

УДК 681.396

А.Н. ГОРА, В.И. КОРТУНОВ

*Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского «ХАИ», Украина***ЧАСТОТНЫЙ АНАЛИЗ НЕЛИНЕЙНЫХ ФИЛЬТРОВ**

Проведен частотный анализ линейно-усредняющего фильтра и часто применяемых нелинейных фильтров – медианного фильтра, фильтра, ограничивающего по производной, и одного из фильтров на основе статистических характеристик второго порядка – α -урезанного фильтра. При анализе линейно-усредняющего, медианного фильтра, фильтра, ограничивающего по производной, и α -урезанного фильтра получены и проиллюстрированы оценки амплитудно-частотных и фазо-частотных характеристик. Определены частотные характеристики (полоса пропускания и максимально вносимые искажения) нелинейных фильтров от их параметров.

Ключевые слова: частотный анализ, нелинейные фильтры, амплитудно-частотные характеристики, фазо-частотные характеристики.

Введение

При обработке информации в различных системах связи, в том числе и в глобальной системе передачи полетных данных [1], наиболее ответственной операцией является операция фильтрации. Фильтрация – это наиболее распространенное средство обработки сигналов. Фильтры можно разделить на две категории – линейные (ЛФ) и нелинейные (НФ). Линейными считаются фильтры, для которых имеет место суперпозиция и однородность [2]. Все фильтры, для которых не выполняется условие суперпозиции, относятся к классу нелинейных фильтров [3]. Линейная фильтрация является одной из операций цифровой обработки сигналов, имеющих первостепенное значение в обработке сигналов. К основным операциям обработки сигнала относят операции сглаживания, фильтрации, прогнозирования, кроме того, линейные фильтры используются для дифференцирования, интегрирования и подавления шумов [3].

Главное отличие и преимущество нелинейных фильтров состоит в том, что существует большое количество практических ситуаций, когда их применение по тем или иным причинам является более целесообразным, чем использование линейных фильтров [4].

Нелинейная фильтрация используется в различных областях, таких как системы связи, системы управления, кардиография, где сигналы могут содержать резкие «перепады» или «скачки»; обработка видеоизображений, где сигналы могут быть искажены негауссовыми помехами. В целом, применение нелинейных фильтров целесообразно при ог-

раниченных сведениях о свойствах сигналов и нестационарности помех [5]. Для получения эффективных результатов фильтрации необходимо знать свойства фильтров и границы их применения. Для линейных фильтров проблема их анализа не является актуальной, одним вариантом стандартной методики получения АФЧХ с помощью применения Фурье – анализа, который обладает так же линейностью, как и исследуемый фильтр.

Задача частотного анализа НФ нетривиальна, поскольку для них не выполняется принцип суперпозиции. Задачу анализа таких фильтров рассматривали с момента их использования [6 – 8]. Известно несколько подходов анализа НФ:

1. Анализ на основе тестовых сигналов; отличается простотой проведения, но не дает полной (обобщенной) характеристики [6].

2. Анализ с применением аппроксимации; анализ основан на допущениях, что ограничивает его применимость, а результат не отображает полных свойств фильтров [7].

3. Анализ на основе статистических оценок; позволяет получить интегральные количественные показатели эффективности фильтрации и лишь в какой то мере устанавливает свойства фильтров [8].

Приведенные методы не способны полностью и строго охарактеризовать свойства НФ. Поэтому, ставится задача проведения более полного частотного анализа часто применяемых нелинейных фильтров: медианного фильтра (МФ), фильтра, ограничивающего по производной (ФОП), α – урезанного фильтра (АУФ). Такой анализ позволит установить количественные изменения частотных характеристик сигналов от параметров фильтра.

**1. Частотный анализ
линейно-усредняющего фильтра
(влияние скользящего окна на
частотные характеристики фильтров)**

Большинство методов нелинейной фильтрации предусматривают обработку данных в «окне» аналогично принципу действия линейных фильтров с конечной импульсной характеристикой. Фильтрация в скользящем «окне» подразумевает, что некоторому i -му отсчету, обычно центральному отсчету скользящего «окна», присваивается выходное значение в результате применения некоторого метода обработки данных.

