УДК 535.43

Г.І. КОШОВИЙ

Національний аерокосмічний університет ім. М.Є. Жуковського "ХАІ", Україна

МОДЕЛЬ ПРЕДФРАКТАЛЬНОГО РОЗСІЮВАЧА ЗІ ЗМІННОЮ ФРАКТАЛЬНОЮ РОЗМІРНІСТЮ

Запропонована модель предфрактального розсіювача хвиль, у якого можна змінювати неперервно фрактальну розмірність за допомогою двох параметрів керування. В деталях проведено дослідження взаємодії плоскої Е-поляризованої електромагнітної хвилі з системою циліндричних стрічок, напрямні яких мають форму утворювача МДК-фракталу зі змінною фрактальністю. У випадку квазістатичної моделі отримані явні асимптотичні вирази як розв'язку задачі розсіювання, так і деяких інтегральних характеристик розсіювача.

предфрактальне моделювання, керування фрактальною розмірністю, розсіювання, чисельні методи

Вступ

Дослідження фракталів, що широко використовується у моделюванні, та вивчення взаємодії предфрактальних об'єктів з електромагнітними полями є беззаперечно актуальним [1, 2].

Дана робота присвячена розробці предфрактального розсіювача електромагнітних хвиль зі змінною фрактальною розмірністю.

Постановка задачі. Загальна постановка задачі розсіювання плоскої Е-поляризованої електромагнітної хвилі системою ідеально провідних та нескінченно тонких циліндричних стрічок є класичною [2]. Тут є новим провідний об'єкт, який змінює електромагнітне поле внаслідок взаємодії його з плоскою Е-поляризованою хвилею. Поле цієї хвилі є відомим, має досить простий вигляд, і тому, віднявши його від нового поля, отримаємо так зване поле розсіювання: воно і буде предметом дослідження. Але повернемось поки що до детального опису предфрактального розсіювача.

Напрямні системи циліндричних стрічок. Розглянемо структуру напрямних розсіювача: вони мають форму гладких дуг і утворюють певну стадію самоподібного фракталу. У найпростішому випадку дуг дві і вони утворюють генератор МДК-фракталу [3]. У процесі фракталотворення виникають проміжні стадії, так звані пред-фрактали певної генерації: n-стадії відповідає 2^n дуг. У якості генератора можна брати і більшу кількість дуг, при цьому буде змінюватись фрактальна розмірність [4]. Та змінюється вона дискретно, і процес зміни є незручним, бо вимагає переробки всієї розрахункової схеми від самого початку.

У даній роботі пропонується узагальнення процесу фракталотворення з введенням параметрів управління, що неперервно змінюють фрактальну розмірність.

Зупинимось на цьому більш детально, розглянувши найпростіший утворювач (генератор) МДК-фракталу, що складається з двох симетричних дуг. Візьмемо наступну параметризацію: абсциси дуг змінюються за законом $x = \pm a + bt$, а ординати

