УДК 621.371.322

И.П. ЗАИКИН, А.А. ТКАЧЕНКО

Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского "ХАИ", Украина

ДИФРАКЦИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН НА СИММЕТРИЧНОМ СОЕДИНЕНИИ ДВУХ КРУГЛЫХ ВОЛНОВОДОВ С ЦИЛИНДРИЧЕСКИМ РЕЗОНАТОРОМ. ЧАСТЬ II. АНАЛИТИЧЕСКИЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ

Для симметричного соединения двух круглых волноводов с цилиндрическим резонатором найдены простые явные формулы для коэффициентов преобразования в длинноволновом приближении, приближении "узкие щели" (H_φ -поляризация) и в приближении геометрической оптики (E_φ - и H_φ -поляризация).

поляризация, круглый волновод, цилиндрический резонатор, коэффициенты преобразования

Введение

Полученные в [1] бесконечные системы линейных алгебраических уравнений второго рода (БСЛАУ) относительно коэффициентов преобразования на симметричном стыке двух круглых волноводов с цилиндрическим резонатором имеют матричные коэффициенты с таким же поведением как и в [2], для которых в [3] доказана их принадлежность к пространству ℓ_2, а значит, возможность к использованию при их приближенном решении метода редукции.

Формулирование проблемы. Метод редукции при решении БСЛАУ является универсальным, поскольку позволяет получить решение для произвольных значений параметров задачи. Однако, несмотря на его универсальность, целесообразно воспользоваться приближенным анализом, чтобы получить простые явные формулы в тех случаях, где это оказывается возможным. Это дает возможность немедленной оценки пригодности к практическому использованию той или иной структуры.

Решение проблемы. Длинноволновое приближение. H_φ-поляризация

Формулы для определения коэффициентов преобразования на структуре в длинноволновом приближении ($æ r << 1$) определим способом, использованным при решении задачи о рассеянии волн на соединении полубесконечной коаксиальной линии и радиального волновода [4].

Выпишем систему (22) в [1]:

$$g_\nu + \sum_{n=1}^{\infty} g_n P_{n\nu} = \frac{\delta_\nu^p}{H_0^{(1)}(j_{0\nu})}, \tag{1}$$

где

$$P_{n\nu} = \frac{1}{\pi i} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \alpha_m^n \beta_\nu^m \frac{\tau_m}{\tilde{A}_m \Delta_m}, \tag{2}$$

$$\alpha_m^n = \frac{e_n^2 - 1}{2\pi r i} \frac{\gamma_n}{\gamma_n^2 - (m/2r)^2}, \tag{3}$$

$$\beta_n^m = -\frac{\pi i}{2} \frac{\tilde{A}_m^2}{\tilde{A}_m^2 - j_{0n}^2} J_0(\tilde{A}_m) H_0^{(1)}(\tilde{A}_m), \tag{4}$$

$$\Delta_m = \frac{H_1^{(1)}(\tilde{A}_m)}{H_0^{(1)}(\tilde{A}_m)} - \sigma_m \frac{H_1^{(2)}(\tilde{A}_m)}{H_0^{(2)}(\tilde{A}_m)} - \\ -\tau_m H_0^{(1)}(\tilde{A}_m) J_1(\tilde{A}_m), \tag{5}$$

$$\sigma_m = \frac{H_0^{(1)}(\tilde{A}_m \theta)}{H_0^{(2)}(\tilde{A}_m \theta)} \frac{H_0^{(2)}(\tilde{A}_m)}{H_0^{(1)}(\tilde{A}_m)}, \tag{6}$$

$$\tau_m = \frac{1 - \sigma_m}{H_0^{(1)}(\tilde{A}_m) J_0(\tilde{A}_m)}. \tag{7}$$

Представим (2) в виде

$$P_{n\nu} = P_{n\nu}^{(0)} + \tilde{P}_{n\nu}, \tag{8}$$

а решение системы (1) как

$$g_\nu = g_\nu^{(0)} + \tilde{g}_\nu, \qquad (9)$$

и в выражениях для $P_{n\nu}$ удержим лишь слагаемые, пропорциональные $1/æ r$. Тогда решение приближенной системы $g_\nu^{(0)}$ будет отличаться от решения исходной системы g_ν на величину

$$\tilde{g}_\nu = g_\nu - g_\nu^{(0)},$$

пропорциональную $æ r << 1$.

