УДК 681.513.7

А.Ю. СОКОЛОВ[1], М. ВАГЕНКНЕХТ[2]

[1]*Национальный аэрокосмический университет им. Н. Е. Жуковского “ХАИ”, Украина*
[2]*Университет прикладных наук, Циттау, Германия*

АНАЛИЗ ХАОТИЧЕСКОЙ ДИНАМИКИ В НЕЧЕТКИХ РЕКУРРЕНТНЫХ МОДЕЛЯХ

Рассмотрены методы анализа хаотических рекуррентных моделей на основе определений хаоса Ли-Йорке и Клоедена. Решена задача определения хаотической динамики в таких моделях по значениям консеквентов правил. Сформулированы и решены задачи как для одношаговых моделей Такаги-Сугено, так и для моделей произвольного порядка.

рекуррентная модель, нечеткие множества, продукционная система, хаос

Введение

Одной из наиболее распространенных моделей описания динамических процессов являются разностные уравнения либо системы таких уравнений. Особый интерес представляет исследование устойчивости временных последовательностей, генерируемых с помощью подобных моделей, заданных на компактных множествах. Предмет анализа рекуррентных моделей – определение характера поведения временного ряда, который может быть сходящимся, периодическим, либо носить хаотический характер. Наличие хаотического характера в динамической модели не позволяет использовать ее в долгосрочном прогнозе и делает такую модель пригодной лишь для короткопериодического исследования. Поэтому определение в динамической модели хаотических свойств представляет собой важную задачу.

В настоящее время одной из популярных моделей описания динамики являются продукционные рекуррентные модели, относящиеся к классу нелинейных динамических систем. Поскольку для продукционных рекуррентных моделей, в отличие от аналитических разностных уравнений, в настоящее время не существует алгоритмов анализа, предлагается исследование рекуррентных продукционных моделей Такаги-Сугено с помощью определений хаоса по Ли-Йорке, Девани и Клоедена [1,2]. Сформулированы основные свойства продукционных моделей, обладающих хаотической динамикой, показаны значения параметров консеквентов и функций принадлежности нечетких множеств, при которых возможно продуцирование хаотических последовательностей.

Предложенные результаты позволят с помощью разработанной методологии исследования определять характер динамических рекуррентных нечетких систем.

1. Применение нечетких рекуррентных моделей в задачах моделирования динамических систем

Динамика любой системы описывается математической моделью, которая отражает зависимости между тремя множествами переменных: входа, выхода и состояния. Основное свойство любой динамической системы заключается в том, что ее поведение в любой момент времени зависит не только от переменных, действующих на нее в данный момент времени, но и от переменных, действовавших на нее в прошлом.

Известно, что с помощью продукционных

моделей представляется возможным естественно описать декларативный опыт человека, его интуицию и логику поведения [6]. Зачастую целесообразно также использовать нечеткие лингвистические переменные, с помощью которых можно адекватно отразить приблизительное описание взаимодействующих элементов, в том случае, когда точное детерминированное описание отсутствует [6]. При этом следует учесть, что многие нечеткие категории, описанные лингвистически, зачастую не менее информативны, чем точное описание.

Нечеткое рекуррентное отображение определяется множеством наборов правил $\mathrm{R} = \{\mathrm{r}_1, \mathrm{r}_2, \ldots, \mathrm{r}_\mathrm{N}\}$, связывающих значения переменных состояния $(x_1,\ldots,x_N)$ динамической системы в текущий τ и будущий t моменты времени:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_N \end{pmatrix}_t = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \ldots \\ r_N \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_N \end{pmatrix}_\tau . \qquad (1)$$

Наборы правил (1) имеют вид

$$\mathrm{r}_\mathrm{i}: \begin{cases} \mathrm{IF}\ \ \mathrm{x}_1 = \mathrm{A}_1^1\ \ \mathrm{AND}\ \ \mathrm{x}_2 = \mathrm{A}_2^1 \ldots \\ \left[\mathrm{AND}\ \ \mathrm{x}_\mathrm{k} = \mathrm{A}_\mathrm{k}^1\right] \ldots \mathrm{x}_\mathrm{N} = \mathrm{A}_\mathrm{N}^1 \Big|_\tau \\ \mathrm{THEN}\ \ \mathrm{x}_\mathrm{i} = \mathrm{B}^1 \Big|_\mathrm{t} \\ \mathrm{IF}\ \ \mathrm{x}_1 = \mathrm{A}_1^2\ \ \mathrm{AND}\ \ \mathrm{x}_2 = \mathrm{A}_2^2 \ldots \\ \left[\mathrm{AND}\ \ \mathrm{x}_\mathrm{k} = \mathrm{A}_\mathrm{k}^2\right] \ldots \mathrm{x}_\mathrm{N} = \mathrm{A}_\mathrm{N}^2 \Big|_\tau \\ \mathrm{THEN}\ \ \mathrm{x}_\mathrm{i} = \mathrm{B}^2 \Big|_\mathrm{t} \\ \ldots\ldots\ldots \\ \mathrm{IF}\ \ \mathrm{x}_1 = \mathrm{A}_1^{\mathrm{K}_\mathrm{i}}\ \ \mathrm{AND}\ \ \mathrm{x}_2 = \mathrm{A}_2^{\mathrm{K}_\mathrm{i}} \ldots \\ \left[\mathrm{AND}\ \ \mathrm{x}_\mathrm{k} = \mathrm{A}_\mathrm{k}^{\mathrm{K}_\mathrm{i}}\right] \ldots \mathrm{x}_\mathrm{N} = \mathrm{A}_\mathrm{N}^{\mathrm{K}_\mathrm{i}} \Big|_\tau \\ \mathrm{THEN}\ \ \mathrm{x}_\mathrm{i} = \mathrm{B}^{\mathrm{K}_\mathrm{i}} \Big|_\mathrm{t} \end{cases}, \qquad (2)$$

где K_i – количество правил в наборе r_i; элементы в квадратных скобках являются необязательными, т.е. не все переменные состояния могут быть задействованы в правиле; A_i, B – значения лингвистических переменных из соответствующих терм–множеств. Нетрудно показать, что количество правил набора находится в диапазоне $0 \le \mathrm{K}_\mathrm{i} \le \prod_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{N}} \mathrm{card}(\mathrm{S}(\mathrm{x}_\mathrm{i}))$, где $card(S(x_i))$ – мощность терм-множества лингвистической переменной x_i. Допускаются также и пустые наборы правил.

