УДК 621.391.26

В.К. ВОЛОСЮК

Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского «ХАИ», Украина

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АППАРАТ СПЕКТРАЛЬНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ШИРОКОПОЛОСНЫХ И СВЕРХШИРОКОПОЛОСНЫХ ПРОСТРАНСТВЕННО-ВРЕМЕННЫХ СИГНАЛОВ И ИХ ФУНКЦИЙ КОГЕРЕНТНОСТИ

Рассмотрены спектральные преобразования пространственно-временных сигналов и их модификации, являющиеся обобщением преобразований Фурье, Френеля и Лапласа для случаев анализа и обработки волновых полей. Преобразования отличаются тем, что в них снято ограничение пространственно-временной узкополосности. Обобщена теорема Ван-Циттерта-Цернике, устанавливающая связь между функцией когерентности поля в области раскрыва антенной системы и спектральной яркостью протяженного источника излучения. Преобразования могут быть полезны при исследовании динамических пространственно-распределенных систем, в частности пространственно-распределенных многомерных систем управления и переходных процессов в них, а также широко- и сверхширополосных систем радиоастрономии и дистанционной радиоспектрометрии.

Ключевые слова: *обобщение, спектральные преобразования, ограничение пространственно-временной узкополосности, волновые поля, пространственно-временные сигналы, функция когерентности, теорема Ван Циттерта-Цернике.*

Введение

При решении задач математической физики в дистанционной радиоспектрометрии [1], радиоастрономии [2, 3] и других возникает проблема применимости теоремы Ван Циттерта-Цернике, связывающей взаимную корреляционную функцию комплексно-сопряженных пространственно-временных случайных процессов (функцию взаимной когерентности) со спектральной яркостью источника излучения, совпадающей или близкой с математическим определением спектральной плотности, заданным теоремой Хинчина. Проблема вызвана невозможностью разделения пространственных и временных компонент в показателях экспонент. Лишь при выполнении квазимонохроматического приближения (КМП) [2] (условия пространственно-временной узкополосности) формулы, соответствующие теореме Ван Циттерта-Цернике, можно рассматривать как преобразования (обратные) Фурье или Френеля. Ниже предлагаются преобразования, связывающие пространственно-временные процессы (сигналы, поля), их корреляционные функции и функции когерентности с соответствующими спектральными характеристиками в общем случае, когда КМП не выполняется. Эти преобразования можно рассматривать как обобщение преобразований Фурье, Френеля, Лапласа, применимые для спектрального анализа широкополосных и сверхширокополосных волновых полей [4 – 11].

Постановка задачи исследования

Физическая и геометрическая постановка задачи, приводящая к рассматриваемым преобразованиям, иллюстрируется рис. 1.

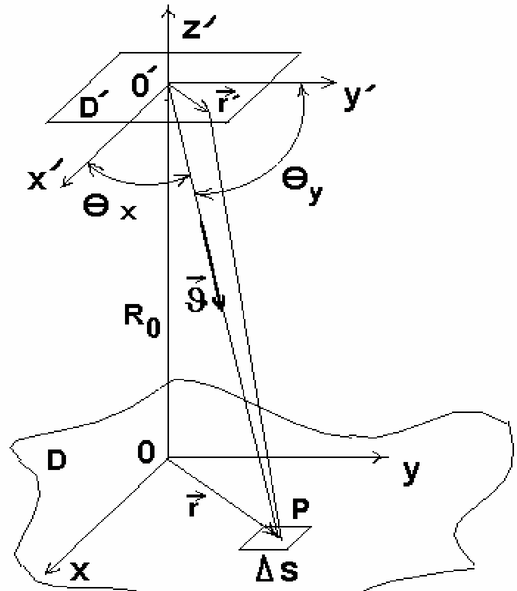

Рис. 1. Взаимное расположение области регистрации поля (раскрыва антенной системы $\vec{r}' = (x', y') \in D'$) и элемента рассеяния ΔS (излучения) поверхности, $\vec{r} = (x, y) \in D$

Пусть область D – область излучения поля (в диапазоне инфракрасных, оптических или радиоволн). Источник излучения является плоским или условно приведенным к плоскости. Положение излучающих элементов характеризуем либо направляющими косинусами

$$\vec{\vartheta} = (\vartheta_x = \cos\theta_x, \vartheta_y = \cos\theta_y),$$

либо координатами

$$\vec{r} = (x, y) \in D.$$

Соответственно их излучающую способность характеризуем функциями:

$$\dot{A}\left(\vec{\vartheta}, f\right)\exp\left\{j2\pi ft\right\} dfd\vec{\vartheta};$$

$$\dot{A}\left(\vec{r}, f\right)\exp\left\{j2\pi ft\right\} dfd\vec{r}, \qquad (1)$$

где $\dot{A}(\cdot)$ – спектрально-угловая и спектрально-пространственная плотности комплексной амплитуды (по переменной f определены также, как и спектральная плотность в теории преобразований Фурье для функций одной переменной t).

Реальные и мнимые части спектральной плотности $\dot{A}(\cdot)$ при фиксированном значении f в технических приложениях часто рассматривают как действительное и мнимое изображение источника, заданное на картинной плоскости с координатами $\left(\vec{\vartheta}_x, \vec{\vartheta}_y\right)$ или (x, y).

Поле излучения регистрируется элементами плоскости D' через некоторый промежуток времени $t_3 = R(r, r')/c$, обусловленный запаздыванием волн на расстоянии R при их распространении со скоростью c от элемента излучения с координатами $\vec{r}$ до регистрирующего элемента с координатами $\vec{r}' = (x', y') \in D'$.

Если область регистрации поля D' сравнительно невелика и находится в дальней зоне, так что лучи $O'P$ и $\vec{r}'P$ практически параллельны (зона Фраунгофера), то

$$R\left[\vec{r}\left(\vec{\vartheta}\right), \vec{r}'\right] \approx R\left[\vec{r}\left(\vec{\vartheta}\right), O'\right] + \vec{\vartheta}\vec{r}', \qquad (2)$$

где $\vec{\vartheta}\vec{r}' = \theta_x x' + \theta_y y'$ – скалярное произведение векторов.