Выражения для $P_{n\nu}^{(0)}\,(m=0)$ и $\tilde{P}_{n\nu}$ в (8) имеют вид

$$P_{n\nu}^{(0)} = -\frac{æ J_0(æ)H_0^{(1)}(æ)}{4r\pi i}\frac{\tau_0}{\Delta_0}\varphi_n\psi_\nu\,, \qquad (10)$$

где

$$\varphi_n = \frac{e_n^2 - 1}{\gamma_n},\ \psi_\nu = \frac{1}{\gamma_\nu^2}, e_n^2 = e^{4i\gamma_n \pi r}, \qquad (11)$$

$$\Delta_0 = \frac{H_1^{(1)}(æ)}{H_0^{(1)}(æ)} - \sigma_0\frac{H_1^{(2)}(æ)}{H_0^{(2)}(æ)} -$$

$$-\tau_0 H_0^{(1)}(æ)J_1(æ)\,, \qquad (12)$$

$$\sigma_0 = \frac{H_0^{(1)}(æ\theta)}{H_0^{(2)}(æ\theta)}\frac{H_0^{(2)}(æ)}{H_0^{(1)}(æ)}\,, \qquad (13)$$

$$\tau_0 = \frac{1-\sigma_0}{H_0^{(1)}(æ)J_0(æ)}\,, \qquad (14)$$

$$\tilde{P}_{n\nu} = -\frac{4r^2}{\pi i}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(e_n^2-1)\gamma_n J_0(\tilde{A}_m)}{\left[(2æ r)^2 - (2j_{0n}r)^2 - m^2\right]}\times$$

$$\times\frac{\sqrt{(2æ r)^2 - m^2}\,H_0^{(1)}(\tilde{A}_m)}{\left[(2æ r)^2 - (2j_{0\nu}r)^2 - m^2\right]}\frac{\tau_m}{\Delta_m}\,. \qquad (15)$$

Выражение

$$\left|J_0(\tilde{A}_m)H_0^{(1)}(\tilde{A}_m)\frac{\tau_m}{\Delta_m}\right|_{\sigma_m=1} = \frac{0}{0}\,.$$

Раскрывая его по правилу Лопиталя, найдем

$$\left|J_0(\tilde{A}_m)H_0^{(1)}(\tilde{A}_m)\frac{\tau_m}{\Delta_m}\right| = 1\,,$$

а так как

$$2j_{0n}r \approx 2\left(n - \frac{1}{4}\right)\pi r \approx 2n\pi r,$$

$$2j_{0\nu}r \approx 2\left(\nu - \frac{1}{4}\right)\pi r \approx 2\nu\pi r\,,$$

для $\tilde{P}_{n\nu}$ имеем

$$\tilde{P}_{n\nu} = -\frac{4r^2}{\pi i}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(e_n^2-1)\gamma_n\sqrt{(2æ r)^2 - m^2}}{\left[(2æ r)^2 - (2n\pi r)^2 - m^2\right]}\times$$

$$\times\frac{1}{\left[(2æ r)^2 - (2\nu\pi r)^2 - m^2\right]}\,. \qquad (16)$$

Тогда $g_\nu^{(0)}$ будет решением системы

$$g_\nu^{(0)} + \sum_{n=1}^{\infty} g_n^{(0)}P_{n\nu}^{(0)} = \frac{\delta_\nu^p}{H_0^{(1)}(j_{0\nu})}\,, \qquad (17)$$

а $\tilde{g}_\nu$ удовлетворяют уравнениям

$$\tilde{g}_\nu + \sum_{n=1}^{\infty}\tilde{g}_n P_{n\nu} = -\sum_{n=1}^{\infty} g_n^{(0)}\tilde{P}_{n\nu}\,. \qquad (18)$$

Из представления (10) видно, что система (17) имеет вырожденное ядро и может быть записана как

$$g_\nu^{(0)} - \frac{æ\tau_0 J_0(æ)H_0^{(1)}(æ)}{4r\pi i\Delta_0}\psi_\nu\sum_{n=1}^{\infty} g_n^{(0)}\varphi_n =$$

$$= \frac{\delta_\nu^p}{H_0^{(1)}(j_{0\nu})}\,. \qquad (19)$$

Умножив (19) на φ_ν и просуммировав по ν, получим

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} g_\nu^{(0)}\varphi_\nu - \frac{æ\tau_0 J_0(æ)H_0^{(1)}(æ)}{4r\pi i\Delta_0}\times$$

$$\times\sum_{\nu=1}^{\infty}\varphi_\nu\psi_\nu\sum_{n=1}^{\infty} g_n^{(0)}\varphi_n = \frac{\varphi_p}{H_0^{(1)}(j_{0p})}\,,$$

откуда

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} g_\nu^{(0)}\varphi_\nu = \frac{4r\pi i\Delta_0}{H_0^{(1)}(j_{0p})}\times$$

$$\times\frac{\varphi_p}{\left[4r\pi i\Delta_0 - æ\tau_0 S J_0(æ)H_0^{(0)}(æ)\right]}\,, \qquad (20)$$

где

$$S = \sum_{\nu=1}^{\infty}\varphi_\nu\psi_\nu = \sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{e_\nu^2 - 1}{\gamma_\nu^3}\,. \qquad (21)$$