Замечание. Обычно отображение R задается на одном шаге дискретизации и характеризует переход последовательных состояний.

Очевидно, что анализ динамических лингвистических систем, представленных в общей форме (1), (2), довольно затруднителен ввиду высокой размерности пространства состояний и нелинейного импликативного характера взаимосвязи событий, переводящих систему из одного состояния в другое. Поэтому актуальным представляется нахождение такой формы описания динамики процесса, которая позволяла бы решать задачи анализа и синтеза формальными методами. Обычно на практике применяют лингвистическое описание в виде правил

IF $X_k=(x_1=nb,\ x_2=pm, \ldots,\ x_n=ze)$ *AND,*

$U_k=(u_1=pm,\ u_2=nb, \ldots,\ u_m=nm)$,

THEN $X_{k+1}=(x_1=pb,\ x_2=ps, \ldots,\ x_n=pb)$,

отражающих отношения изменения состояния системы в зависимости от входных воздействий

$$X_{k+1}=X_k \circ U_k, \qquad (3)$$

в котором $X_k=(x_1,x_2,\ldots,x_n)_k$ - обобщенный вектор состояния системы, а $U_k=(u_1,u_2,\ldots,u_m)_k$ - обобщенный вектор управляющих воздействий, значения которых представляют собой лингвистические переменные из заданного терм-множества

$$S=\{nb,nm,\ldots,ze,\ldots,pm,pb\},$$

где *nb - negative big, nm - negative middle, ze - zero, pm - positive middle, pb - positive big* – нечеткие множества с заданными функциями принадлежности [7].

Отношение (3) можно представить в виде сети переходов (рис. 1) обобщенных лингвистических состояний (вершины графа) под действием обобщенных лингвистических управляющих воздействий (ребра графа). Если N - размерность вектора

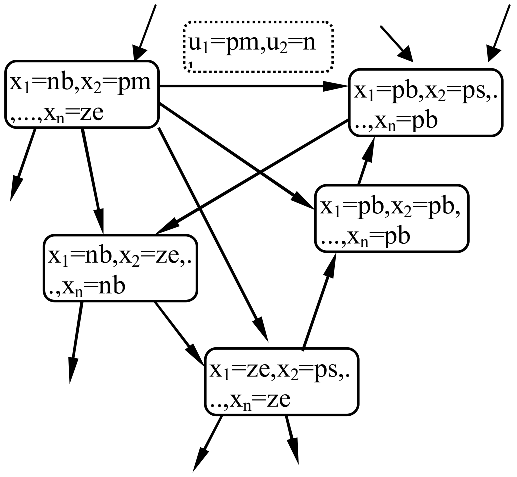

Рис.1. Граф переходов рекуррентной нечеткой системы

состояния X, P – размерность вектора управления U, M - мощность терм - множества лингвистических переменных S, то максимально возможное количество вершин сети (состояний системы) равно M·N, а количество дуг, соединяющих эти вершины (управляющих воздействий), – M·N·(MN-1)/2·MP.

Очевидно, что анализ подобных систем на основе имитационного моделирования и синтез оптимальных правил (значения ребер сети) представляют собой комбинаторную проблему.

На практике вместо общего вида отображения (3) используют его частные формы, когда векторы X, Y, U являются скалярными лингвистическими переменными. В случае, когда консеквенты правил являются лингвистическими, рассматриваемая модель представляет собой модель Мамдани, если функциональными, – модель Сугено.

Как правило, динамическое поведение таких систем описывается в виде таблиц лингвистических правил, связывающих управляющие воздействия U и выходы (либо состояния) объекта X. Пример такого отображения представлен в табл. 1.

Основная проблема анализа модели (3) - отсутствие формальных методов в пространстве лингвистических состояний, аналогичных числовым моделям и методам анализа и синтеза в евклидовом пространстве состояний, что затрудняет решение задач анализа устойчивости динамической модели, синтеза оптимальных систем управления и других задач.

Таблица 1.

Таблица лингвистических правил $X_{k+1} = X_k \circ U_k$

$\mathbf{U_k \backslash X_k}$	**nb**	**nm**	**ze**	**pm**	**pb**
nb	nb	nb	nb	nm	ze
nm	nb	nb	nm	ze	pm
ze	nb	nb	ze	pb	pb
pm	nm	ze	pm	pb	pb
pb	ze	pm	pb	pb	pb

Известные методы анализа нечетких динамических систем основаны либо на исследовании функций принадлежности нечетких множеств, либо на анализе переходов в расширяющемся пространстве состояний, либо на эвристических методах лингвистической динамики [8]. Существенным фактором является также размерность набора лингвистических правил, при котором число возможных правил экспоненциально увеличивается с числом входных величин.

Сложность описания процессов управления проектами, наличие эвристических алгоритмов фаззификации и дефаззификации, а также использование нечетких множеств и лингвистических переменных приводят к необходимости разработки новых методов анализа подобных систем.

2. Исследование хаотической динамики нечетких рекуррентных моделей Такаги-Сугено нулевого порядка

В математике хорошо известны аппроксимационные свойства модели нечетких рекуррентных моделей, в частности, моделей Такаги-Сугено (ТС). Рассмотрим свойства динамических моделей ТС нулевого порядка, определяющие их хаотическое поведение.

Исторически Ли и Йорке первыми дали определение хаоса [1]. Они рассматривали отображение $f : I \to I$ (где I - единичный интервал) типа

$$x_{n+1} = f(x_n)\,. \qquad (4)$$

Определение 1. *(Ли–Йорке) [2]. Отображение $f : I \to I$ является **хаотическим**, если:*

(I) существует положительное число K (K=1 в[2]), такое, что итерационная схема (4) имеет цикл периода k для любого $k > K$;

(II) итеративная схема (4) имеет такое «неустойчивое» множество (scrambled set) $S \subset I$, которое является несчетным и не содержит циклических точек в f , а также обладает свойствами:

(a) $f(S) \subset S$,

(b) для каждого $x_0, y_0 \in S$ при $x_0 \neq y_0$,

$$\lim_{n\to\infty} \sup \left| f^n(x_0) - f^n(y_0) \right| > 0\,,$$

(c) для каждого $x_0 \in S$ и циклической точки y_0 для f $\lim\limits_{n\to\infty} \sup \left| f^n(x_0) - f^n(y_0) \right| > 0$;

(III) существует несчетное подмножество $S_0 \subset S$, такое, что для всех $x_0, y_0 \in S$,

$$\lim_{n\to\infty} \inf \left| f^n(x_0) - f^n(y_0) \right| = 0\,.$$

Теорема 1. (Ли–Йорке) [1]. *Если функция $f : I \to I$ является непрерывной на компакте I и существует такая точка $a \in I$, для которой выполняется $f^3(a) \le a < f(a) < f^2(a)$ (либо $f^3(a) \ge a > f(a) > f^2(a)$), то f имеет цикл длиной три и является хаотическим отображением.*

Следующая теорема определяет достаточные условия существования хаоса в Банаховом пространстве.