Наиболее простым примером такой обработки может быть линейно-усредняющий фильтр (ЛУФ), для которого выход запишется в виде

$$x_{out}(i) = \sum_{j=i-(N-1)/2}^{i+(N-1)/2} \frac{x(j)}{N}, \quad (1)$$

где i – номер отсчета;

N – размер скользящего «окна»;

$x(j)$ – отсчет входного сигнала, принадлежащий текущему положению скользящего «окна».

Согласно выражению (1) при формировании выходного значения $x_{out}(i)$ учитываются значения исходного процесса для отсчетов с индексами от $i - (N-1)/2$ до $i + (N-1)/2$. Выход ЛУФ для непрерывного сигнала можно записать следующим образом

$$x_{out}(t) = \frac{1}{t_n} \int_{t-t_n}^t x(\tau)\Omega(t-\tau, t_n)d\tau, \quad (2)$$

где $x(\tau)$ – входной сигнал;

$\Omega(t_n, t)$ – функция «окна»;

$[t - t_n; t]$ – текущий интервал функции «окна».

Соотношение (2) представляет запись свертки функции входного сигнала $x(t)$ и «окна» $\Omega(t_n, t)$. В соответствии со свойствами свертки «окно» является импульсной функцией, и тогда передаточная функция фильтра является преобразованием Фурье от импульсной функции

$$K(j\omega) = F\{\Omega(t_n, t)\},$$

где $F\{\dots\}$ – обозначаем преобразование Фурье [3].

Передаточную функцию ЛУФа запишем в виде

$$K(j\omega) = t_n \sin c\left(\frac{\omega t_n}{2}\right) e^{-\frac{j\omega t_n}{2}}.$$

Запишем ЛУФ в дискретном виде, для этого представим квантованный сигнал в виде (для простоты анализа положим время дискретизации равное $\Delta t = 1$ сек.)

$$x^*(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT_s)\delta(t - kT_s),$$

где $\sum \delta(t - kT_s)$ – последовательность δ -импульсов с периодом следования T_s ;

$x(t)$ – входной непрерывный сигнал.

Тогда выходной сигнал фильтра можно записать в виде

$$x_{out}^*(t) = \frac{1}{t_n} \int_{t-t_n/2}^{t+t_n/2} x^*(\tau)\Omega(t-\tau)d\tau,$$

где $t_n = T_s N$.

Переходя к дискретному представлению, запишем выход фильтра в виде

$$x_{out}^*(k) = \frac{1}{N} \sum_{i=k-N}^k x^*(i), \quad (3)$$

что соответствует усреднению на «окне». В свою очередь (3) можно представить суммой, как выражение для фильтров с конечной импульсной характеристикой [2]:

$$x_{out}^*(k) = a_0 x^*(k) + a_1 x^*(k-1) + \dots + a_N x^*(k-N), \quad (4)$$

где $a_0 = a_1 = \dots = a_N = \frac{1}{N}$.

Применяя дискретное z -преобразование к (4), переходим в z -область. Выход фильтра в z -области представим в виде

$$X_{out}^*(z) = a_0 X^*(z) + a_1 X^*(z)z^{-1} + \dots + a_N X^*(z)z^{-N}.$$

Дискретная передаточная функция ЛУФа равна

$$K(z) = \frac{X_{out}^*(z)}{X^*(z)} = a_0 + a_1 z^{-1} + \dots + a_N z^{-N}.$$

АЧХ и ФЧХ для дискретного (график приведен для $N=5$) и непрерывного вида ЛУФ представлены на рис. 1 и 2.