Подставляя (20) в (19), найдем

$$g_n^{(0)} = \frac{\delta_n^p}{H_0^{(1)}(j_{0n})} + \frac{C\varphi_p\psi_n}{H_0^{(1)}(j_{0p})}\,, \qquad (22)$$

где $$C = \frac{æ\tau_0 J_0(æ) H_0^{(1)}(æ)}{4r\pi i\Delta_0 - æ\tau_0 S J_0(æ) H_0^{(1)}(æ)}. \qquad (23)$$

Подставляя значение $g_n^{(0)}$ в выражение для правой части (18), получим оценку

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} g_n^{(0)} \tilde{P}_{n\nu}\right|,$$

где $g_n^{(0)}$ и $\tilde{P}_{n\nu}$ определяются выражениями (22) и (16). Для этого достаточно оценить

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty}\left[g_n^{(0)} - \frac{\delta_n^p}{H_0^{(1)}(j_{0n})}\right]\tilde{P}_{n\nu}\right| =$$

$$= \left|\frac{C\varphi_p}{H_0^{(1)}(j_{0p})}\frac{(2ær)^2}{æ^2\pi i}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e_n^2-1}{\gamma_n}\times\right.$$

$$\times\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\sqrt{(2ær)^2-m^2}}{\left[(2ær)^2-(2n\pi r)^2-m^2\right]}\times$$

$$\left.\times\frac{1}{\left[(2ær)^2-(2\nu\pi r)^2-m^2\right]}\right|.$$

При больших m, n, ν и $ær << 1$ имеем

$$\gamma_n \approx in;\ \sqrt{(2ær)^2-m^2} \approx im;$$

$$e_n^2 - 1 \approx -1;$$

$$(2ær)^2-(2n\pi r)^2-m^2 \approx$$

$$\approx -\left[(2n\pi r)^2+m^2\right];$$

$$(2ær)^2-(2\nu\pi r)^2-m^2 \approx$$

$$\approx -\left[(2\nu\pi r)^2+m^2\right].$$

Тогда

$$\left|\left[g_n^{(0)} - \frac{\delta_n^p}{H_0^{(1)}(j_{0n})}\right]\tilde{P}_{n\nu}\right| = \left|\frac{(2ær)^2}{æ^2\pi i}\times\right.$$

$$\times\frac{C\varphi_p}{H_0^{(1)}(j_{0p})}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{m}{\left[m^2+(2n\pi r)^2\right]}\times \qquad (24)$$

$$\left.\times\frac{1}{\left[m^2+(2\nu\pi r)^2\right]}\right|.$$

Выражение под знаком суммы по m запишем в виде

$$\frac{m}{\left[m^2+(2\nu\pi r)^2\right]\left[m^2+(2n\pi r)^2\right]} =$$

$$= \frac{1}{(2r\pi)^2(n^2-\nu^2)}\times$$

$$\times\left[\frac{m}{m^2+(2\nu\pi r)^2} - \frac{m}{m^2+(2n\pi r)^2}\right].$$

Тогда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{m}{\left[m^2+(2\nu\pi r)^2\right]\left[m^2+(2n\pi r)^2\right]} =$$

$$= \frac{1}{(2r\pi)^2(n^2-\nu^2)}\times$$

$$\times\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{m}{m^2+(2\nu\pi r)^2} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{m}{m^2+(2n\pi r)^2}\right\}.$$

Используя интегральное представление сумм, имеем

$$\sum_{m=1}^{\infty}\frac{m}{m^2+(2\nu\pi r)^2} = \int_1^{\infty}\frac{xdx}{x^2+(2\nu\pi r)^2} =$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|x^2+(2\nu\pi r)^2\right|_1^{\infty};$$

$$\sum_1^{\infty}\frac{m}{m^2+(2n\pi r)^2} = \int_1^{\infty}\frac{xdx}{x^2+(2n\pi r)^2} =$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|x^2+(2n\pi r)^2\right|_1^{\infty}.$$

Тогда

$$\sum_{m=1}^{\infty}\frac{m}{m^2+(2\nu\pi r)^2} - \sum_{m=1}^{\infty}\frac{m}{m^2+(2n\pi r)^2} =$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\ln\left|\frac{x^2+(2\nu\pi r)^2}{x^2+(2n\pi r)^2}\right|\right\}_1^{\infty} =$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\ln\left|1+(2n\pi r)^2\right| - \ln\left|1+(2\nu\pi r)^2\right|\right\}.$$