Теорема 2. (Клоеден) [2]. *Пусть $f : I \to I$ - непрерывное отображение Банахова пространства I в себя и пусть существуют непустые компактные подмножества A и B из I, а также целые числа $n_1, n_2 \ge 1$, такие, что:*

(i) A гомеоморфно выпуклому подмножеству из I,

(ii) $A \subseteq f(A)$,

(iii) f является расширяющимся отображением на A, т.е. существует такая константа $\lambda > 1$, что

$$\lambda \|x - y\| \le \|f(x) - f(y)\|$$

для всех $x, y \in A$,

(iv) $B \subset A$,

(v) $f^{n_1}(B) \cap A = \varnothing$,

(vi) $A \subseteq f^{n_1+n_2}(B)$,

(vii) $f^{n_1+n_2}$ инъективно на B (один-к-одному).

Тогда отображение f хаотично в смысле определения 1 (при условии, что I – Банахово пространство).

В первую очередь необходимо выяснить:

- могут ли нечеткие рекуррентные модели быть хаотическими,
- как распознать хаотическое поведение по структуре модели ТС?

Решению этих задач и посвящено последующее изложение.

Динамику модели Такаги-Сугено нулевого порядка в скалярном случае можно представить в виде

$$\begin{aligned}
&R_1\text{: If } x_k = L_1 \text{ then } x_{k+1} = A_1,\\
&R_2\text{: If } x_k = L_2 \text{ then } x_{k+1} = A_2,\\
&\dots\\
&R_N\text{: If } x_k = L_N \text{ then } x_{k+1} = A_N,
\end{aligned} \qquad (5)$$

где L_i – лингвистические переменные (термы), A_i – числовые коэффициенты.

В современных исследованиях моделей ТС превалируют следующие наиболее общие ограничения:

1. Полная база знаний (5).
2. Непротиворечивый набор правил.
3. Одношаговая временная задержка.

4. Скалярное отображение – SISO.

Функции принадлежности лингвистических термов обладают, как правило, следующими ограничениями:

1. Ограниченность $\mu(x) \in [0,1], x \in X$.

2. Выпуклость $\mu(x)$ с возрастающей (убывающей) ветвью для $x > (<) s^x$ - центры функций принадлежности.

3. Разделение $\sum_j \mu_j(x_i) > 0, x_i \in X_i$.

4. Обратное соответствие $\mu_i(s_j) = 0, i \neq j$.

Переходная функция отображения (4) может быть записана в виде

$$f(x) = \frac{\sum_{i=1}^{N} \mu_i(x) \cdot A_i}{\sum_{i=1}^{N} \mu_i(x)}$$

либо с учетом приведенных выше ограничений для полной базы знаний

$$f(x) = \sum_{i=1}^{N} \mu_i(x) \cdot A_i \ .$$

Тогда можно исследовать орбиты

$$x_{k+n} = f^n(x_k) = f(f(f...(x_k))). \qquad (6)$$

При условии $A_i \in \{L_1, L_2, ..., L_N\}$ (модель Мамдани) рекуррентная нечеткая система может рассматриваться как лингвистический автомат, в котором *L(0),L(1),...L(k),L(k+1),...*- лингвистическая орбита, где *L(i)* – лингвистическая переменная нечеткой модели. Последовательность *s(0),s(1),...s(k),s(k+1)* центров соответствующих функций принадлежности можно также рассматривать как дефаззифицированную орбиту. Известна следующая теорема [3].

Теорема 3. *Если одномерная непрерывная рекуррентная нечеткая система имеет лингвистическую орбиту L(0), L(1),...L(n), ..., а лингвистические значения удовлетворяют цепному неравенству*

$$L(n) \geq L(0) > L(1) > L(2) \text{ либо}$$

$$L(n) \leq L(0) < L(1) < L(2),$$

то эта рекуррентная нечеткая система будет хаотической по Ли-Йорке в окрестности соответствующих орбит центров функций принадлежности s(0),s(1),...s(k),s(k+1).

Однако данная теорема, базирующаяся на классическом определении Ли – Йорке, имеет ограниченное применение лишь в области, близкой к центрам соответствующих функций принадлежности.

Проблемой остается исследование поведения рекуррентной модели ТС в произвольной точке фазового пространства. Идентификация хаотической динамики для произвольных начальных условий в модели ТС нулевого порядка и является основной задачей исследования в настоящей работе.

В связи с этим актуальными представляются следующие вопросы:

- определить минимальное число правил, которые могут создавать хаос;
- определить зависимости между параметрами модели ТС, определяющие хаотическое поведение.

Согласно теореме 1 в фазовом пространстве должна существовать, по крайней мере, одна точка *a*, для которой отображение (5) будет создавать последовательности, удовлетворяющие условию

$$f^3(a) \leq a < f(a) < f^2(a) \text{ либо}$$

$$f^3(a) \geq a > f(a) > f^2(a) \ . \qquad (7)$$

Тогда справедлива следующая лемма.

Лемма 1. *Минимальное число правил модели ТС нулевого порядка для создания хаоса равно трем.*

Доказательство. В случае одного правила передаточную функцию $f: x_k \to x_{k+1}$ модели (5) согласно общим ограничениям нормировки можно записать в виде

$$f(x) = \mu_1(x) \cdot A_1 \text{ для } \forall x \in X \ .$$

Поскольку в данном случае $\mu_1(x) = 1$ для

$\forall x \in X$, то $f(x) = A_1$ для $\forall x \in X$ и $x_1 = f(x_o) = x_0$. Следовательно, условия (7) не выполняются.