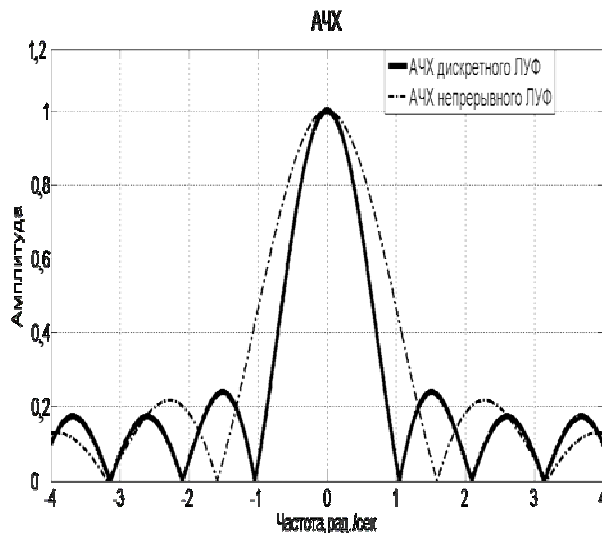


Рис. 1. Амплитудно-частотная характеристика линейно-усредняющего фильтра

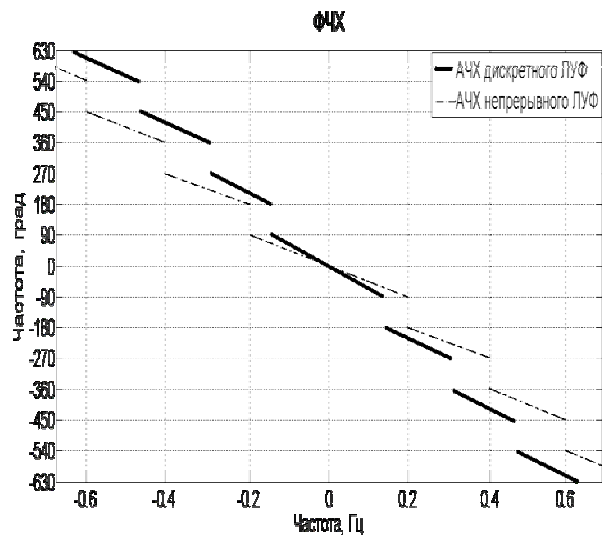


Рис. 2. Фаза-частотная характеристика линейно-усредняющего фильтра

По виду АЧХ можно сказать, что ЛУФ – это ФНЧ, ширина полосы пропускания которого обратно пропорциональна размеру «окна». Фильтром вносится задержка сигнала, равная половине размера «окна». В области малых частот происходит совпадение характеристик непрерывного и дискретного фильтров. Частоту, в пределах которой фильтр вносит искажения по амплитуде, можно вычислить, решив уравнение

$$\sin c\left(\frac{\omega t_n}{2}\right) = \frac{100 - y(\%) }{100\%},$$

где $y(\%)$ – процент вносимых искажений фильтром по амплитуде.

Например, для $t_n = 5$ сек и $x = 4\%$, частота равна $\omega = 0,18$ рад/сек.

Полосу пропускания фильтра можно получить, решив уравнение $\sin c\left(\frac{\omega t_n}{2}\right) = 0,707$, и тогда $\omega t_n = 1,4$ рад.

Следовательно, существует возможность выбора параметров ЛУФа, исходя из требуемых параметров фильтрации полосы пропускания и максимально возможных вносимых искажений.

2. Частотный анализ медианного фильтра

Одним из простейших примеров нелинейной обработки данных в скользящем «окне» является расчет медианы, лежащий в основе принципа работы стандартного медианного фильтра, выход которого определяется выражением

$$x_{\text{med}}(i) = \text{med}\{x(j), j = i - (N-1)/2, \dots, i + (N-1)/2\},$$

где $x(j)$ – входной сигнал;

N – размер скользящего «окна»;

$\text{med}\{\dots\}$ – операция вычисления медианы.

В большинстве случаев выходное значение фильтра обычно присваивается центральному отсчету скользящего «окна» (в противном случае для получения $x_{\text{med}}(i)$ учитываются отсчеты с индексами от $i - N_1$ до $i + N_2$, где $N_1 \neq N_2$ и $N = N_1 + N_2 + 1$). Размеры скользящих «окон», характеризуемые количеством входящих отсчетов N , обычно являются нечетными. Рассмотрим медианный фильтр, выходной сигнал которого можно представить в виде

$$x_{\text{out}}(t) = x(t - \tau_{\text{med}}),$$

где τ_{med} – параметр, характеризующий положение отсчета, соответствующие медиане выборки для данного скользящего «окна», относительно левого края (пример: выборка скользящего окна – 4, 5, 8, 2, 7; $\text{med} = 5$, $\tau_{\text{med}} = 3\Delta t$). Поскольку для МФ выходное значение может быть любое из его входных значений в пределах скользящего «окна», то будем считать, что τ_{med} – случайная величина. В случае если сигнал постоянный, то τ_{med} – случайная величина с равномерным законом распределения. АЧХ и ФЧХ МФ равны

$$K(\omega) = 1,$$

$$\theta(\omega) = -\omega \tau_{\text{med}}.$$

Вследствие того, что τ_{med} – случайная величина, необходимо оценить возможные диапазоны из-

менения частотных характеристик, для чего рассчитаем математическое ожидание АЧХ и ФЧХ

$$M[K(\omega)] = 1,$$

$$M[\theta(\omega)] = -\omega \frac{t_n}{2}.$$

Оценим дисперсию спектральных характеристик фильтра

$$\sigma_{K\{j\omega\}}^2 = 0,$$

$$\sigma_{\theta\{j\omega\}}^2 = \frac{\omega^2 t_n^2}{12}. \quad (4)$$

На рис. 3 представлена ФЧХ МФ с нанесенными на них границами возможно вносимых искажений.