Учитывая, что

$$\ln\left|1+(2n\pi r)^2\right| < 2n\pi r,$$

$$\ln\left|1+(2\nu\pi r)^2\right| < 2\nu\pi r,$$

получим

$$\sum_{m=1}^{\infty}\frac{m}{\left[m^2+(2\nu\pi r)^2\right]\left[m^2+(2n\pi r)^2\right]}<$$

$$<\frac{1}{(2æ r\pi)}\frac{æ}{2(n+\nu)}.$$

Тогда $$\left|\left[g_n^{(0)}-\frac{\delta_n^p}{H_0^{(1)}(j_{0n})}\right]\tilde{P}_{n\nu}\right|<$$

$$<(æ r)\frac{C\varphi_p}{H_0^{(1)}(j_{0p})}\frac{1}{æ\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+\nu)}. \qquad (25)$$

Сумма по n в соответствии с [3] равна

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+\nu)}=\frac{1}{\nu}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}-\frac{1}{\nu}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+\nu}=$$

$$=\frac{1}{\nu}\ln\left|\frac{n}{n+\nu}\right|_1^{\infty}=-\frac{1}{\nu}\ln\left|\frac{1}{1+\nu}\right|=$$

$$=\frac{1}{\nu}\ln|1+\nu|.$$

Окончательно имеем

$$\left|\left[g_n^{(0)}-\frac{\delta_n^p}{H_0^{(1)}(j_{0n})}\right]\tilde{P}_{n\nu}\right|<$$

$$<(æ r)\frac{C\varphi_p}{H_0^{(1)}(j_{0p})}\frac{\ln|1+\nu|}{æ\pi^2\nu}. \qquad (26)$$

Как следует из оценки (26), решения приближенной системы уравнений $g_\nu^{(0)}$ отличаются от решения исходной системы (1) на величину, пропорциональную $æ r$. Следовательно, при $æ r<<1$ решения, найденные для $\tilde{g}_\nu$, будут малыми, и в решении для (1) можно полагать $g_\nu \cong g_\nu^{(0)}$ и определять их по формуле (22) или как

$$g_\nu^{(0)}=\frac{\delta_\nu^p}{H_0^{(1)}(j_{0\nu})}+\frac{C(e_p^2-1)}{\gamma_p\gamma_\nu^2H_0^{(1)}(j_{0p})}, \qquad (27)$$

где C определяется выражением (23).

Коэффициенты отражения в верхний волновод b_n в соответствии с (10) в [1] равны

$$b_n=\delta_n^p+g_n(e_n^2-1)H_0^{(1)}(j_{0n}) \qquad (28)$$

и для длинноволнового приближения будут вычисляться по формуле

$$b_n^{(0)}=e_n^2\delta_n^p+\frac{H_0^{(1)}(j_{0n})}{H_0^{(1)}(j_{0p})}C\varphi_p\psi_n. \qquad (29)$$

Коэффициенты прохождения в нижний волновод s_n в соответствии с (21) в [1] равны

$$s_n=2\left[g_ne_n-\sum_{m=-\infty}^{\infty}f_m(-1)^m\beta_n^m\right] \qquad (30)$$

или

$$s_n=2\left[g_ne_n-\sum_{m=-\infty}^{\infty}c_m\tau_m(-1)^m\beta_n^m\right], \qquad (31)$$

где $$c_m=-\frac{2}{\pi i\Delta_m\tilde{A}_m}\sum_{n=1}^{\infty}g_n\alpha_m^n. \qquad (32)$$

Тогда в приближении $æ r<<1$ имеем:

$$s_n^{(0)}=2\left\{g_n^{(0)}e_n-\frac{æ\tau_0J_0(æ)H_0^{(1)}(æ)}{2\pi ri\Delta_0}\times\right.$$

$$\left.\times\sum_{n=1}^{\infty}g_n^{(0)}\frac{e_n^2-1}{\gamma_n^3}\right\}. \qquad (33)$$

Приближение "узкие щели". H_φ-поляризация

Для структуры с малой относительной высотой цилиндрического резонатора ($r<<1$) и в многоволновом случае можно получить явное решение системы (1). Для матричных коэффициентов $P_{n\nu}$, имеющих вид (8), систему (1) запишем как

$$g_\nu+\sum_{n=1}^{\infty}g_nP_{n\nu}^{(0)}=\frac{\delta_\nu^p}{H_0^{(1)}(j_{0\nu})}-$$

$$-\sum_{n=1}^{\infty}g_n\tilde{P}_{n\nu}, \qquad (34)$$

где $P_{n\nu}^{(0)}$ и $\tilde{P}_{n\nu}$ определяются выражениями (10) и (16). Просуммируем (34) по ν после умножения на φ_ν:

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}g_\nu\varphi_\nu-\frac{æ\tau_0J_0(æ)H_0^{(1)}(æ)}{4r\pi i\Delta_0}\sum_{\nu=1}^{\infty}\varphi_\nu\psi_\nu\times$$

$$\times\sum_{n=1}^{\infty} g_n\varphi_n = \frac{\varphi_p}{H_0^{(1)}(j_{0p})} - \sum_{n=1}^{\infty} g_n \sum_{\nu=1}^{\infty}\varphi_\nu \tilde{P}_{n\nu},$$

откуда $$\sum_{n=1}^{\infty} g_n\varphi_n =$$

$$= \frac{4r\pi i\Delta_0\left[\frac{\varphi_p}{H_0^{(1)}(j_{0p})} - \sum_{n=1}^{\infty} g_n \sum_{\nu=1}^{\infty}\varphi_\nu \tilde{P}_{n\nu}\right]}{4r\pi i\Delta_0 - æ\tau_0 S J_0(æ)H_0^{(1)}(æ)}, \quad (35)$$

где S определяется по формуле (21).