$$y = c\left(1-t^2\right)\prod_{k=1}^{m}\left(t-\alpha_k\right), \qquad (1)$$

тут $|\alpha_k| \le 1$ і $|t| \le 1$. Величина $2a$ визначає відстань між центрами дуг утворювача, поперечний розмір кожної з двох дуг визначає величина $2b$: очевидно, що $b < a$, бо $2(a-b)$ – відстань між дугами. Решта величин c, m, α_k визначають форму дуг, зокрема, перша з них – їх вертикальний розмір, а дві інші величини є безрозмірними. При застосуванні методу інтегральних рівнянь всі зазначені величини містяться в аргументах ядер та правих частин, де також знаходиться хвильове число $k = \frac{2\pi}{\lambda}$, тут λ – довжина хвилі: хвиля є плоскою і монохроматичною [2]. Це дозволяє перейти до безрозмірних величин $\alpha = 2\pi\frac{a}{\lambda}$, $\delta = 2\pi\frac{c}{\lambda}$, які і будуть виступати в якості параметрів керування фрактальністю самоподібного МДК-фракталу, що буде утворюватись на основі даного початкового об'єкта – утворювача МДК-фракталу. Вкажемо далі принцип, за яким буде здійснюватись перехід від однієї стадії творення до наступної. Початковий об'єкт (утворювач), що складається з двох дуг і має умовний "розмір" $2(\alpha+\beta)$, зменшується до розміру 2β, роздвоюється і зміщується на $\pm\alpha$, займаючи місця попередніх двох дуг. В результаті буде друга стадія творення чи предфрактал другої генерації: він складається з чотирьох дуг, у яких основні параметри будуть α/k, β/k і δ/k, тут $k = 1+\frac{\alpha}{\beta} > 2$. Зокрема, коли принцип творення є третинним (класичним), тобто коли відрізок ділиться на три рівні частини і середній відкритий відрізок відкидається, маємо $\alpha = 2/3$, $\beta = 1/3$ і $k = 3$ (значення параметрів без множника 2π). Повернувшись до узагальненої схеми творення, можна казати, що утворювач зменшується у k разів і заміщує дуги. Отже, на деякому n-му кроці творення МДК-фракталу маємо 2^n дуг, у яких основні параметри будуть: $\frac{\alpha}{k^{n-1}}$, $\frac{\beta}{k^{n-1}}$ і $\frac{\delta}{k^{n-1}}$. При необмеженому зростанні n виникає МДК-фрактал – множина, що має нульову топологічну розмірність, але фрактальна розмірність є строго додатною. На цьому понятті (фрактальна розмірність) та на можливості керування нею зупинимось дещо детальніше.

Керування фрактальною розмірністю

Фрактальна розмірність МДК-фракталів. Фрактальна розмірність і всі її допустимі варіанти є не топологічними, а метричними поняттями [1]. Вони включають в себе деякий метричний простір, тобто простір, у якому відповідним чином визначається відстань між довільними двома його точками (елементами). Кулею з центром в точці x_0 і радіусом r у такому просторі є множина усіх точок, що знаходяться від точки x_0 на відстані меншій чи рівній r (або строго меншій r): кулі – суцільні тіла, замкнені чи відкриті, а сфери – їх межі (відстань дорівнює r). Існує багато способів покриття кулями деякої обмеженої множини S у даному метричному просторі.

Найпростіший спосіб покриття полягає в тому, що кожна точка множини S береться за центр x_0. Але найбільш економічним, за означенням, є той, що містить найменшу кількість куль. Коли множина S обмежена, то ця кількість є скінченою і може бути позначеною як $N(r)$. Враховуючи це, було висунуте ще у 1932 році Л. Понтрягіним та Л. Шнірельманом означення альтернативної розмірності у вигляді наступного виразу: $\liminf\limits_{r\to 0} {\ln N(r)}/{\ln(1/r)}$. Цей вираз називають нижньою ентропійною розмірністю, і вона часто співпадає з розмірністю Хаусдорфа-Безиковича, яка означується дещо складніше [1]. Скористаємось даним виразом для обчислення розмірності для МДК-фракталів вказаного вище класу. Для n-ї стадії творення величина $N(r) = 2^n$, коли використовуються круги (кулі евклідового простору R^2) з діаметром $\frac{2\beta}{k^{n-1}} = 2r$. Процес необмеженого зменшення $r = \frac{\beta}{k^{n-1}}$ пов'язаний з необмеженим зростанням n. Тому фрактальна розмірність визначається границею

$$d = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln 2^n}{\ln k^{n-1} - \ln\beta} = \frac{\ln 2}{\ln k} > 0 . \qquad (2)$$

Отже, ця розмірність залежить від параметру k неперервно.