Частоту, в пределах которой фильтр вносит искажения по фазе, можно вычислить, решив уравнение

$$-\frac{\omega t_n}{2} \pm 3 \frac{\omega^2 t_n^2}{12} = \frac{100 - y(\%)}{100\%},$$

где $y(\%)$ – процент вносимых искажений фильтром по фазе.

В общем случае максимальная задержка, вносимая МФ, будет равна

$$\theta(\omega) = -\omega(t_n - 1).$$

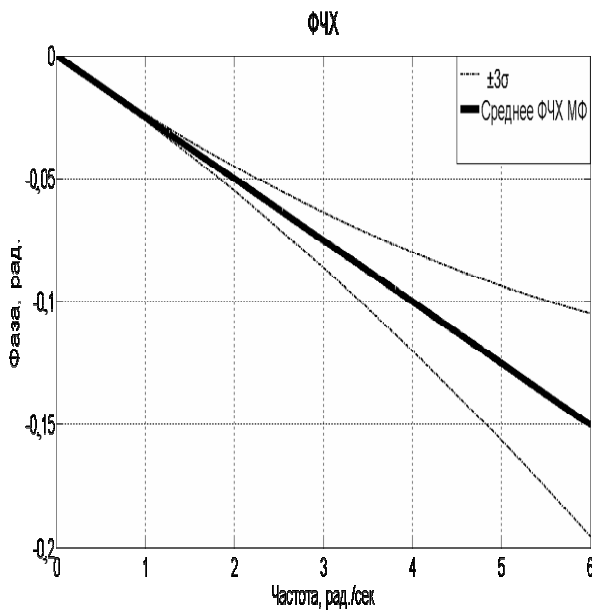


Рис. 3. Фазо-частотная характеристика медианного фильтра

МФ в среднем не вносит искажений по амплитуде, а вносимые искажения по фазе не более $-\omega(t_n - 1)$. Из (4) видно, что для уменьшения вносимых амплитудных искажений необходимо уменьшать σ , для чего надо уменьшать размер скользящего «окна».

Следовательно, существует возможность выбора параметров МФ, исходя из требуемых параметров фильтрации - полосы пропускания, максимально возможных вносимых искажений (рис. 3).

3. Частотный анализ фильтра, ограничивающего по производной

Рассмотрим следующий метод фильтрации, связанный с ограничением производной сигнала. Производную выходного сигнала фильтра, ограничивающего по производной, можно представить в виде

$$\dot{x}_{out}(t) = \begin{cases} \dot{x}(t), & |\dot{x}(t)| < \dot{x}_{пред}; \\ \dot{x}_{max}, & |\dot{x}(t)| > \dot{x}_{пред}, \end{cases}$$

где $x(t)$ – входной сигнал.

Произведя операцию интегрирования, выходной сигнал ФОПа получаем в виде

$$x_{out}(t) = \begin{cases} x(t), & |\dot{x}(t)| < \dot{x}_{пред}; \\ t\dot{x}_{max}, & |\dot{x}(t)| > \dot{x}_{пред}. \end{cases}$$

Применяя преобразование Фурье $x_{out}(t)$, получим комплексный коэффициент передачи фильтра в виде

$$K(j\omega) = \begin{cases} 1, & \omega < \omega_{пред}; \\ \frac{\dot{x}_{max}}{j\omega}, & \omega > \omega_{пред}, \end{cases}$$

где $\omega_{пред}$ определяет максимальное значение $\dot{x}_{пред}$.

АЧХ и ФЧХ ФОП представлены на рис. 4, 5.