Перепишем (34) в виде

$$g_\nu - \frac{æ\tau_0 J_0(æ)H_0^{(1)}(æ)\psi_\nu}{4r\pi i\Delta_0}\sum_{n=1}^{\infty} g_n\varphi_n =$$

$$= \frac{\delta_\nu^p}{H_0^{(1)}(j_{0\nu})} - \sum_{n=1}^{\infty} g_n\tilde{P}_{n\nu}$$

и подставим в него значение выражения (35). Получим

$$g_\nu - \frac{æ\tau_0 J_0(æ)H_0^{(1)}(æ)\psi_\nu}{4r\pi i\Delta_0 - æ\tau_0 S J_0(æ)H_0^{(1)}(æ)}\times$$

$$\times\left[\frac{\varphi_p}{H_0^{(1)}(j_{0p})} - \sum_{n=1}^{\infty} g_n \sum_{\nu=1}^{\infty}\varphi_\nu \tilde{P}_{n\nu}\right] =$$

$$= \frac{\delta_\nu^p}{H_0^{(1)}(j_{0\nu})} - \sum_{n=1}^{\infty} g_n\tilde{P}_{n\nu},$$

или $$g_\nu + \sum_{n=1}^{\infty} g_n A_{n\nu} = L_\nu^p, \quad (36)$$

где $$A_{n\nu} = \tilde{P}_{n\nu} +$$

$$+\frac{æ\tau_0 J_0(æ)H_0^{(1)}(æ)\psi_\nu \sum_{\nu=1}^{\infty}\varphi_\nu \tilde{P}_{n\nu}}{4r\pi i\Delta_0 - æ\tau_0 S J_0(æ)H_0^{(1)}(æ)}, \quad (37)$$

$$L_\nu^p = \frac{\delta_\nu^p}{H_0^{(1)}(j_{0\nu})} +$$

$$+\frac{æ\tau_0 J_0(æ)H_0^{(1)}(æ)}{\left[4r\pi i\Delta_0 - æ\tau_0 S J_0(æ)H_0^{(1)}(æ)\right]}\times \quad (38)$$

$$\times\frac{\psi_\nu\varphi_p}{H_0^{(1)}(j_{0p})},$$

а $\varphi_n, \psi_\nu, \tilde{P}_{n\nu}$ и S определяются по формулам (11), (16) и (21).

Введем обозначение $æ = j_{0n} + \varepsilon_k$. При $\varepsilon_k = 0$ в точке $\nu = k$ γ_ν обращается в нуль, а коэффициенты $A_{n\nu}$ становятся бесконечными. Условившись считать ε_k отличным от нуля и ограничиваясь рассмотрением узких щелей ($r \to 0$), получим приближенное решение (36), воспользовавшись методом последовательных приближений [5]. Первое приближение дает результат с точностью до r:

$$g_\nu = L_\nu^p. \quad (39)$$

Тогда для g_n имеем

$$g_n = \frac{\delta_n^p}{H_0^{(1)}(j_{0n})} + \frac{æ\tau_0 J_0(æ)H_0^{(1)}(æ)}{H_0^{(1)}(j_{0p})}\times$$

$$\times\frac{\psi_n\varphi_p}{4r\pi i\Delta_0 - æ\tau_0 S J_0(æ)H_0^{(1)}(æ)}. \quad (40)$$

Подставляя g_n в выражение (28), получим формулу для коэффициентов отражения в верхний волновод:

$$b_n = e_n^2\delta_n^p +$$

$$+(e_n^2 - 1)\frac{æ\tau_0 J_0(æ)H_0^{(1)}(æ)H_0^{(1)}(j_{0n})}{H_0^{(1)}(j_{0p})}\times$$

$$\times\frac{\psi_n\varphi_p}{4r\pi i\Delta_0 - æ\tau_0 S J_0(æ)H_0^{(1)}(æ)}. \quad (41)$$

После подстановки g_n в (31) с учетом (32) найдем коэффициенты прохождения в нижний волновод s_n:

$$s_n = 2g_n^{(0)}e_n + \frac{4\tau_0}{\pi iæ\Delta_0}\sum_{n=1}^{\infty} g_n^{(0)}\alpha_0^n\beta_n^0. \quad (42)$$