Суммарное вещественное поле, регистрируемое элементом поверхности D' в точке $\vec{r}'$, можно записать как интегральный результат излучения всех элементов источника с координатами $\vec{\vartheta} \in \theta$:

$$u\left(\vec{r}', t\right) = \operatorname{Re}\int_{\vartheta}\int_{0}^{\infty} \dot{A}\left(\vec{\vartheta}, f\right) \times$$

$$\times \exp\left\{j2\pi f\left[t - c^{-1}R\left(\vec{r}, O'\right) - c^{-1}\vec{\vartheta}\vec{r}'\right]\right\} dfd\vec{\vartheta}, \qquad (3)$$

где $d\vec{\vartheta} = d\vartheta_x d\vartheta_y$.

Обычно множитель $\exp\{-j2\pi fc^{-1}R(\vec{r}, O')\}$ включают в функцию $\dot{A}(\cdot)$. Вводя нормированные координаты $\vec{r}' = \vec{r}'/c$, запишем выражение для регистрируемого поля в зоне Фраунгофера в упрощенном виде

$$u\left(\vec{r}', t\right) =$$

$$= \operatorname{Re}\int_{\vartheta}\int_{0}^{\infty} \dot{A}\left(\vec{\vartheta}, f\right)\exp\left\{j2\pi \cdot f\left[t - \vec{\vartheta}\vec{r}'\right]\right\} dfd\vec{\vartheta}. \qquad (4)$$

Примечание. При математическом описании многомерных физических процессов возможны случаи анизотропного распространения полей, когда вдоль каждого из направлений x' и y' скорости c_x и c_y различны. Тогда вместо координат x' и y' могут рассматриваться их нормированные значения x'/c_x и y'/c_y.

Далее разложим функцию $R(\vec{r}, \vec{r}') = \sqrt{R(0, 0') + (x - x')^2 + (y - y')^2}$ в ряд Тейлора и, полагая величины $(x - x')$ и $(y - y')$ малыми, ограничимся первыми членами разложения

$$R\left(\vec{r}, \vec{r}'\right) \approx R\left(O, O'\right) + \left(\left|\vec{r} - \vec{r}'\right|^2\right) \Big/ \left(2R\left(O, O'\right)\right),$$

$$\left|\vec{r} - \vec{r}'\right|^2 = \left(x - x'\right)^2 + \left(y - y'\right)^2$$

(источник излучения находится в ближней зоне Френеля). Поле в точке $\vec{r}'$ является интегральным результатом излучения всех элементов области D.

$$u\left(\vec{r}', t\right) =$$

$$= \operatorname{Re}\int_{D}\int_{0}^{\infty} \dot{A}\left(\vec{\vartheta}, f\right)\exp\left\{j2\pi f\left[t - c^{-1}R\left(O, O'\right) - \right.\right.$$

$$\left.\left. -0,5 \cdot c^{-1}R^{-1}\left(O, O'\right) \cdot \left|\vec{r} - \vec{r}'\right|^2\right]\right\} dfd\vec{r}.$$

Вводя нормирование координаты $\vec{r}' = \vec{r}'/(cR)^{-1/2}$, $\vec{r} = \vec{r}/(cR)^{-1/2}$ и включая функцию $\exp\left\{-j2\pi\ fc^{-1}R(0, 0')\right\}$ как сомножитель в $A(\cdot)$, упростим выражение для регистрируемого поля в зоне Френеля

$$u\left(\vec{r}, t\right) = \operatorname{Re}\int_{D}\int_{0}^{\infty} \dot{A}\left(\vec{\vartheta}, f\right) \times$$

$$\times \exp\left\{j2\pi\ f\left[t - 0,5 \cdot \left|\vec{r} - \vec{r}'\right|^2\right]\right\} dfd\vec{r}. \qquad (5)$$

При выполнении КМП в бесконечных пределах интегрирования выражение (4) может быть сведено к трехмерному преобразованию Фурье, а (5) – к преобразованию Фурье и Френеля по переменным f, t и $\vec{r}, \vec{r}'$. Однако в общем случае их нельзя считать преобразованиями Фурье и Френеля. Эти формулы являются исходными для рассмотрения предложенных преобразований.

Примечание. Речь идет не об обобщенном представлении о преобразованиях Фурье в виде разложений по произвольным ортогональным базисным функциям, а о традиционных, в виде разложений по комплексным экспонентам.

Преобразования V_F, V_F^{-1}

Как и в теории преобразований Фурье, распространим спектральную функцию $\dot{A}(\vec{\vartheta}, f)$ в отрицательную область переменной f, $\dot{A}(\vec{\vartheta}, f) = \dot{A}^*(\vec{\vartheta}, -f)$ уменьшив ее в 2 раза по абсолютному значению. Внутренний интеграл в (4) по этой переменной, а, следовательно, и функция $u(\vec{r}', t)$, будут вещественны. Учитывая также, что областью определения функции $\dot{A}(\cdot)$ по переменной $\vec{\vartheta}$ является круг $\vartheta_x^2 + \vartheta_y^2 \le 1$, распространим формально пределы интегрирования на $\pm\infty$, тогда

$$u(\vec{r}', t) = 0{,}5V_F^{-1}\left[\dot{A}\left(\vec{\vartheta}, f\right)\right] =$$

$$\times 0{,}5\int_D \int_0^\infty \dot{A}\left(\vec{\vartheta}, f\right)\exp\left\{j2\pi\ f\left[t - \vec{\vartheta}\vec{r}'\right]\right\} df d\vec{\vartheta}\,. \quad (6)$$

Обобщим это выражение на случай, когда размерности векторов $\vec{\theta}$ и $\vec{r}'$ равны N ($d\vec{\vartheta} = d\theta_1, d\theta_2, ..., d\theta_N; \vec{\theta}\vec{r} = \sum_{i=1}^{N}\theta_i x_i'$; f и t – скалярные величины).