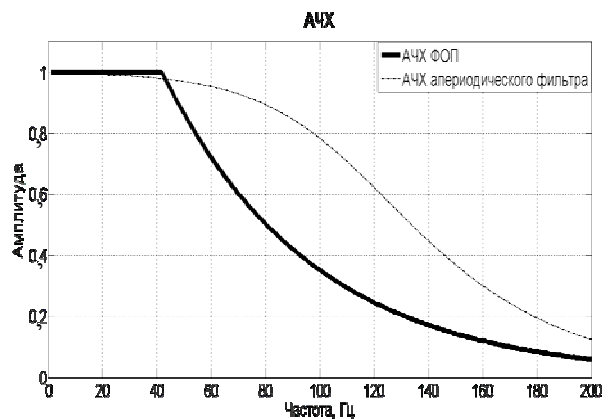


Рис. 4. Амплитудно-частотная характеристика ФОП

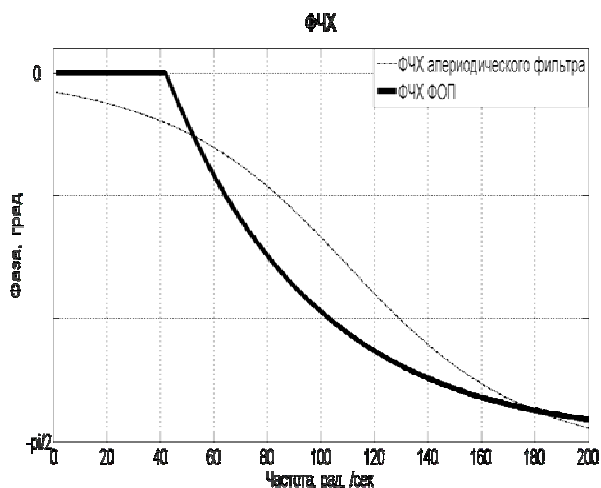


Рис. 5. Фазо-частотная характеристика ФАПЧ

ФАПЧ представляет собой ФНЧ, у которого частота среза зависит от скорости изменения фильтруемого сигнала. ФАПЧ в пределах $(0; \omega_{\text{пред}})$ не вносит амплитудных и фазовых искажений, что является основным преимуществом.

4. Частотный анализ α -урезанного фильтра

Рассмотрим анализ НФ на основе α -урезанного среднего, который также часто называют просто α -урезанным фильтром (АУФ):

$$x_{\alpha}(i) = \frac{1}{N - N_{\alpha 1} - N_{\alpha 2}} \sum_{j=N-N_{\alpha 1 \alpha 2}}^{N-N_{\alpha 2}} x^{(j)}(i),$$

где $N_{\alpha 1}$ и $N_{\alpha 2}$ – количество отбрасываемых в отсортированной выборке минимальных и максимальных значений соответственно.

Обычно на практике используют равные значения $N_{\alpha 1}$ и $N_{\alpha 2}$ или соотношения

$$\alpha_1 = N_{\alpha 1}/N = \alpha_2 = N_{\alpha 2}/N.$$

АУФ можно рассмотреть как МФ, с учетом того факта, что изменяются параметры закона распределения времени задержки. АЧХ и ФЧХ фильтра равны

$$K(\omega) = \sin c\left(\frac{\omega(t_n - t_{n\alpha 1} - t_{n\alpha 2})}{2}\right) e^{-\frac{j\omega(t_n - t_{n\alpha 1} - t_{n\alpha 2})}{2}},$$

$$\theta(\omega) = -\omega\tau_{\text{мед}}^*.$$

Оценим возможные диапазоны изменения частотных характеристик, для чего рассчитаем математическое ожидание ФЧХ

$$M[\theta(\omega)] = -\omega \frac{t_n - t_{n1} - t_{n2}}{2}.$$

Оценим дисперсию спектральной характеристики фильтра

$$\sigma_{\theta\{j\omega\}}^2 = \frac{\omega^2(t_n - t_{n1} - t_{n2})^2}{12}.$$

Максимальная задержка, вносимая АУФ, равна

$$\theta(\omega) = -\omega(t_n - 2)$$

Для уменьшения вносимых амплитудных искажений необходимо уменьшать σ , для чего надо уменьшать размер скользящего «окна».

Следовательно, существует возможность выбора параметров МФ, исходя из требуемых параметров фильтрации – полосы пропускания, максимально возможных вносимых искажений.

Заключение

В результате частотного анализа получены оценки амплитудно-частотных и фазо-частотных характеристик для часто применяемых нелинейных фильтров. Для медианного, альфа-урезанного фильтров и фильтра, ограничивающего по производной, получены зависимость ширины полосы пропускания от частоты дискретизации и размера скользящего «окна».