Приближение геометрической оптики. E_φ-поляризация

Анализируя дифракционное поле при больших частотах $(æ \gg 1,\ ær \gg 1)$, нужно учитывать, что амплитуды b_n, c_m, d_m, f_m и s_n убывают с ростом n и m. Если $æ \gg |n_1|$ и $ær \gg |m_I|$, где n_1 и m_1 – наибольшие номера гармоник с еще заметными амплитудами, то в представлении полей можно учитывать только гармоники с номерами $n < n_1$ и $m < m_1$ и приближенно для них принимать

$$\gamma_n = \sqrt{æ^2 - j_{1n}^2} = \sqrt{æ^2 - (n\pi)^2} \approx æ,$$

$$\tilde{A}_m = \sqrt{æ^2 - (m/2r)^2} \approx æ.$$

Тогда уравнения (34) и (37) в [1] будут иметь вид

$$g_n = \eta_0 \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m \beta_n^0 - \frac{\delta_n^p}{H_1^{(1)}(j_{1n})}, \quad (43)$$

$$c_m = \frac{2\alpha_m^0}{\pi i æ^2 \Omega_0} \sum_{n=1}^{\infty} g_n j_{1n}, \quad (44)$$

где
$$\lambda_0 = \frac{H_1^{(1)}(æ\theta) H_1^{(2)}(æ)}{H_1^{(2)}(æ\theta) H_1^{(1)}(æ)}, \quad (45)$$

$$\eta_0 = \frac{1-\lambda_0}{H_1^{(1)}(æ) J_1(æ)}, \quad (46)$$

$$\Omega_0 = \eta_0 H_1^{(1)}(æ) J_1(æ) - \frac{H_0^{(1)}(æ)}{H_1^{(1)}(æ)} -$$

$$-\lambda_0 \frac{H_0^{(2)}(æ)}{H_1^{(2)}(æ)}, \quad (47)$$

$$\alpha_m^0 = \frac{e_æ^2 - 1}{\pi i} \frac{m}{(2ær)^2 - m^2}, \quad (48)$$

$$e_æ^2 = e^{4i\pi ær}, \quad (49)$$

$$\beta_n^0 = -\frac{\pi i}{4ær} \frac{m j_{1n} H_1^{(1)}(æ) J_1(æ)}{(æ^2 - j_{1n}^2)}. \quad (50)$$

Умножим (43) на j_{1n} и просуммируем по n, а (44) умножим на β_n^0 и просуммируем по m. Получим

$$\sum_{n=1}^{\infty} g_n j_{1n} = \sum_{n=1}^{\infty} j_{1n} \eta_0 \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m \beta_n^0 -$$

$$-\frac{j_{1p}}{H_1^{(1)}(j_{1p})}, \quad (51)$$

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m \beta_n^0 = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{2\alpha_m^0 \beta_n^0}{\pi i æ^2 \Omega_0} \sum_{n=1}^{\infty} g_n j_{1n}. \quad (52)$$

Обозначим в (51) и (52)

$$\xi_n = \sum_{n=1}^{\infty} g_n j_{1n}, \quad \zeta_m = \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m \beta_n^0, \quad (53)$$

$$S_1 = \sum_{n=1}^{\infty} j_{1n} \eta_0;$$
$$S_2 = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{2\alpha_m^0 \beta_n^0}{\pi i æ^2 \Omega_0}. \quad (54)$$

Уравнения (51) и (52) тогда примут вид

$$\xi_n = \zeta_m S_1 - \frac{j_{1p}}{H_1^{(1)}(j_{1p})}, \quad (55)$$

$$\zeta_m = \xi_n S_2. \quad (56)$$

Из (55) и (56) находим

$$\xi_n = \frac{j_{1p}}{(S_1 S_2 - 1) H_1^{(1)}(j_{1p})}, \quad (57)$$

$$\zeta_m = \frac{j_{1p} S_2}{(S_1 S_2 - 1) H_1^{(1)}(j_{1p})}. \quad (58)$$

Тогда коэффициенты преобразования в промежуточной области 2 определятся как

$$g_n = \eta_0 \zeta_m - \frac{\delta_n^p}{H_1^{(1)}(j_{1n})}, \quad (59)$$

$$c_m = \frac{2\alpha_m^0}{\pi i æ^2 \Omega_0} \xi_n, \quad (60)$$

$$f_m = c_m \eta_0. \quad (61)$$

Коэффициенты отражения в верхний волновод определяются выражением

$$b_n = g_n (e_n^2 - 1) H_1^{(1)}(j_{1n}) - \delta_n^p,$$

поэтому в геометрооптическом приближении их можно рассчитывать по формуле

$$b_n = \eta_0 \zeta_m (e_æ^2 - 1) H_1^{(1)}(j_{1n}) - \delta_n^p e_æ^2. \quad (62)$$