Керування фрактальністю. Слід згадати, що $k = 1 + \frac{\alpha}{\beta} > 2$, тому можна зробити висновок, що при фіксованому параметрі α фрактальна розмірність зменшується зі зменшенням параметру β від значення досить близького одиниці до значення близького нулеві: при $\beta \to 0$ фрактальна розмірність прямує до топологічної розмірності. Наприклад, коли $\alpha = 3\beta$, фрактальна розмірність дорівнює 0,5. Це буде, зокрема, при $\beta = 2,5$ і $\alpha = 7,5$: відстань між дугами 10 (рис. 1).

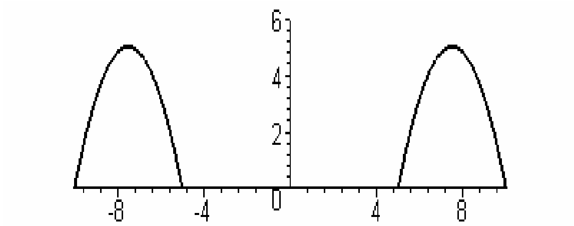

Рис. 1. Поперечний перетин
двох циліндричних стрічок

На цьому рисунку наведено поперечний перетин системи з двох циліндричних стрічок, що відповідає утворювачеві МДК-фракталу з дугами параболічної форми: $y = \delta(1 - t^2)$. У даному процесі параметром керування виступає величина, пов'язана з поперечним розміром стрічки, тобто параметр β. Але можна використовувати у якості параметра керування і параметр α, зафіксувавши поперечний розмір стрічки, і змінювати відстань між ними. Інколи зручною може виявитись ситуація, коли фрактальна розмірність змінюється зі зміною обох параметрів α і β одночасно з фіксованою їх сумою. Тут прикладом можуть бути дуги, зображені на рис. 2: вони відповідають половинам утворювачів МДК-фракталів з розмірностями: $\ln 2/\ln(2,5)$, $0,5$, $\ln 2/\ln 5$, $\ln 2/\ln 10$.

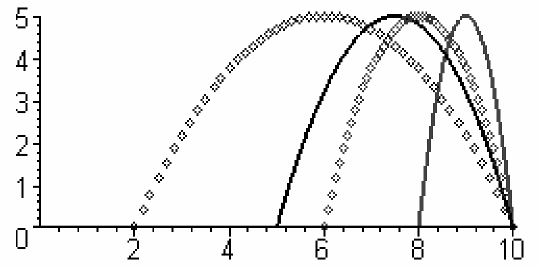

Рис. 2. Половини утворювачів
МДК-фракталів

Таким чином, маємо параметри керування фрактальною розмірністю МДК-фракталів, які пов'язані з розмірами початкового геометричного об'єкта – утворювача і далі з принципом побудови деякого фракталу. З практичної точки зору важливим є те, що зі зміною фрактальності (геометрії об'єктів) змінюються електродинамічні характеристики предфрактальних розсіювачів. Щоб належно оцінити можливість керування електродинамічними характеристиками, слід звернутись до математичного розв'язку задачі розсіювання.

Методи дослідження та чисельні результати

Перехід від тривимірної фізичної моделі до двовимірної математичної здійснюється на основі теорії диференціальних рівнянь математичної фізики і є класичним [1]. В результаті отримуємо двовимірну задачу Діріхле для рівняння Гельмгольца з відповідними умовами. Розшукуваною є скалярна функція $\upsilon(\vec{r})$, що визначає розсіяне електромагнітне поле поза стрічками. На стрічках (а точніше на їх поперечному перетині у вигляді дуг) ця функція задовольняє певним граничним умовам, які за допомогою методу інтегральних рівнянь (ІР) переходять в одновимірну математичну модель [3, 4]. Серед методів, що тут успішно застосовуються , в першу чергу треба вказати на прямий чисельний метод механічних квадратур (МК) [5]. Але в основному тут буде використовуватись чисельно-аналітичний метод регуляризації Векуа-Карлемана (РВК), який пов'язаний з оберненням частини інтегрального оператора , що містить сингулярність (особливість) у найпростішому вигляді. При цьому сингулярні ІР першого роду перетворюються в ІР другого роду, до яких вже застосовуються класичні проекційні методи [6]. Слід також зазначити , що метод РВК у най простіших випадках дозволяє отримати розв'язок задачі розсіювання в явному вигляді.