Для двух правил верно

$$f(x) = \mu_1(x) \cdot A_1 + \mu_2(x) \cdot A_2 \text{ для } \forall x \in X. \quad (8)$$

Если предположить, что центры функций принадлежности удовлетворяют условиям

$0 \le a_1 < a_2 < a_3 \le 1$, то

для $x \in [0, a_1]$: $f(x) = A_1$;

для $x \in [a_2, 1]$: $f(x) = A_2$;

для $x \in [a_1, a_2]$:

$$f(x) = \frac{a_2 - x}{a_2 - a_1} \cdot A_1 + \frac{x - a_1}{a_2 - a_1} \cdot A_2.$$

Поскольку отображение (8) - это монотонная функция, т.е. $a \le f(a) \le f^2(a) \le f^3(a)$ либо $a \ge f(a) \ge f^2(a) \ge f^3(a)$ (в зависимости от значений A_1, A_2), следовательно, условия (7) также не удовлетворяются.

В случае трех правил имеем

R_1: *If* $x_k = L_1$ *then* $x_{k+1} = A_1$,

R_2: *If* $x_k = L_2$ *then* $x_{k+1} = A_2$, (9)

R_3: *If* $x_k = L_3$ *then* $x_{k+1} = A_3$.

Тогда

для $x \in [0, a_1]$: $f(x) = A_1$;

для $x \in [a_3, 1]$: $f(x) = A_3$;

для $x \in [a_1, a_2]$:

$$f(x) = \frac{a_2 - x}{a_2 - a_1} \cdot A_1 + \frac{x - a_1}{a_2 - a_1} \cdot A_2;$$

для $x \in [a_2, a_3]$:

$$f(x) = \frac{a_3 - x}{a_3 - a_2} \cdot A_2 + \frac{x - a_2}{a_3 - a_2} \cdot A_3.$$

Тогда отображение $f(x)$ является кусочно-линейной функцией и если

$A_1 = a_1, A_2 = a_3, A_3 = a_1$,

$a_1 = 0, a_2 = 0.5, a_3 = 1$, представляет собой известное отображение тента [2] и, следовательно, является хаотическим.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 4. *База правил (9) с переходной функцией* $f: I \to I$ *хаотична в смысле Ли-Йорке, если удовлетворяются следующие условия:*

(a) $A_1 \in [a_1, a_2]$,

(b) $A_2 = a_3$,

(c) $A_3 \in [a_1, a_2)$.

Доказательство. В соответствии с теоремой 2 достаточно найти подходящие множества A и B. Очевидно, что f отображает интервал $[a_1, a_3]$ в себя. Пусть $A = [a_2 + \varepsilon_1, a_3 - \varepsilon_2]$, $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$, $B = [\xi, \psi] \subset A$.

Определим $f(A)$. В соответствии с допущениями (b),(c) теоремы 2 $\lim\limits_{\varepsilon_1 \to 0} f(a_2 + \varepsilon_1) = a_3$ и $\lim\limits_{\varepsilon_2 \to 0} f(a_3 - \varepsilon_2) = A_3 \in [a_1, a_2)$. Следовательно, $f(A) \subset I$. Более того, f является выпуклым на A. Нетрудно видеть, что для каждого $a \in A$ в соответствии с

$$f(x) = \frac{a_3 - x}{a_3 - a_2} \cdot A_2 + \frac{x - a_2}{a_3 - a_2} \cdot A_3$$

существуют $c = f(a)$ и $a = f^{-1}(c)$, удовлетворяющие условиям (b) и (c) теоремы Клоедена. Легко также видеть, что $A \subseteq f(A)$. Действительно,

$$f(A) = [f(a_3 - \varepsilon_2), f(a_2 + \varepsilon_1)] \subset [A_3, a_3],$$

$$\lim_{\substack{\varepsilon_1 \to 0, \\ \varepsilon_2 \to 0}} f(A) = [A_3, a_3].$$

Далее мы должны доказать, что f является расширяющимся на А, т.е. для $\forall x, y \in A = [a_2 + \varepsilon_1, a_3 - \varepsilon_2]$ необходимо найти константу $\lambda > 1$, при которой верно неравенство

$$\lambda\|x-y\| \le \left\| \begin{matrix} \frac{a_3 - x}{a_3 - a_2} \cdot A_2 + \\ \frac{x - a_2}{a_3 - a_2} \cdot A_3 - \frac{a_3 - y}{a_3 - a_2} \cdot A_2 - \\ \frac{y - a_2}{a_3 - a_2} \cdot A_3 \end{matrix} \right\|.$$

Тогда необходимо и достаточно, чтобы

$$\left\| \frac{A_3 - A_2}{a_3 - a_2} \right\| > 1.$$

Когда $A_2 = a_3$ (условие (b)), очевидно, что должно выполняться $A_3 \in [a_1, a_2)$ (условие (c)).

Поскольку $B = [\xi, \psi] \subset A$, достаточно найти параметры $\xi > a_2 + \varepsilon_1$, $\psi \le a_3 - \varepsilon_2$ и n_1 и n_2, удовлетворяющие условиям

$$f^{n_1}(B) \cap A = \varnothing,\ A \subseteq f^{n_1+n_2}(B).$$

Для $n_1 = 1$ необходимо, чтобы $f(a) \notin A$ для всех $a \in B$.

Поскольку $\lim\limits_{\varepsilon_2 \to 0} f(a_3 - \varepsilon_2) = A_3 \in [a_1, a_2)$ и $f(\xi) > f(a_3 - \varepsilon_2)$, то в соответствии с условием (a) имеем также $f(\xi) > a_1$. Пусть $\xi = f^{-1}(a_2)$. Следовательно, $B = [f^{-1}(a_2), \psi]$ и $f(B) = [f(\psi), a_2]$. Тогда очевидно, что $f(B) \cap A = \varnothing$. Для $n_2 = 1$ имеем

$$f(f(B)) = [f(f(\psi)), a_3].$$

Для обеспечения $A \subseteq f^{n_1+n_2}(B)$ необходимо $f(f(\psi)) \le a_2$. Принимая во внимание, что для $x \in [a_1, a_2]$

$$f(x) = \frac{a_2 - x}{a_2 - a_1} \cdot A_1 + \frac{x - a_1}{a_2 - a_1} \cdot A_2$$

и if $\psi \le a_3$, $A_3 = a_1$, имеем $A_1 \le a_2$. Следовательно, условие (a) выполнимо. Очевидно, что $\psi = f^{-2}(a_2)$ является подходящим значением.