Умножая левую и правую части (6) на комплексно-сопряженную функцию

$$\exp\{-j2\pi\cdot f_1(t - \vec{\vartheta}_1\vec{r}_1')\},$$

интегрируя ее по переменным $\vec{r} = \{x_i'\}$ и t в бесконечных пределах и учитывая равенство

$$\int\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left\{j2\pi\left[f - f_1\right]\cdot t - \left(f\vec{\vartheta} - f_1\vec{\vartheta}_1\right)\cdot\vec{r}'\right\} dt_1 d\vec{r}' =$$

$$= f^{-N}\delta\left(f - f_1\right)\delta\left(\vec{\vartheta} - \vec{\vartheta}_1\right);$$

$$\delta\left(\vec{\vartheta} - \vec{\vartheta}_1\right) = \prod_{i=1}^{N}\delta\left(\vartheta_i - \vartheta_{i1}\right), \quad (7)$$

получаем

$$0{,}5f^{-N}\dot{A}\left(\vec{\vartheta}, f\right) = V_F\left[u\left(\vec{r}', t\right)\right] =$$

$$= \int\int_{-\infty}^{+\infty} u\left(\vec{r}', t\right)\exp\left\{-j2\pi\left(t - \vec{\vartheta}\vec{r}'\right)\right\} dt d\vec{r}'\,;$$

$$d\vec{r}' = dx_1' dx_2' ... dx_N'\,, \quad (8)$$

где $\delta(\cdot)$ – функция Дирака (дельта-функция);

$$\delta(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(i2\pi\varsigma\cdot v) dv\,.$$

Данные преобразования не являются преобразованиями Фурье, так как во втором слагаемом под знаком комплексных экспонент неразделимы сомножители f и $\vec{\vartheta}$ (временные и пространственные частоты) и векторы

$$\left\|f, \theta_1, \theta_2, ..., \theta_N\right\|, \left\|t, x_1', x_2', ..., x_N'\right\|$$

не составляют скалярного произведения. Однако их можно рассматривать как обобщения преобразований Фурье. Свойства преобразований V_F и V_F^{-1} во многом подобны свойствам преобразований Фурье. Рассмотрим некоторые из них.

1. Умножение спектральной плотности $\dot{A}(\vec{\vartheta}, f)$ на функцию $\exp\{\pm i2\pi\cdot f(\tau - \vec{\vartheta}\vec{\rho}')\}$ приводит к смещению исходной функции по переменным r' и t на величины $\pm\vec{\rho}'$ и $\pm\tau, \vec{\rho}' = \left\|\chi_1', \chi_2', ..., \chi_N'\right\|$. Действительно, умножим в (6) подынтегральное выражение на указанную функцию. В результате получаем

$$0{,}5\int\int_{-\infty}^{+\infty} \dot{A}\left(\vec{\vartheta}, f\right)\exp\left\{\left(j2\pi\cdot f\left(t \pm \tau - -\vec{\vartheta}\left(\vec{r}' \pm \vec{\rho}'\right)\right)\right\} df d\vec{\vartheta}\,,$$

или

$$0{,}5V_F^{-1}\left[\dot{A}\left(\vec{\vartheta}, f\right)\exp\left\{\pm j2\pi\cdot f\left(\tau - \vec{\vartheta}\vec{\rho}'\right)\right\}\right] =$$

$$= u\left(t \pm \tau, \vec{r}' \pm \vec{\rho}'\right). \quad (9)$$

2. Частной производной функции $u\left(\vec{r}, t\right)$ по переменной t соответствует спектральная плотность $j2\pi\cdot f\dot{A}(\vec{\vartheta}, f)$, а частным производным по переменной x_k' – спектральные плотности $j2\pi\cdot f\vartheta_k\dot{A}(\vec{\vartheta}, f)$. Обобщая эти свойства, записываем

$$\text{grad}\ \ u\left(\vec{r}', t\right) = \left\|\frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial u}{\partial x_N}\right\| =$$

$$= 0{,}5V_F^{-1}\left\{j2\pi\cdot f\dot{A}\left(\vec{\vartheta}, f\right)\cdot\left\|1, \vartheta_1, \vartheta_2, ...\vartheta_N\right\|\right\}. \quad (10)$$

3. Произведению спектральных плотностей $\dot{A}_1(\vec{\vartheta}, f)$ и $\dot{A}_2(\vec{\vartheta}, f)$ весом $0{,}5f^{-N}$ соответствует свертка исходных функций $u_1(\vec{r}, t)$ и $u_2(\vec{r}, t)$ т. е.

$$0{,}5V_F^{-1}\left[0{,}5\dot{A}_1\left(\vec{\vartheta}, f\right)\dot{A}_2\left(\vec{\vartheta}, f\right)\right] =$$

$$= \int\int_{-\infty}^{+\infty} u_1\left(\vec{r}_1', t\right)u_2\left(\vec{r}' - \vec{r}_1', t - t_1\right) dt_1 d\vec{r}_1'\,. \quad (11)$$

Для доказательства осуществим такие подстановки в левой части этого равенства

$$\dot{A}_1\left(\vec{\vartheta}, f\right) = 2f^N V_F\left(u_1\left(\vec{r}', t\right)\right);$$

$$\dot{A}_2\left(\vec{\vartheta}, f\right) = 2f^N V_F\left(u_2\left(\vec{r}', t\right)\right).$$

В результате имеем

$$\int\int_{-\infty}^{+\infty} f^N \exp\left\{j2\pi \cdot f\left(t-\vec{\vartheta}\vec{r}'\right)\right\} df d\vec{\vartheta}\times$$

$$\int\int_{-\infty}^{+\infty} u_1\left(\vec{r}_1',t_1\right)\exp\left\{-j2\pi\cdot f\left(t_1-\vec{\vartheta}\vec{r}_1'\right)\right\}dt_1 d\vec{r}_1'\times$$

$$\int\int_{-\infty}^{+\infty} u_2\left(\vec{r}_2',t_2\right)\exp\left\{-j2\pi f\left(t_2-\vec{\vartheta}\vec{r}_2'\right)\right\}dt_2 d\vec{r}_2' .$$

Меняя порядок интегрирования и учитывая, что

$$\int\int_{-\infty}^{+\infty} f^N \exp\{j2\pi f\times$$

$$\times\left(t-t_1-t_2-\vec{\vartheta}\left(\vec{r}-\vec{r}_1'-\vec{r}_2'\right)\right)\} df d\vec{\vartheta} =$$

$$=\delta\left(t-t_1-t_2\right)\delta\left(\vec{r}-\vec{r}_1'-\vec{r}_2'\right),$$

где

$$\delta\left(\vec{r}-\vec{r}_1'-\vec{r}'\right)=\prod_{i=1}^{N}\delta\left(x_i'-x_{i1}'-x_{i2}'\right),$$

получаем правую часть равенства (11).