Продемонструємо у скороченому вигляді дію методу РВК у випадку квазістатичної моделі утворювача МВК-фракталу: буква В вказує на те, що замість дуг (Д) використовуємо відрізки. МВК-фрактал у випадку третинного способу побудови є класичною досконалою множиною Кантора, що має фрактальну розмірність $\ln 2/\ln 3$ [1].

Квазістатична модель утворювача МВК-фракталу. Квазістатична модель користується припущенням, що довжина хвилі є великою у порівнянні з поперечними розмірами, але цю вимогу можна послабити, залишивши тільки $\beta << 1$ і $\delta << 1$. У цьому випадку маємо наступні асимптотичні вирази для розв'язоку системи СІР: $j_k(t) = j_k \Big/ \pi\sqrt{1-t^2}$.

Тут $j_k = \int\limits_{-1}^{1} j_k(t)dt$ визначаються з системи лінійних алгебраїчних рівнянь

$$j_k \ln\frac{\gamma\beta}{4i} + j_{3-k}\,\frac{\pi}{2i} H_0^{(1)}(2\alpha) = 2\pi \exp((-1)^k q_1\alpha)\,,$$

$$k = 1,2\,.$$

Її розв'язок можна знайти за допомогою правила Крамера. Величини j_k явно залежать від двох параметрів керування фрактальністю відповідного МВК-фракталу. Оскільки обмежень на параметр α квазістатична модель не накладає, доречно дослідити залежність інтегральних характеристик j_k $(k = 1,2)$, які визначають струми на стрічках, що виникають у результаті взаємодії стрічок з хвилею. Графіки залежності $|j_k| = |j_k(\alpha)|$ для $q_1 = 0{,}1$, $\beta = 0{,}1$ та $x = \alpha$ наведені на рис. 3.

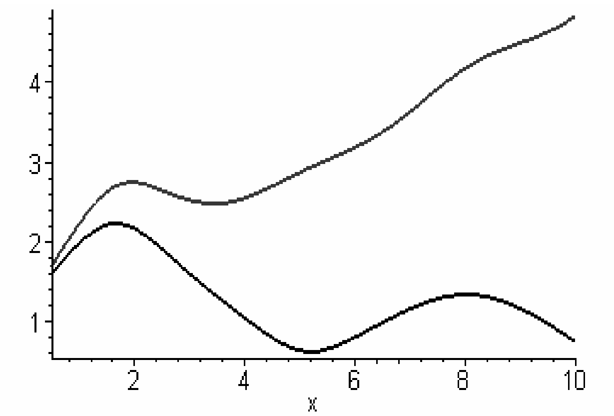

Рис. 3. Графіки залежності $|j_k| = |j_k(x)|$:
$k = 1$ (верхній); $k = 2$

Поле у далекій зоні. Одна з основних характеристик розсіювача – діаграма направленості, яка пов'язана з полем у далекій зоні. Розсіяне електромагнітне поле у далекій зоні може бути визначено формулою [2]:

$$\upsilon(\vec{r}) = \frac{-i}{2\sqrt{2\pi i}}\frac{e^{ikr}}{\sqrt{kr}} \times$$

$$\times \int\limits_{-1}^{1} \left[j_1(t)\exp(i(\alpha - \beta\cdot t)\cos\varphi) + \right.$$

$$\left. + j_2(t)\exp(-i(\alpha + \beta\cdot t)\cos\varphi)\right] dt\,,$$

де $r = |\vec{r}|$.

Для випадку квазістатичної моделі, залишивши лише головні доданки, з попередньої формули отримаємо

$$\upsilon(\vec{r}) \approx A(\varphi)\frac{e^{ikr}}{\sqrt{kr}}\,.$$

Тут величина

$$A(\varphi) =$$

$$= \frac{-i}{2\sqrt{2\pi i}}\left[j_1 e^{i\alpha\cos\varphi} + j_2 e^{-i\alpha\cos\varphi}\right]$$

визначає залежність розсіяного поля від полярного кута φ для великих значень полярного радіуса r.