И, наконец, $f(f(B))$ является инъективным на *B* (один-к-одному). Поэтому *f* является хаотическим в смысле определения 1.

3. Исследование хаотической динамики нечетких рекуррентных моделей ТС нулевого порядка с произвольными временными задержками

Для описания многих сложных процессов часто используют модели Такаги-Сугено нулевого порядка с произвольными временными задержками. Такие в общем случае модели имеют вид

$$\begin{aligned} &R_1 : if\ x_k\ is\ L_{1j_k}\ and\ x_{k+1}\ is\ L_{1j_{k+1}}\ and \ldots \\ &and\ x_{k+n}\ is\ L_{1j_{k+n}}\ then\ x_{k+n+1} = A_1, \\ &R_2 : if\ x_k\ is\ L_{2j_k}\ and\ x_{k+1}\ is\ L_{2j_{k+1}}\ and \ldots \\ &and\ x_{k+n}\ is\ L_{2j_{k+n}}\ then\ x_{k+n+1} = A_2, \\ &\ldots \\ &R_M : if\ x_k\ is\ L_{Mj_k}\ and\ x_{k+1}\ is\ L_{Mj_{k+1}}\ and \ldots \\ &and\ x_{k+n}\ is\ L_{Mj_{k+n}}\ then\ x_{k+n+1} = A_M, \end{aligned} \tag{10}$$

где L_{ij_q} - лингвистические переменные (термы), а A_i - числовые константы.

Переходная функция таких моделей

$$f(x) = \frac{\sum_{j=1}^{M} \prod_{k=1}^{n} \mu_{jk}(x) \cdot A_i}{\sum_{j=1}^{M} \prod_{k=1}^{n} \mu_{jk}(x)} \text{ for } \forall x \in X. \tag{11}$$

Базы правил (10) также могут демонстрировать хаотическое поведение в смысле Ли - Йорке.

Рассмотрим сначала случай с временной задержкой, равной 2, а затем с более высокими порядками. Исследуем отображение $f : x, x, \ldots, x \to x$ на множестве $x \in I = [0,1]$.

В данном случае модель (10) можно переписать так:

$$\begin{aligned} &R_1: if\ x_k\ is L_{1j_k}\ and x_{k+1}\ is L_{1j_{k+1}}\ then x_{k+2}=A_1,\\ &R_2: if\ x_k\ is L_{2j_k}\ and x_{k+1}\ is L_{2j_{k+1}}\ then x_{k+2}=A_2,\\ &\ldots\\ &R_M: if\ x_k\ is L_{Mj_k}\ and x_{k+1}\ is L_{Mj_{k+1}}\ then x_{k+2}=A_M. \end{aligned} \qquad (12)$$

Легко видеть, что в данном случае достаточно трех правил, чтобы продуцировать хаотические последовательности. Для этого рассмотрим следующую базу знаний:

$$\begin{aligned} &R_1: if\ x_k\ is\ L_1\ then\ x_{k+2}=A_1,\\ &R_2: if\ x_k\ is\ L_2\ then\ x_{k+2}=A_2,\\ &R_3: if\ x_k\ is\ L_3\ then\ x_{k+2}=A_3. \end{aligned} \qquad (13)$$

Если лингвистические переменные L_i и консеквенты A_i в (13) удовлетворяют условиям теоремы 3 для случая с задержкой 1, получим хаотическую последовательность $X=\{x_0,x_2,\ldots,x_{2n},\ldots\}$.

В наиболее общем случае модель (13) можно представить как

$$\begin{aligned} &R_1: if\ x_k\ is\ L_1\ and\ x_{k+1}\ is\ L_1\ then\ x_{k+2}=A_{11},\\ &R_2: if\ x_k\ is\ L_1\ and\ x_{k+1}\ is\ L_2\ then\ x_{k+2}=A_{12},\\ &R_3: if\ x_k\ is\ L_1\ and\ x_{k+1}\ is\ L_3\ then\ x_{k+2}=A_{13},\\ &R_4: if\ x_k\ is\ L_2\ and\ x_{k+1}\ is\ L_1\ then\ x_{k+2}=A_{21},\\ &R_5: if\ x_k\ is\ L_2\ and\ x_{k+1}\ is\ L_2\ then\ x_{k+2}=A_{22},\\ &R_6: if\ x_k\ is\ L_2\ and\ x_{k+1}\ is\ L_3\ then\ x_{k+2}=A_{23},\\ &R_7: if\ x_k\ is\ L_3\ and\ x_{k+1}\ is\ L_1\ then\ x_{k+2}=A_{31},\\ &R_8: if\ x_k\ is\ L_3\ and\ x_{k+1}\ is\ L_2\ then\ x_{k+2}=A_{32},\\ &R_9: if\ x_k\ is\ L_3\ and\ x_{k+1}\ is\ L_3\ then\ x_{k+2}=A_{33}. \end{aligned} \qquad (14)$$

Пусть a_1,a_2,a_3 - центры функций принадлежности соответствующих лингвистических переменных L_1,L_2,L_3. Тогда базу правил (14) можно рассмотреть как решетку с координатами a_1,a_2,a_3 по каждой оси. Узлы решетки содержат соответствующие значения $A_{11},A_{12},\ldots,A_{33}$.

Воспользуемся теоремой 2 для данной модели (14). Для этого обобщим теорему для векторного случая $f: x,x\to x$. Тогда верна следующая теорема.

Теорема 5. *База правил (14) с отображением* $f:[a_1,a_3]\times[a_1,a_3]\to[a_1,a_3]$ *хаотична на* $x\in[a_1,a_3]\subset I$ *в смысле Ли-Йорке, если выполняются следующие условия:*

a) $A_{22}=a_3$,

b) $\min(A_{11},A_{12},A_{13})\in[a_1,a_2]$,

c) $\min(A_{31},A_{32},A_{33})\in[a_1,a_2)$.

Доказательство. Согласно теореме 2 необходимо найти соответствующие множества A и B для переходной функции $f:[a_1,a_3]\times[a_1,a_3]\to[a_1,a_3]$. Предположим, что $A=[[\xi,\psi]\times[\theta,\psi]]$ и $B=[[\xi,\psi]\times[\theta,a_2]]\subset A$ (рис.4) с ξ,ψ,θ, которые необходимо определить. Пусть также $\theta<a_2,\psi>\xi>a_2$.