4. Составим комплексный аналитический процесс

$$\dot{u}\left(\vec{r}',t\right)=u\left(\vec{r}',t\right)+ju_{\perp}\left(\vec{r}',t\right). \qquad (12)$$

Здесь $u_{\perp}(\vec{r}',t)$ – сопряженный процесс, связанный по переменной t с процессом $u(\vec{r}',t)$ парой преобразований Гильберта. Особенность комплексного процесса $\dot{u}(\vec{r}',T)$ состоит в том, что его спектральная плотность $\dot{A}(\vec{\theta},f)$, в отличие от спектральной плотности процесса $u(\vec{r}',t)$, является односторонней (удвоена по абсолютному значению в положительной области переменной f и равна нулю при $f<0$). Тогда

$$\dot{u}(\vec{r}',t)=$$

$$=\int_{0}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\dot{A}(\vec{\vartheta},f)\exp\left\{j2\pi\cdot f[t-\vec{\vartheta}\vec{r}']\right\}d\vec{\vartheta}df . \qquad (13)$$

Учитывая, что $\dot{A}(\vec{\vartheta},f)=0$ при $f<0$, формально можно распространить нижний предел интегрирования по переменной f на $-\infty$ и записать

$$\dot{u}(\vec{r}',t)=V_F^{-1}\left[\dot{A}(\vec{\vartheta},f)\right]. \qquad (14)$$

Как и при доказательстве соотношения (8), умножая обе части равенства (13) на сопряженную функцию

$$\exp\left\{-2\pi f_1\left(\tau-\vartheta_1\vec{r}'\right)\right\},$$

интегрируя по переменным r' и t в бесконечных пределах, получаем

$$V_F\left[\dot{u}(\vec{r}',t)\right]=f^{-N}\cdot\dot{A}\left(\vec{\vartheta},f\right). \qquad (15)$$

Преобразования V_{FL}, V_{FL}^{-1}

Перейдем формально в выражениях (6) и (8) от переменной $j2\pi\cdot f$ к переменной $p=\alpha+j2\pi f$ (как и при переходе к формулам преобразований Лапласа). Причем по переменной t примем нижний предел интегрирования равным нулю, в результате получим

$$\dot{u}(\vec{r}',t)=0,5\cdot V_{FL}^{-1}\left[\dot{A}(\vec{\vartheta},p)\right]=$$

$$=\frac{0,5}{2\pi j}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{\alpha-j\omega}^{\alpha+j\omega}\dot{A}\left(\vec{\vartheta},p\right)\exp\left\{p\left(t-\vec{\vartheta}\vec{r}'\right)\right\}dp d\vec{\vartheta} ; \qquad (16)$$

$$0,5\left(j2\pi\right)^N p^{-N}\dot{A}\left(\vec{\vartheta},p\right)=V_{FL}\left[u\left(\vec{r}',t\right)\right]=$$

$$=\int_{0}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}u\left(\vec{r}',t\right)\exp\left\{-p\left(t-\vec{\vartheta}\vec{r}'\right)\right\}dt d\vec{r} . \qquad (17)$$

Как и в теории преобразований Лапласа, для сходимости преобразования (17) по переменной необходимо, чтобы для всех p из области определения функции $\dot{A}(\vec{\vartheta},p)$ выполнялось условие:

$$\left|\int_{-\infty}^{+\infty}u\left(\vec{r}',t\right)\exp\left\{p\vec{\vartheta}\vec{r}'\right\}d\vec{r}'\right|\le Me^{\gamma\cdot t} . \qquad (18)$$

Ценной особенностью преобразований V_{FL} и V_{FL}^{-1} является то, что по переменной t они обладают преимуществами одностороннего преобразования Лапласа (известно, что последнее, выполняемое лишь по пространственным переменным, как правило, двухстороннее, не имеет особых преимуществ перед преобразованием Фурье).

Эти преобразования можно рассматривать как обобщения преобразований Лапласа, применимые для анализа многомерных динамических процессов и волновых полей в задачах математической физики. Рассмотрим некоторые их важнейшие свойства.

1. Преобразования V_{FL} и V_{FL}^{-1} обладают очевидным свойством, аналогичным (9):

$$0,5\cdot V_{FL}^{-1}\left[A(\vec{\vartheta},p)\exp\left\{\pm p(\tau-\vec{\vartheta}\vec{\rho}')\right\}\right]=$$

$$=u(\vec{r}'\pm\vec{\rho}',t\pm\tau) . \qquad (19)$$

2. Имеет место свойство, являющееся аналогом теоремы о свертке оригиналов в преобразованиях Лапласа

$$V_{FL}\left[\int_{0}^{t}\int_{-\infty}^{+\infty}u_1\left(\vec{r}_1',t_1\right)u_2\left(\vec{r}'-\vec{r}_1',t-t_1\right)dt_1 d\vec{r}_1'\right]=$$

$$=0,25\left(j2\pi\right)^{2N}p^{-2N}\dot{A}_1\left(\vec{\vartheta},p\right)\dot{A}_2\left(\vec{\vartheta},p\right). \qquad (20)$$

Для доказательства этого свойства запишем левую часть этого равенства в развернутом виде

$$\int\limits_0^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\exp\left(-p\left(t-\vec{\vartheta}\vec{r}'\right)\right)dtd\vec{r}'\times$$

$$\times\int\limits_0^{t}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}u_1\left(\vec{r}_1',t_1\right)u_2\left(\vec{r}'-\vec{r}_1',t-t_1\right)dt_1d\vec{r}_1'.$$

Изменим порядок и, соответственно, пределы интегрирования:

$$\int\limits_0^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}u_1\left(\vec{r}_1',t_1\right)dt_1d\vec{r}_1'\int\limits_{t_1}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}u_2\left(\vec{r}'-\vec{r}_1',t-t_1\right)\times$$

$$\times\exp\left(-p\left(t-\vec{\vartheta}\vec{r}'\right)\right)dt_1d\vec{r}_1'.$$

