994. – Т.30, №1. – С. 19-30.

4. Jaggard A.D., Jaggard D.L. Cantor ring diffractals // Optics Communications. – 1998. – Vol. 158. – P. 141-148.

5. Werner D.H., Ganguly S. An Overview of fractal antenna engineering research // IEEE Antennas & propagation magazine. – 2003. – V. 45, №1. – P. 38-57.

6. Koshovy G.I. On scattering of electromagnetic wave by pre-fractal strip system // Proceedings of the 11th Int. Conf. on MMET-2006. – P. 611-613.

7. Koshovy G.I., Koshovy A.G. On interaction between the E-polarized electromagnetic wave and the CSA-pre-fractals // Int. Conf. on DIPED-2006. – P. 75-79.

8. Хенл Х., Мауэ А., Вестпфаль К. Теория дифракции. – М.: Мир, 1964. – 468 с.

9. Панасюк В.В., Саврук М.П., Назарчук З.Т. Метод сингулярных интегральных уравнений в двумерных задачах дифракции. – К.: Наук. думка, 1984. – 344 с.

10. Кошовий Г.І. Поверхневі струми збуджені Е-поляризованою хвилею на криволінійних стрічках // Радиофизика и электроника. – Х.: Ин-т радиофизики и электрон. НАН Украины, 2004. – Т. 9, №3. – С. 509-514.

Надійшла до редакції 16.11.2006

Рецензент: д-р техн. наук, пров. наук. співр. В.А. Ванін, ІПМаш НАН України, Харків.