Проанализировано влияние скользящего «окна» на частотные характеристики на примере ЛУФа. Ширина полосы пропускания ЛУФа обратно пропорциональна размеру «окна». ЛУФом вносится задержка сигнала, равная половине окна.

Показано, что в МФ для уменьшения вносимых искажений необходимо уменьшать σ , для чего необходимо уменьшать размер скользящего «окна».

Проиллюстрировано, что ФАПЧ представляет собой ФНЧ, у которого частота среза зависит от скорости изменения фильтруемого сигнала.

Литература

1. Авдеев Г. «Град-1350» – Радиоканал передачи видеозображения и данных с борта ЛА / Г. Авдеев. – М.: Радио и связь, 2004. – 320 с.

2. Антонью А. Цифровые фильтры: анализ и проектирование / А. Антонью. – М.: Радио и связь, 1985. – 320 с.
3. Гутников В.С. Фильтрация измерительных сигналов / В.С. Гутников. – Л.: Энергоатомиздат, 1990. – 192 с.
4. Цифровая обработка сигналов: справочник / Л.М. Гольденберг и др. – М.: Радио и связь, 1985. – 312 с.
5. Абрамов С.К. Нелинейная фильтрация сигналов: учеб. пособие / С.К. Абрамов, В.И. Кортунюв, В.В. Лукин. – Х.: Нац. аэрокосм. ун-т «Харьк. авиац. ин-т», 2007. – 78 с.
6. Хемминг Р.В. Цифровые фильтры: пер. с англ. / Р.В. Хемминг. – М.: Сов. радио, 1980. – 222 с.
7. Хуанг Т.С. Быстрые алгоритмы в цифровой обработке изображения: Преобразование и медианные фильтры: пер. с англ. / Т.С. Хуанг. – М.: Радио и связь, 1984. – 220 с.
8. Palmieri F. Frequency analysis and synthesis of a class of nonlinear filters / F. Palmieri, C.G. Boncelet // IEEE Transactions on acoustics, speech and signal processing. – VOL. 38, NO. 8; august 1990. – 41 с.

Поступила в редакцию 12.06.2008

Рецензент: д-р техн. наук, проф., проф. кафедры В.В. Лукин, Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского «ХАИ», Харьков, Украина.

ЧАСТОТНИЙ АНАЛІЗ НЕЛІНІЙНИХ ФІЛЬТРІВ

О.М. Гора, В.І. Кортунюв

Проведений частотний аналіз лінійно-усереднюючого фільтру та часто вживаних нелінійних фільтрів – медіанного фільтра, фільтра, що обмежує по похідній та фільтру на основі статистичних характеристик другого порядку (альфа-урізанного фільтра). На основі аналізу отримані і проілюстровані оцінки амплітудно-частотних і фазо-частотних характеристик для часто вживаних нелінійних фільтрів. Визначені частотні залежності параметрів фільтрів від необхідних параметрів фільтрації – смуги пропускання і максимально можливих спотворень, що вносяться.

Ключові слова: частотний аналіз, нелінійні фільтри, амплітудно-частотні характеристики, фазо-частотні характеристики.

FREQUENCY ANALYSIS OF NONLINEAR FILTERS

A.N. Gora, V.I. Kortunov

The frequency analysis of linear usrednyayuschiy filter and often applied nonlinear filters - median filter, limiting to on to derivative and filter on the basis of statistical descriptions of the second order (alpha - cutoff filter filters is conducted). On the basis of analysis got and illustrated estimations of amplitude- frequency and phase-frequency descriptions for the often applied nonlinear filters. Frequency dependences of parameters of filters are shown out on the required parameters of filtration - bar of admission and maximally possible brought in distortions.

Keywords: frequency analysis, nonlinear filters, amplitude- frequency descriptions, phase-frequency descriptions.

Гора Александр Николаевич – аспирант кафедри приёма, передачі і обробки сигналів Національного аэрокосмического университета им. Н.Е. Жуковского «ХАИ», Харьков, Украина.

Кортунюв Вячеслав Иванович – доктор техн. наук, профессор кафедри приёма, передачі і обробки сигналів Національного аэрокосмического университета им. Н.Е. Жуковского «ХАИ», Харьков, Украина.