После замены переменных $t-t_1=\tau$ и $\vec{r}'-\vec{r}_1'=\vec{\rho}'$ и сопоставления полученных выражений с (17), имеем

$$\int\limits_0^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}u_1\left(\vec{r}_1',t_1\right)dt_1d\vec{r}_1'\int\limits_0^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}u_2\left(\vec{\rho}',\tau\right)\times$$

$$\times\exp\left\{-p\left(t_1+\tau-\vec{\vartheta}\left(\vec{r}_1'+\vec{\rho}'\right)\right)\right\}d\tau d\vec{\rho}',$$

совпадающее с правой частью равенства (20). Сравнивая также (20) с (16), (17) получаем

$$0,5V_{FL}^{-1}\left[0,5(j2\pi)^N p^{-N}A_1(\vec{\vartheta},p)A_2(\vec{\vartheta},p)\right]=$$

$$=\int\limits_0^{t}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}u_1(\vec{r}_1',t_1)u_2(\vec{r}'-\vec{r}_1',t-t_1)dt_1d\vec{r}'.$$

3. Рассмотрим свойство этих преобразований, являющееся аналогом теоремы о свертке изображений (образов) Лапласа.

Пусть функции $u_1(\vec{r}',t),u_2(\vec{r}',t)$ и их изображение удовлетворяют условию (18) соответственно с порядками роста экспоненциальных функций $\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3$.

Запишем преобразование V_{FL} от произведения этих функций,

$$\int\limits_0^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}u_1\left(\vec{r}_1',t_1\right)u_2\left(\vec{r}_2',t_2\right)\exp\left\{-p\left(t-\vec{\vartheta}\vec{r}'\right)\right\}dtd\vec{r}'=$$

$$=0,5\left(j2\pi\right)^N p^{-N}A_{\otimes}\left(p,\vec{\vartheta},p\right),$$

$$\operatorname{Re}p>\gamma_3, \quad (21)$$

и подставим в правую часть этого равенства выражение

$$u_1\left(\vec{r}',t\right)=\frac{0,5}{2\pi j}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{\alpha-j\infty}^{\alpha+j\infty}A_1\left(p_1\cdot\vec{\vartheta}_1,p_1\right)\times$$

$$\times\exp\left\{p_1\left(t-\vec{\vartheta}_1\vec{r}'\right)\right\}dp_1d\vec{\vartheta}_1,$$

$$\operatorname{Re}p>\gamma_1.$$

Изменив после подстановки порядок интегрирования, получим

$$V_{FL}\left[u_1\left(\vec{r}',t\right)u_2\left(\vec{r}',t\right)\right]=$$

$$=\frac{0,5}{2\pi j}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{\alpha-j\infty}^{\alpha+j\infty}A_1\left(p_1\cdot\vec{\vartheta}_1,p_1\right)dp_1d\vec{\vartheta}_1\times$$

$$\times\int\limits_0^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}u_2\left(\vec{r}',t\right)\exp\left\{-\left(p-p_1\right)\right\}\times$$

$$\times\left[t-\left(p\vec{\vartheta}-p_1\vec{\vartheta}_1\right)\vec{r}'/\left(p-p_1\right)\right]dtd\vec{r}'=$$

$$=\frac{0,5}{2\pi j}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{\alpha-j\infty}^{\alpha+j\infty}0,5\left(j2\pi\right)^N\left(p-p_1\right)^{-N}\times$$

$$\times A_2\left(p\vec{\vartheta}-p_1\vec{\vartheta}_1,p-p_1\right)\times$$

$$\times A_1\left(p_1,\vec{\vartheta}_1,p_1\right)dp_1d\vec{\vartheta}_1, \quad (22)$$

или

$$A_{\otimes}\left(\vec{\vartheta}_1,p\right)=$$

$$=\frac{0,5p^N}{2\pi j}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{\alpha-j\infty}^{\alpha+j\infty}A_2\left(p\vec{\vartheta}-p_1\vec{\vartheta}_1,p-p_1\right)\times$$

$$\times A_1\left(p_1\vec{\vartheta}_1,p_1\right)dp_1d\vec{\vartheta}_1, \quad (23)$$

где $\operatorname{Re}\left(p-p_1\right)=\alpha_1>\gamma_2$.

Очевидно, что (23) симметрична относительно индексов 1, 2 при образах $A\left(\cdot\right)$.

Преобразования $V_{\Phi 1},V_{\Phi 1}^{-1}$

Распространим в (5) спектральную плотность $A\left(\vec{r}',f\right)$ в область отрицательных частот и уменьшим в 2 раза (как и в преобразованиях Фурье). Учитывая также, что вне области D функция $\dot{A}(\cdot)$ равна нулю, распространим пределы интегрирования по переменным x и y на $\pm\infty$. Тогда вещественная функция

$$u(\vec{r}',t)=0,5V_{\Phi 1}^{-1}\left[\dot{A}(\vec{r},f)\right]=$$

$$=0,5\int\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\dot{A}(\vec{r},f)\exp\left\{j2\pi f(t-0,5\left|\vec{r}-\vec{r}'\right|^2)\right\}dfd\vec{r}. \quad (24)$$

Далее обобщаем полученное преобразование на случай, когда векторы $\vec{r}=\left\|x_i\right\|,\vec{r}'=\left\|x_i'\right\|$ имеют размерность N.