Коэффициенты прохождения в нижний волновод в соответствии с [1] равны

$$s_n = -2\gamma_n \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m \frac{(-1)^m \eta_m}{m/2r} \beta_n^m, \quad (63)$$

а после подстановки в (63) выражения (60) имеем

$$s_n = \frac{2 j_{1n} \xi_n}{æ^2 - j_{1n}^2} \times$$
$$\times \frac{(e_æ^2 - 1)\eta_0 H_1^{(1)}(æ) J_1(æ)}{\pi i æ^2 \Omega_0} \times \quad (64)$$
$$\times \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^m m}{(2ær)^2 - m^2}.$$

H_φ-поляризация

Уравнения (16) и (20) в [1] при $\gamma_n \approx æ, \tilde{A}_m \approx æ$ будут иметь вид

$$g_n = \tau_0 \beta_n^0 \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m + \frac{\delta_n^p}{H_0^{(1)}(j_{0n})}, \quad (65)$$

$$c_m = -\frac{2\alpha_m^0}{\pi i \Delta_0 æ} \sum_{n=1}^{\infty} g_n, \quad (66)$$

где
$$\Delta_0 = \frac{H_1^{(1)}(æ)}{H_0^{(1)}(æ)} - \sigma_0 \frac{H_1^{(2)}(æ)}{H_0^{(2)}(æ)} -$$

$$-\tau_0 H_0^{(1)}(æ) J_1(æ), \quad (67)$$

$$\sigma_0 = \frac{H_0^{(1)}(æ\theta) H_0^{(2)}(æ)}{H_0^{(2)}(æ\theta) H_0^{(1)}(æ)}, \quad (68)$$

$$\tau_0 = \frac{1-\sigma_0}{H_0^{(1)}(æ) J_0(æ)}, \quad (69)$$

$$\beta_n^0 = -\frac{\pi i}{2} \frac{æ^2 J_0(æ) H_0^{(1)}(æ)}{æ^2 - j_{0n}^2}, \quad (70)$$

$$\alpha_m^0 = \frac{e_æ^2 - 1}{\pi i} \frac{æ}{(2ær)^2 - m^2}. \quad (71)$$

Обозначим в (65) и (66):

$$\phi_m = \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m, \; \varepsilon_n = \sum_{n=1}^{\infty} g_n \quad (72)$$

и просуммируем (65) по n, а (66) – по m. Получим:

$$\varepsilon_n = \sum_{n=1}^{\infty} \tau_0 \beta_n^0 + \frac{1}{H_0^{(1)}(j_{0p})}, \quad (73)$$

$$\phi_m = -\sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{2\alpha_m^0}{\pi i \Delta_0 æ} \varepsilon_n \quad (74)$$

или
$$\varepsilon_n = S_3 \phi_m + \frac{1}{H_0^{(1)}(j_{0p})}, \quad (75)$$

$$\phi_m = S_4 \varepsilon_n, \quad (76)$$

где

$$S_3 = \sum_{n=1}^{\infty} \tau_0 \beta_n^0; \qquad S_4 = -\sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{2\alpha_m^0}{\pi i \Delta_0 æ}. \quad (77)$$

Из (75) и (76) находим:

$$\varepsilon_n = \frac{1}{(1 - S_3 S_4) H_0^{(1)}(j_{0p})}, \quad (78)$$

$$\phi_m = \frac{S_4}{(1 - S_3 S_4) H_0^{(1)}(j_{0p})}. \quad (79)$$

Тогда для коэффициентов преобразования в области 2 имеем

$$g_n = \tau_0 \beta_n^0 \phi_m + \frac{\delta_n^p}{H_0^{(1)}(j_{0n})}, \quad (80)$$

$$c_m = -\frac{2\alpha_m^0}{\pi i \Delta_0 æ} \varepsilon_n, \quad (81)$$

$$f_m = \tau_0 c_m. \quad (82)$$

Коэффициенты отражения в верхний волновод b_n для H_φ-поляризации определяются выражением (28) и в случае геометрооптического приближения равны

$$b_n = (e_æ^2 - 1) \tau_0 \beta_n^0 \phi_m H_0^{(1)}(j_{0n}) +$$
$$+ e_æ^2 \delta_n^p. \quad (83)$$

Коэффициенты прохождения в нижний волновод для H_φ-поляризации определяются по формуле (31), а с учетом (82) и (81) они равны

$$s_n = 2\left[g_n e_æ + \frac{4r(e_æ^2 - 1)\tau_0 \beta_n^0 \varepsilon_n}{\pi^2 \Delta_0} \times \right.$$
$$\left. \times \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m^2 - (2ær)^2} \right]. \quad (84)$$