Перепишем общее отображение $f: x_k,x_{k+1}\to x_{k+2}$ в пространстве состояний $X=(x_1,x_2)$, где $x_1=x_k, x_2=x_{k+1}$. Тогда можно записать

$$\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\end{pmatrix}_{k+1}=\begin{pmatrix} x_2\\ f(x_1,x_2)\end{pmatrix}_k. \qquad (15)$$

Очевидно, что в соответствии с (15) получим $X_{k+1}=F(X_k)$, где $F=\begin{pmatrix} x_2\\ f(x_1,x_2)\end{pmatrix}$. Тогда пусть $A=\begin{pmatrix}[\xi,\psi]\\ [\theta,\psi]\end{pmatrix}$ и $F(A)=\begin{pmatrix}[\theta,\psi]\\ [f(\psi,\circ),f(\xi,a_2)]\end{pmatrix}$.

Здесь $f(\xi,a_2)$ представляет собой значение функции F на плоскости $x_1=\xi$, а $f(\psi,\circ)$ означает некоторое значение F на плоскости $x_1=\psi$. Пусть $f(\xi,a_2)=\psi$. Тогда, чтобы обеспечить условия 2 теоремы 2 для векторов $A\subseteq F(A)$, имеем следующее неравенство: $f(\psi,\circ)\le\theta<a_2$.

Поскольку $B=\begin{pmatrix}[\xi,\psi]\\ [\theta,a_2]\end{pmatrix}$, можно определить

$$F(B)=\begin{pmatrix}[\theta,a_2]\\ [f(\psi,\circ),f(\xi,a_2)=\psi]\end{pmatrix}.$$

Очевидно, что $F(B)\cap A=\varnothing$ (условие 5 теоремы 2 для $n_1=1$). Найдем далее $F^2(B)$. Имеем здесь

$$F^2(B)=\begin{pmatrix}[f(\psi,\circ),f(\xi,a_2)=\psi]\\ [f(\theta,\circ),a_3]\end{pmatrix}.$$

Чтобы обеспечить условия 6 теоремы 2, необходимо потребовать, чтобы $f(\theta,\circ)\le\theta\le a_2$. Тогда выражения

$$f(\theta,\circ)\le\theta\le a_2,\ f(\xi,a_2)=\psi,\ f(\psi,\circ)<a_2$$

определяют условия (1) - (3) теоремы 5. Остальные условия теоремы 2 очевидны.

Для модели третьего порядка имеем следующую базу правил:

$$\begin{aligned}&R_1: if\ x_k\ is\ L_1\ and\ x_{k+1}\ is\ L_1\ and\ x_{k+2}\ is\ L_1\\ &then\ x_{k+3}=A_{11},\\ &R_2: if\ x_k\ is\ L_1\ and\ x_{k+1}\ is\ L_1\ and\ x_{k+2}\ is\ L_2\\ &then\ x_{k+3}=A_{12},\\ &\ldots\\ &R_{27}: if\ x_k\ is\ L_3\ and\ x_{k+1}\ is\ L_3\ and\ x_{k+2}\ is\ L_3\\ &then\ x_{k+3}=A_{33}.\end{aligned}\tag{16}$$

Таким образом, рассматривается отображение $f: x_k, x_{k+1}, x_{k+2}\to x_{k+3}$.

Прежде всего, представим это отображение в пространстве состояний $X_{k+1}=F(X_k)$, где $X=(x_1,x_2,x_3)$. Тогда имеем

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}_{k+1}=\begin{pmatrix}x_2\\x_3\\f(x_1,x_2,x_3)\end{pmatrix}_k.\tag{17}$$

В соответствии с предложенным подходом верна следующая теорема.

Теорема 6. *База правил (16) с отображением* $f:[a_1,a_3]\times[a_1,a_3]\times[a_1,a_3]\to[a_1,a_3]$ *хаотична на интервале* $x\in[a_1,a_3]\subset I$ *в смысле Ли-Йорке, если удовлетворяются следующие условия:*

a) $A_{222}=a_3$,

b) $\min(A_{111},A_{112},\ldots,A_{133})\in[a_1,a_2]$,

c) $\min(A_{311},A_{312},\ldots,A_{333})\in[a_1,a_2)$.

Доказательство. В соответствии с теоремой 2 необходимо определить множества A и B для переходной функции

$f:[a_1,a_3]\times[a_1,a_3]\times[a_1,a_3]\to[a_1,a_3]$. Пусть $A=[[\xi,\psi]\times[\theta,\psi]\times[\theta,\psi]]$ и $B=[[\xi,\psi]\times[\theta,a_2]\times[\xi,\psi]]\subset A$ с ξ,ψ,θ, которые необходимо определить. Пусть также $\theta<a_2, \psi>\xi>a_2$.

В соответствии с (17) можно записать

$$F=\begin{pmatrix}x_2\\x_3\\f(x_1,x_2,x_3)\end{pmatrix}.$$

Пусть $A=\begin{pmatrix}[\xi,\psi]\\ [\theta,\psi]\\ [\theta,\psi]\end{pmatrix}$.

Тогда $F(A)=\begin{pmatrix}[\theta,\psi]\\ [\theta,\psi]\\ [f(\psi,\circ,\circ),\psi]\end{pmatrix}$.

Чтобы обеспечить условие 2 теоремы 2 в векторном случае $A\subseteq F(A)$, необходимо выполнить неравенство $f(\psi,\circ,\circ)\le\theta<a_2$.

Поскольку $B=\begin{pmatrix}[\xi,\psi]\\ [\theta,a_2]\\ [\xi,\psi]\end{pmatrix}$, можно определить

$$F(B)=\begin{pmatrix}[\theta,a_2]\\ [\xi,\psi]\\ [f(\psi,\circ,\circ),\psi]\end{pmatrix}.$$

Очевидно, что $F(B)\cap A=\varnothing$ (условие 5 теоремы 2 для $n_1=1$). Найдем далее $F^2(B)$. Имеем

$$F^2(B)=\begin{pmatrix}[\xi,\psi]\\ [f(\psi,\circ,\circ),\psi]\\ [f(\theta,\circ,\circ),a_3]\end{pmatrix}.$$

Чтобы обеспечить условие 6 теоремы 2, необходимо потребовать, чтобы выполнялось условие $f(\theta,\circ,\circ)\le\theta\le a_2$. Тогда выражения

$$f(\theta,\circ)\le\theta\le a_2,\ f(\xi,a_2,a_2)=\psi,$$
$$f(\psi,\circ,\circ)\le\theta<a_2$$

определяют условия (1) - (3) теоремы 6.