Умножая левую и правую части (24) на функцию $\exp\left\{-j2\pi f_1[t-0,5\left|\vec{r}-\vec{r}'\right|^2]\right\}$, интегрируя ее по переменным t и $\vec{r}$ и учитывая равенство

$$\int\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\exp\left\{j2\pi\left\{\left[\left(f-f_1\right)\cdot t-0,5f\left|\vec{r}-\vec{r}'\right|^2+\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.+0,5f_1\left|\vec{r}_1-\vec{r}'\right|^2\right]\right\}dtd\vec{r}'==f^{-N}\delta\left(f-f_1\right)\delta\left(\vec{r}-\vec{r}_1\right),$$

где

$$\delta\left(\vec{r}-\vec{r}_1\right)=\prod_{i=1}^{N}\delta\left(x_i-x_{i1}\right), \qquad (25)$$

получим

$$0,5f^{-N}\dot{A}\left(\vec{r},f\right)=V_{\Phi 1}\left[u\left(\vec{r}',t\right)\right]=$$

$$=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int u\left(\vec{r}',t\right)\exp\left\{-j2\pi f\left(t-0,5\left|\vec{r}-\vec{r}'\right|^2\right)\right\}\ dt\ d\vec{r}'. \qquad (26)$$

Для комплексного аналитического процесса $\dot{u}(\vec{r}',t)=u(\vec{r}',t)+ju_{\perp}(\vec{r}',t)$, где u и $u_{\perp}$ связаны по переменной t парой преобразований Гильберта, нетрудно получить

$$\dot{u}\left(\vec{r}',t\right)=V_{\Phi 1}^{-1}\left[\dot{A}\left(\vec{r},t\right)\right];$$

$$f^{-N}\dot{A}\left(\vec{r},t\right)=V_{\Phi 1}\left[\dot{u}\left(\vec{r}',t\right)\right]. \qquad (27)$$

Здесь $\dot{A}(\vec{r},f)$ — односторонняя спектральная плотность (равна нулю при $f<0$).

Преобразования $V_{\Phi L}, V_{\Phi L}^{-1}$

Как и в преобразованиях Лапласа, формально переходя в (24), (26) от переменной $i2\pi f$ к $p=\alpha+i2\pi f$ и заменяя нижний предел интегрирования по t с $-\infty$ на ноль, имеем

$$u\left(\vec{r}',t\right)=0,5V_{\Phi 1}^{-1}\left[\dot{A}\left(\vec{r},p\right)\right]=$$

$$=\frac{0,5}{2\pi j}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{\alpha-j\infty}^{\alpha+j\infty}\dot{A}\left(\vec{r},p\right)\times$$

$$\times\exp\left\{p\left(t-0,5\left|\vec{r}-\vec{r}'\right|^2\right)\right\}dpd\vec{r}\ ; \qquad (28)$$

$$0,5\left(j2\pi\right)^N p^{-N}\dot{A}\left(\vec{r},p\right)=$$

$$=V_{\Phi 1}\left[u\left(\vec{r}',t\right)\right]=$$

$$=\int\limits_{0}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}u\left(\vec{r}',t\right)\exp\left\{p\left(t-0,5\left|\vec{r}-\vec{r}'\right|^2\right)\right\}dtd\vec{r}'. \qquad (29)$$

Здесь справедливы те же замечания, что и для преобразований V_{FL} и V_{FL}^{-1}, т.е. также необходимо, чтобы выполнялось условие

$$\left|\int\limits_{-\infty}^{+\infty}u\left(\vec{r}',t\right)\exp\left\{0,5p\left|\vec{r}-\vec{r}'\right|^2\right\}d\vec{r}'\right|\le Me^{\gamma\cdot t}.$$

Связь спектральных и корреляционных характеристик случайных процессов

Как следствия общей теории Карунена об ортогональных разложениях случайных процессов и в дополнение к спектральной теореме Хинчина – Винера могут быть рассмотрены следующие свойства предложенных преобразований.

Пусть случайные спектральные составляющие $\dot{A}(\vec{\vartheta},f)$ и $\dot{A}(\vec{r},f)$ некоррелированы при различных значениях переменных θ, r и f, т.е.

$$M\left[\dot{A}(\vec{\vartheta}_1,f_1)\dot{A}^*(\vec{\vartheta}_2,f_2)\right]=$$

$$=B\left(\vec{\vartheta}_1,f_1\right)\delta\left(\vec{\vartheta}_1-\vec{\vartheta}_2\right)\delta\left(f_1-f_2\right), \qquad (30)$$

и

$$M\left[\dot{A}(\vec{r}_1,f_1)\dot{A}^*(\vec{r}_2,f_2)\right]=$$

$$=B\left(\vec{r}_1,f_1\right)\delta\left(\vec{r}_1-\vec{r}_2\right)\delta\left(f_1-f_2\right),$$

где $M[\cdot]$ – знак математического ожидания; $B[\cdot]$ – спектрально-угловая и спектрально-пространственная плотности мощности процессов $u(\vec{r}',t)$.

Теорема 1. Корреляционная функция

$$R(\vec{\rho}',\tau),\vec{\rho}'=\vec{r}_1'-\vec{r}_2',\tau=t_1-t_2$$

стационарного и однородного процесса $u(\vec{r}',t)$ и его спектрально-угловая плотность мощности $B\left(\vec{\vartheta},f\right)$ связаны между собой парой преобразований V_F и V_F^{-1}:

$$R(\vec{\rho}',\tau)=M\left[u(\vec{r}_1',f_1)u(\vec{r}_2',f_2)\right]=$$

$$=0,25V_F^{-1}\left[B\left(\vec{\vartheta},f\right)\right]; \qquad (32)$$

$$0,25f^{-N}B\left(\vec{\vartheta},f\right)=V_F\left[R\left(\vec{\rho}',\tau\right)\right]. \qquad (33)$$

Правую часть формулы (32) получаем непосредственной подстановкой в ее левую часть выражения (6) с учетом равенства (30).

Выражение (33) легко получить (как и (8)) путем применения к (32) преобразования V_F и учета равенства (7).

Здесь спектральная плотность $B\left(\vec{\vartheta},f\right)$ является двухсторонней и четной функцией f (как и в теории спектральных преобразований случайных функций одного переменного t).