Вычислим суммы S_3 и S_4, входящие в коэффициенты преобразования:

$$S_3 = \tau_0 \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n^0 = \frac{\pi i}{2} \tau_0 æ^2 J_0(æ) H_0^{(1)}(æ) \times$$
$$\times \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{j_{0n}^2 - æ^2} = \frac{\pi i}{2} \tau_0 æ^2 J_0(æ) H_0^{(1)}(æ) \times \quad (85)$$
$$\times \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\left[(n - 0,25)\pi\right]^2 - æ^2}.$$

Сумму в (85) запишем в виде разности двух сумм и используем для них интегральное представление:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\left[(n-0,25)\pi\right]^2 - æ^2} =$$

$$= \frac{1}{2æ} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-0,25)\pi - æ} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-0,25)\pi + æ} \right\} =$$

$$= \frac{1}{2} \left\{ \int_1^{\infty} \frac{dx}{(x-0,25)\pi - æ} - \int_1^{\infty} \frac{dx}{(x-0,25)\pi + æ} \right\} =$$

$$= \frac{1}{2æ\pi} \left\{ \ln \left| \frac{(x-0,25)\pi - æ}{(x-0,25)\pi + æ} \right| \right\}_1^{\infty} =$$

$$= \frac{1}{2æ\pi} \ln \left| \frac{0,75\pi + æ}{0,75\pi - æ} \right|.$$

Тогда

$$S_3 = \frac{i}{4} \tau_0 æ J_0(æ) H_0^{(1)}(æ) ln \left| \frac{0,75\pi + æ}{0,75\pi - æ} \right|.$$

Сумма S_4 согласно (68) равна

$$S_4 = -\sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{2\alpha_m^0}{\pi i \Delta_0 æ} = -\frac{4}{\pi i \Delta_0 æ} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \alpha_m^0 =$$

$$= \frac{2(e_æ^2 - 1)}{\pi^2 \Delta_0} \left[\frac{1}{(2ær)^2} - 2\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2 - (2ær)^2} \right].$$

Запишем сумму по m как

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2 - (2ær)^2} =$$

$$= \frac{1}{4ær} \left[\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m - 2ær} - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m + 2ær} \right] =$$

$$= \frac{1}{4ær} \left[\int_1^{\infty} \frac{dx}{x - 2ær} - \int_1^{\infty} \frac{dx}{x + 2ær} \right] =$$

$$= \frac{1}{4ær} \ln \left| \frac{x - 2ær}{x + 2ær} \right|_1^{\infty} = \frac{1}{4ær} \ln \left(\frac{2ær + 1}{2ær - 1} \right).$$

Тогда окончательно имеем

$$S_4 = \frac{e_æ^2 - 1}{ær\pi^2 \Delta_0} \left\{ \frac{1}{2ær} - \ln \left(\frac{2ær + 1}{2ær - 1} \right) \right\}.$$

Заключение

На основе строгого решения задач дифракции электромагнитных волн обеих поляризаций на симметричном стыке двух круглых волноводов с цилиндрическим резонатором в длинноволновом приближении, приближениях "узкие щели" и геометрической оптики получены достаточно простые явные формулы, позволяющие быстро и с достаточной для практики точностью вычислять коэффициенты преобразования на такой структуре.

Литература

1. Заикин И.П., Ткаченко А.А. Дифракция электромагнитных волн на симметричном соединении двух круглых волноводов с цилиндрическим резонатором. Часть I. Постановка и строгое решение задачи // Радіоелектронні і комп’ютерні системи. – 2007. – Вип. 3 (22). – С. 5-13.

2. Заикин И.П., Удачин Д.В. Дифракция электромагнитных волн на несимметричном соединении двух структур прямоугольного сечения. Часть I. Постановка и строгое решение задачи // Радіоелектронні і комп’ютерні системи. – 2006. – Вип. 1 (13). – С. 20-27.

3. Заикин И.П., Удачин Д.В. Дифракция электромагнитных волн на несимметричном соединении двух структур прямоугольного сечения. Часть II. Существование и единственность решения. Геометрооптическое и длинноволновое приближения // Радіоелектронні і комп’ютерні системи. – 2006. – Вип. 2 (14). – С. 23-30.

4. Заикин И.П. Рассеяние волн на соединении полубесконечной коаксиальной линии и радиального волновода // Радиоэлектроника летательных аппаратов: Темат. сб. научн. трудов. – Х: ХАИ, 1984. – Вып. 14. – С. 87-95.

5. Конторович Л.В., Крылов В.И. Приближенные методы высшего анализа. – М.-Л.: Гос. издательство техн.-теорет. литературы, 1950. – 695 с.

Поступила в редакцию 29.08.2007

Рецензент: д-р техн. наук, проф. В.В. Лукин, Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского "ХАИ", Харьков.