Остальные условия теоремы 2 очевидны.

Таким образом, мы можем обобщить результаты в виде следующей теоремы.

Теорема 7. *База правил (10) с отображением* $f:[a_1,a_3]\times[a_1,a_3]\times\ldots\times[a_1,a_3]\to[a_1,a_3]$ *хаотична на* $x\in[a_1,a_3]\subset I$ *в смысле Ли–Йорке, если удовлетворяются следующие условия:*

a) $A_{22\ldots2}=a_3$,

b) $\min(A_{11\ldots1},A_{11\ldots2},\ldots,A_{13\ldots3})\in[a_1,a_2]$,

c) $\min(A_{311\ldots1},A_{31\ldots2},\ldots,A_{33\ldots3})\in[a_1,a_2)$.

Замечание. Ограничение $A_{22\ldots2}=a_3$ может быть ослаблено в соответствии с замечанием 2.

4. Исследование хаотической динамики нечетких рекуррентных моделей Такаги-Сугено первого порядка

Модель Такаги-Сугено первого порядка имеет вид

$$\begin{aligned}&R_1\text{: If } x_k=L_1 \text{ then } x_{k+1}=A_1\cdot x_k+B_1,\\&R_2\text{: If } x_k=L_2 \text{ then } x_{k+1}=A_2\cdot x_k+B_2,\\&\quad\ldots..\\&R_N\text{: If } x_k=L_N \text{ then } x_{k+1}=A_N\cdot x_k+B_N,\end{aligned}\tag{18}$$

где L_i - лингвистические переменные, а A_i, B_i - числовые коэффициенты. Функции принадлежности и их центры определены, как и в предыдущих случаях.

Прежде всего, необходимо определить минимальное количество правил для продуцирования хаотических последовательностей.

Лемма 2. *Минимальное количество правил в модели Такаги-Сугено первого порядка для продуцирования хаоса равно двум.*

Доказательство. Если мы имеем одно правило, то переходная функция $f:x_k\to x_{k+1}$ модели (18) в соответствии с условиями нормализации имеет вид $f(x)=\mu_1(x)\cdot(A_1\cdot x+B_1)$ для $\forall x\in X$.

Кроме того, $\mu_1(x)=1$ для $\forall x\in I$. Тогда $f(x)=A_1\cdot x+B_1$ для $\forall x\in I$. Следовательно, $f(x)$ - монотонная функция . В случае двух правил имеем

для $x\in[0,a_1]$: $f(x)=A_1\cdot x+B_1$;

для $x\in[a_2,1]$: $f(x)=A_2\cdot x+B_2$;

для $x\in[a_1,a_2]$:

$$f(x)=\frac{a_2-x}{a_2-a_1}\cdot(A_1\cdot x+B_1)+\frac{x-a_1}{a_2-a_1}\cdot(A_2\cdot x+B_2).$$

Следовательно, $f(x)$ а – парабола и для $A_1=4,A_2=0,B_1=0,B_2=0,a_1=0,a_2=1$ представляет собой логистическое отображение с хаотическими свойствами [2].

Теперь выведем общие условия для коэффициентов A_i,B_i, чтобы обеспечить хаотичность *f*. Для *N = 2* база правил имеет вид

$$\begin{aligned}&R_1\text{: If } x_k=L_1 \text{ then } x_{k+1}=A_1\cdot x_k+B_1,\\&R_2\text{: If } x_k=L_2 \text{ then } x_{k+1}=A_2\cdot x_k+B_2.\end{aligned}\tag{19}$$

На рис. 2, 3 показан случай для $a_1=0.25,a_2=0.75$,

$A_1=2,B_1=0,A_2=-2,B_2=2$.

Как и в случае с моделью нулевого порядка, можно сформулировать теорему для модели Такаги-Сугено первого порядка.

Теорема 8. *База правил (19) хаотична в смысле Ли –Йорке на интервале* $[a_1,a_2]\subseteq I$, *если коэффициенты* A_1,A_2,B_1,B_2 *являются решением следующих уравнений:*

$$\begin{cases} A_1 \cdot a_1 + B_1 = \phi, \\ A_2 \cdot a_2 + B_2 = \phi, \\ A_1 \cdot (a_1 + a_2) + A_2 \cdot (a_1 + a_2) + \\ 2B_1 + 2B_2 = 4a_2 \end{cases} \qquad (20)$$

с произвольным $\phi \in \left[a_1, \dfrac{a_1 + a_2}{2} \right)$.

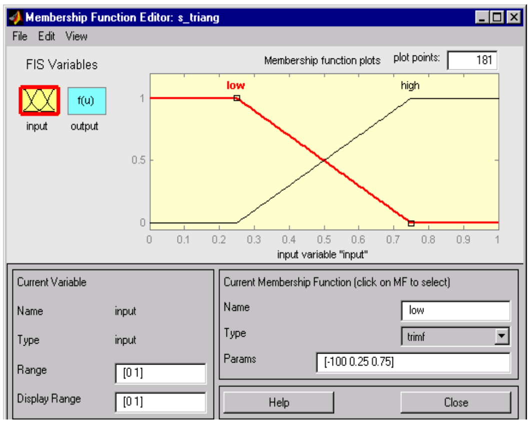

Рис.2. Функции принадлежности

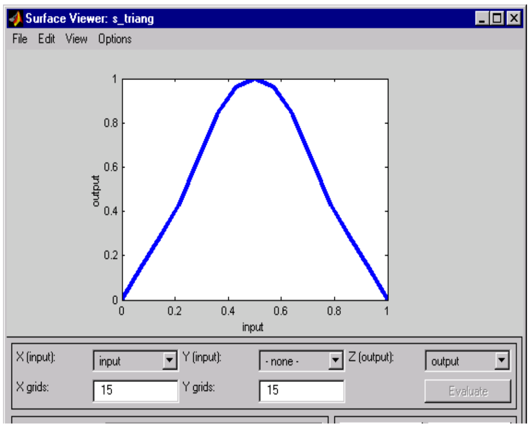

Рис.3. Переходная функция

Доказательство. В соответствии с теоремой 2 достаточно найти соответствующие компактные множества A и B в $[a_1, a_2]$ для переходной функции $f : [a_1, a_2] \to [a_1, a_2]$. Пусть $A = [\xi, \psi] \subset \left(\dfrac{a_1 + a_2}{2}, a_2 \right]$, $B = [\theta, \psi] \subset A$ с ξ, θ, ψ, которые необходимо определить. Заметим, что $\xi > \dfrac{a_1 + a_2}{2}$, $\psi < a_2$, $\xi < \theta$, левая ветвь параболы - $f_1(x)$, правая ветвь - $f_2(x)$.