Теорема 2. Взаимная корреляционная функция $\dot{\Gamma}(\vec{\rho}',f)$ комплексно-сопряженных аналитических процессов $\dot{u}(\vec{r}',t)$ и $\dot{u}^*(\vec{r}',t)$ (функция когерентности) и односторонняя (равная нулю при $f<0$) спектральная плотность мощности $B(\vec{\theta},f)$ связаны между собой парой преобразований V_F и V_F^{-1}:

$$\dot{\Gamma}\left(\vec{\rho}',\tau\right)=M\left[\dot{u}\left(\vec{r}_1',t_1\right)\dot{u}^*\left(\vec{r}_2',t_2\right)\right]=$$

$$=V_F^{-1}\left[B\left(\vec{\vartheta},f\right)\right]; \qquad (34)$$

$$f^{-N}\left[B\left(\vec{\vartheta},f\right)\right]=V_F\left[\dot{\Gamma}\left(\vec{\rho}',\tau\right)\right]. \qquad (35)$$

Доказательство этого свойства аналогично доказательству предыдущего. Для получения (34) необходимо в ее левую часть подставить (14) и учесть равенство (30). Для получения (35) необходимо к (34) применить преобразование V_F и учесть равенство (7).

Теорема 3. Корреляционная функция $R(\vec{r}_1,\vec{r}_2',\tau)$ стационарного (по переменной t) процесса (24) и спектральная плотность $B(\vec{r},f)$ (двухсторонняя четная функция f) связаны между собой парой преобразований $V_{\Phi 2}, V_{\phi 2}^{-1}$:

$$R(\vec{r}_1,\vec{r}_2',\tau)=0,25V_{\Phi 2}^{-1}\left[B(\vec{r},f)\right]=$$

$$=0,25\int\int_{-\infty}^{+\infty} B(\vec{r},f)\times$$

$$\times\exp\left\{j2\pi f\left(\tau-0,5\left|\vec{r}_1'-\vec{r}\right|^2+0,5\left|\vec{r}_2'-\vec{r}\right|^2\right)\right\}dfd\vec{r}\ ; \quad (36)$$

$$0,25f^{-N}B(\vec{r},f)=V_{\Phi 2}\left[R(\vec{r}_1,\vec{r}_2',\tau)\right]=$$

$$=\int\int_{-\infty}^{+\infty} R(\vec{r}_1,\vec{r}_2',\tau)\exp\left\{-j2\pi f\left(\tau-0,5\left|\vec{r}_1'-\vec{r}\right|^2+\right.\right.$$

$$\left.\left.+0,5\left|\vec{r}_2'-\vec{r}\right|^2\right)\right\}d\vec{r}_1'd\tau\ . \quad (37)$$

Действительно, подставляя в формулу для корреляционной функции

$$R(\vec{r}_1,\vec{r}_2',\tau)=M\left[u(\vec{r}_1',t_1)u(\vec{r}_2',t_2)\right]$$

выражение (24) и учитывая (31), получаем (36).

Далее, применяя к обеим частям соотношения (36) преобразование $V_{\Phi 2}$ и принимая во внимание равенство

$$\int\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left\{j2\pi\left(\left(f-f_1\right)\tau-0,5f\times\right.\right.$$

$$\times\left(\left|\vec{r}-\vec{r}_1'\right|^2+0,5\left|\vec{r}-\vec{r}_2'\right|^2\right)+$$

$$\left.\left.+0,5f_1\left(\left|\vec{r}_1-\vec{r}_1'\right|^2+0,5\left|\vec{r}_1-\vec{r}_2'\right|^2\right)\right)\right\}d\tau d\vec{r}_1'=$$

$$=f^{-N}\delta\left(f-f_1\right)\delta\left(\vec{r}-\vec{r}_1\right), \quad (38)$$

находим (37).

Примечание 1. Интегрирование (37) можно осуществлять по одной (любой) из переменных $\vec{r}_1'$ или $\vec{r}_2'$.

Примечание 2. По переменной f спектральная плотность $B(\vec{r},f)$ имеет все свойства, присущие спектральной плотности случайной функции одной переменной t, полученной в результате ее Фурье – анализа в соответствии с теоремой Хинчина.

Теорема 4. Взаимная корреляционная функция комплексно-сопряженных аналитических процессов $\dot{u}(\vec{r}_1',t)$ и $\dot{u}^*(\vec{r}_2',t)$ (функция когерентности) и односторонняя (равная нулю при $f<0$) спектральная плотность $B(\vec{r},f)$ связаны между собой парой преобразований $V_{\phi 2}$ и $V^{-1}{}_{\phi 2}$:

$$\dot{\Gamma}\left(\vec{r}_1',\vec{r}_2',\tau\right)=M\left[\dot{u}(\vec{r}_1',t_1)\dot{u}^*(\vec{r}_2',t_2)\right]=$$

$$=V_{\Phi 2}^{-1}\left[B\left(\vec{r},f\right)\right]; \quad (39)$$

$$f^{-N}B\left(\vec{r},f\right)=V_{\Phi 2}\left[\dot{\Gamma}\left(\vec{r}_1',\vec{r}_2',\tau\right)\right]. \quad (40)$$

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству предыдущей: первое из этих соотношений проверяется подстановкой в него первой формулы (27) с учетом (31); второе – применением преобразования $V_{\phi 2}$ к обеим частям первого с учетом (38).

Модификации преобразований $V_F, V_F^{-1}, V_F^{-1}, V_{FL}, V_{FL}^{-1}, V_{\Phi 1}, V_{\Phi 1}^{-1}, V_{\Phi L}, V_{\Phi L}^{-1}$

Полезным для описания моделей радиотепловых полей являются такие модификации преобразований V_F и V_F^{-1}. Запишем их для $N=2$ с учетом скорости распространения радиоволн c $(\vec{r}'=\vec{r}'/c)$:

$$u(t,\vec{r}')=0,5V_F^{-1}\left[\dot{A}(f,\vec{\vartheta}\right]=$$

$$=0,5\int\int_{-\infty}^{\infty}\dot{A}(f,\vec{\vartheta})\exp\left\{j2\pi f(t-\vec{\vartheta}\vec{r}/c)\right\}dfd\vec{\vartheta}\ ; \quad (41)$$

$$0,5\frac{c^2}{f^2}\dot{A}(f,\vec{\vartheta})=V_F\left[u(t,r)\right]=$$

$$=\int\int_{-\infty}^{\infty}u(t,\vec{r}')\exp\left\{-j2\pi f(t-\vec{\vartheta}\vec{r}/c)\right\}dtd\vec{r}'. \quad (42)$$