Графіки залежності $|A(\varphi)|$ від полярного кута для $q_1 = 0{,}1$, $\beta = 0{,}1$ та різних значень параметра α наведені на рис. 4.

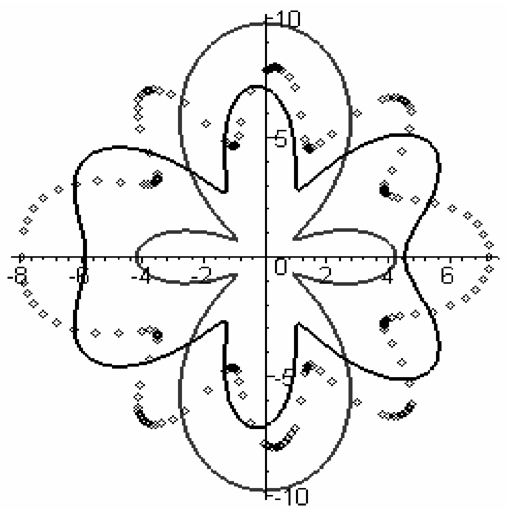

Рис. 4. Графіки залежності $|A(\varphi)|$ для $\alpha = 2,4$ (лінії); $\alpha = 6$ (крапки)

Висновки

У даній роботі запропоновані моделі предфрактальних розсіювачів електромагнітних хвиль зі змінною фрактальною розмірністю. Ця розмірність може змінюватись неперервно за допомогою двох параметрів керування. В деталях проведено дослідження взаємодії E-поляризованої електромагнітної хвилі з системою циліндричних стрічок, напрямні яких мають форму утворювача МДК-фракталу зі змінною фрактальністю.

За методом ІР двовимірна математична модель приведена до одновимірної моделі у вигляді системи СІР. Для чисельного розв'язку отриманої системи СІР застосовано два методи: прямий чисельний метод МК і чисельно-аналітичний метод РВК. За останнім проведено детальне дослідження задачі розсіювання у випадку квазістатичної моделі утворювача МВК-фракталу. Зокрема, отримані явні асимптотичні вирази для розв'язку системи СІР та поля у дальній зоні. Проведені чисельні розрахунки інтегральних характеристик (функціоналів від розв'язку математичної моделі) утворювача МВК-фракталу.

Наведені методи дослідження і розв'язку можуть бути застосовані до будь-якої стадії творення МДК-фракталів.

Література

1. Мандельброт Б. Фрактальная геометрия природы. – М.: ИКИ, 2002. – 656 с.

2. Хенл Х., Мауэ А., Вестпфаль К. Теория дифракции. – М.: Мир, 1964. – 428 с.

3. Koshovy G.I. On scattering of electromagnetic wave by pre-fractal strip system // Proceedings of the 11th Int. Conf. on MMET-2006. – Kharkiv, Ukraine. – P. 611-613.

4. Koshovy G.I., Koshovy A.G. On interaction between the E-polarized electromagnetic wave and the CSA-pre-fractals // Int. Conf. on DIPED-2006. – Tbilisi, Georgia. – P. 75-79.

5. Панасюк В.В., Саврук М.П., Назарчук З.Т. Метод сингулярных интегральных уравнений в двумерных задачах дифракции. – К: Наук. думка, 1984. – 344 с.

6. Кошовий Г.І. Поверхневі струми, збуджені E-поляризованою хвилею на криволінійних стрічках // Радиофизика и электроника. – Х.: Институт радиофизики и электроники НАН Украины, 2004. – Т. 9, №3. – С. 509-514.

Надійшла до редакції 23.04.2007

Рецензент: д-р техн. наук, проф. М.Л. Угрюмов, Національний аерокосмічний університет ім. М.Є. Жуковського "ХАІ", Харків.