Тогда $f(A) = [f_2(\psi), f_2(\xi)]$. Пусть $f_2(\xi) = \psi$, откуда $f_2(\psi) \le \dfrac{a_1 + a_2}{2}$, чтобы удовлетворить $A \subseteq f(A)$.

Найдем $f(B)$. Имеем $f(B) = [f_2(\psi), f_2(\theta)]$. Чтобы удовлетворить условию $f(B) \cap A = \varnothing$, допустим, что $f_2(\theta) = \dfrac{a_1 + a_2}{2}$. Поскольку имеем $\psi > \theta$, то, $f_2(\psi) < \dfrac{a_1 + a_2}{2}$. Вот почему условие $\phi \in \left[a_1, \dfrac{a_1 + a_2}{2} \right)$ необходимо. Заметим, что условие (20) обеспечивает также свойства:

$$f(a_1) = \phi, \quad f(a_2) = \phi, \quad f\left(\frac{a_1 + a_2}{2} \right) = a_2.$$

В соответствии с допущениями, приведенными выше, можно записать $f^2(B) = [f_1(f_2(\psi)), a_2]$. Тогда, если $f_1(f_2(\psi)) = \dfrac{a_1 + a_2}{2}$, условие $A \subseteq f^2(B)$ удовлетворяется. Кроме того, должно выполняться условие

$$\exists x \in \left[a_1, \frac{a_1 + a_2}{2} \right], если\ f_1(x) = \frac{a_1 + a_2}{2}.$$

В результате можно записать

$$\theta = f_2^{-1}\left(\frac{a_1 + a_2}{2} \right), \ \psi = f_2^{-1}\left(f_1^{-1}\left(\frac{a_1 + a_2}{2} \right) \right), \quad .$$

$$\xi = f_2^{-1}(\psi).$$

Очевидно, что в этом случае условие $\xi < \theta$ выполняется. Тогда можно его записать, как $f_2(\xi) > f_2(\theta)$ и, наконец, имеем $\psi > \dfrac{a_1 + a_2}{2}$.

Далее нужно доказать, что f является расширяющим отображением на А. Это означает, что $|f'(x)| > 1,\ for\ x \in [\xi, \psi]$.

Очевидно, достаточно показать расширяемость отображения только для точки $x = \xi$.

Найдем значение $x^* \in \left[\frac{a_1 + a_2}{2}, a_2\right]$, такое, что $\left|f'(x^*)\right| = 1$. В соответствии с условиями (20) можно записать производную переходной функции после очевидных подстановок как

$$f'(x) = \frac{4(\phi - a_2)}{(a_2 - a_1)^2}\left(2x - (a_1 + a_2)\right),$$

для которой получим

$$x^* = \frac{1}{2}\left(a_1 + a_2 - \frac{(a_1 - a_2)^2}{4(\phi - a_2)}\right).$$

Если $\xi > x^*$, то наше допущение относительно расширяемости функции f на A верно. Тогда в соответствии с переходной функцией последнее неравенство можно переписать как

$$f(f(f(\xi))) < f(f(f(x^*))).$$

Поскольку $f(f(f(\xi))) = \frac{a_1 + a_2}{2}$, нетрудно доказать, что $f(f(f(x^*))) > \frac{a_1 + a_2}{2}$. Наконец, доказательство инъекции на *B* тривиально.

Заключение

Предложенные в статье подходы к исследованию динамических систем позволяют применять унифицированное описание процессов различной природы в виде продукционного набора правил.

Кроме того, они дают возможность определять свойства динамических рекуррентных нечетких моделей Такаги-Сугено нулевого порядка, обладающих хаотической динамикой в смысле Ли-Йорке, на основании значений коэффициентов в консеквентах правил, а не на традиционном подходе, базирующемся на исследовании переходных функций либо временных рядов. Дальнейшие исследования будут направлены на развитие методов идентификации хаотической динамики с произвольным количеством правил модели ТС нулевого порядка, а также для моделей ТС первого порядка. Предполагается также исследование в направлении векторных нечетких моделей, характерных для описания динамических систем с высокой размерностью пространства состояний, и решение задачи анализа временных рядов с помощью продукционных моделей Такаги-Сугено.

Литература

1. Li T.Y., Yorke J.A. Period three implies chaos. // Amer. Math. Monthly 82 (1975). – P. 985-992.
2. Kloeden P.E. Chaotic iterations of fuzzy sets. // Fuzzy Sets and Systems 42 (1991) 37-42.
3. Kempf R., Adamy J. Regularity and chaos in recurrent fuzzy systems. // Fuzzy Sets and Systems (in press). (2003).
4. Kieninger B., Analyse dreier Chaosdefinitionen für stetige Abbildungen auf metrischen Räumen (Analysis of three definitions of chaos for continuous mappings in metric spaces). Diploma Thesis, University of Augsburg (1998).
5. Sokolov A., Wagenknecht M., Investigation of Chaotic Behavior of Fuzzy Takagi-Sugeno Models with Regard to Simulation and Control of Technological Processes. // Scientific Report. Univ. of Zittau/Goerlitz, IPM (2003).
6. Нечёткие множества в моделях управления и искусственного интеллекта. Аверкин А. Н., Батыршин И. З., Блишун А. Ф. и др. / Под ред. Д. А. Поспелова - М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1986. - 312 с.
7. Кофман А. Введение в теорию нечетких множеств. – М.:Радио и связь. 1982.- 432 с.
8. Поспелов Д. А. Ситуационное управление. Теория и практика. – М.: Наука, 1986. - 288 с.

Поступила в редакцию 21.02.2007

Рецензент: лауреат Государственной премии Украины, д-р техн. наук, проф. Н.Д. Кошевой, Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского «ХАИ», Харьков.