Преобразуем спектрально-угловую плотность комплексной амплитуды $\dot{A}(f,\vec{\vartheta})$ в функцию $A(t,\vec{\vartheta})$, характеризующую излучение источника как случайный процесс времени t, поступающий из направления $\vec{\vartheta}$:

$$A(t,\vec{\vartheta})=0,5\int_{-\infty}^{\infty}\dot{A}(f,\vec{\vartheta})\exp\left\{j2\pi ft\right\}df\ . \quad (43)$$

Сопоставляя (43) с (41), находим

$$A(t-\frac{\vec{\vartheta}\vec{r}}{c},\vec{\vartheta})=$$

$$=0,5\int_{-\infty}^{\infty}\dot{A}(f,\vec{\vartheta})\exp\left\{j2\pi f(t-\vec{\vartheta}\vec{r}/c)\right\}df\ ; \quad (44)$$

$$u(t,\vec{r}')=\int_{-\infty}^{\infty}A(t-\frac{\vec{\vartheta}\vec{r}'}{c},\vec{\vartheta})d\vec{\vartheta}\ . \quad (45)$$

Применим прямое преобразование Фурье по переменной t к полю $u(t,\vec{r}')$ для каждой точки раскрыва $\vec{r}'$:

$$0,5\dot{u}(f,\vec{r}') = \int\limits_{-\infty}^{\infty} u(t,\vec{r}')\exp\{-j2\pi ft\}dt. \quad (46)$$

Сопоставляя (46) с (42), получаем

$$\frac{c^2}{f^2}\dot{A}(f,\vec{\vartheta}) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \dot{u}(f,\vec{r}')\exp\{j2\pi f\vec{\vartheta}\vec{r}'/c\}d\vec{r}'. \quad (47)$$

После подстановки (47) в (42) имеем

$$A(t,\vec{\vartheta}) = 0,5V_{mF}^{-1}\left[\frac{f^2}{c^2}\dot{u}(f,\vec{r}')\right] =$$

$$= 0,5\int\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{f^2}{c^2}\dot{u}(f,\vec{r}')\exp\{j2\pi f(t+\vec{\vartheta}\vec{r}')/c\}dfd\vec{r}'. \quad (48)$$

Далее, подставляя (41) в (46) и учитывая фильтрующие свойства дельта-функции, находим

$$\dot{u}(f,\vec{r}') = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\dot{A}(f,\vec{\vartheta})\exp\{-j2\pi f\vec{\vartheta}\vec{r}/c\}d\vec{\vartheta}. \quad (49)$$

Из (43) следует, что

$$0,5\dot{A}(f,\vec{\vartheta}) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} A(t,\vec{\vartheta})\exp\{-2j\pi ft\}dt. \quad (50)$$

Подставляя (50) в (49), получаем

$$0,5\dot{u}(f,\vec{r}') = V_{mF}\left[A(t,\vec{\vartheta})\right] =$$

$$= \int\int\limits_{-\infty}^{\infty} A(t,\vec{\vartheta})\exp\{-j2\pi f(t+\vec{\vartheta}\vec{r}'/c)\}dtd\vec{\vartheta}. \quad (51)$$

Учитывая соотношение (43), находим

$$\left\langle A(t_1,\vec{\vartheta}_1)A(t_2,\vec{\vartheta}_2)\right\rangle = B(\tau,\vec{\vartheta}_1)\delta(\vec{\vartheta}_1-\vec{\vartheta}_2), \quad (52)$$

где

$$B(\tau,\vec{\vartheta}) = 0,25\int\limits_{-\infty}^{\infty} B(f,\vec{\vartheta})\exp\{j2\pi f\tau\}df \quad (53)$$

– корреляционная функция излучения, поступающего из направления $\vec{\vartheta}$. Излучения, приходящие с различных направлений $\vec{\vartheta}_1$ и $\vec{\vartheta}_2$, некоррелированы между собой. Очевидно, что

$$0,25B(f,\vec{\vartheta}) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} B(\tau,\vec{\vartheta})\exp\{-i2\pi f\tau\}d\tau. \quad (54)$$

Представив функцию $\dot{u}(f,\vec{r}')$ в виде (49) и учитывая (30), определим

$$\left\langle \dot{u}(f_1,\vec{r}_1')\dot{u}^*(f_2.\vec{r}_2')\right\rangle = G_u(f_1,\Delta\vec{r}')\delta(f_1-f_2), \quad (55)$$

где

$$G_u(f,\Delta\vec{r}') = \int\limits_{-\infty}^{\infty} B(f,\vec{\vartheta})\exp\{-j2\pi f\vec{\vartheta}\Delta\vec{r}'/c\}d\vec{\vartheta} \quad (56)$$

– взаимный энергетический спектр случайного процесса $u(t,\vec{r}')$ на частоте f в различных точках $\vec{r}_1'$, области раскрыва D'; $\Delta r' = r_1' - r_2'$ (ранее введенная переменная $\rho' = \Delta r'/c$).

Выражение (56) обратимо:

$$B(f,\vec{\vartheta}) = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{f^2}{c^2}G_u(f,\Delta\vec{r}')\exp\{j2\pi f\vec{\vartheta}\Delta\vec{r}/c\}d\vec{\vartheta}. \quad (57)$$

Запишем (33) в развернутом виде при $N=2$ и $\vec{r}' = \vec{r}'/c$ в показателе экспоненты

$$0,25\frac{c^2}{f^2}B(f,\vec{\vartheta}) = V_F\left[R(\Delta\vec{r}',\tau)\right] =$$

$$= \int\int\limits_{-\infty}^{\infty} R(\Delta\vec{r}',\tau)\exp\{-j2\pi f(\tau-\vec{\vartheta}\Delta\vec{r}'/c)\}d\tau d\Delta\vec{r}'; \quad (58)$$

$$R(\tau,\Delta\vec{r}') = 0,25V_F^{-1}\left[B(f,\vec{\vartheta})\right] =$$

$$= 0,25\int\int\limits_{-\infty}^{\infty} B(f,\vec{\vartheta})\exp\{j2\pi f(\tau-\vec{\vartheta}\Delta\vec{r}'/c)\}dfd\vec{\vartheta}. \quad (59)$$

Эти соотношения можно рассматривать как обобщение теоремы Ван Циттера-Цернике на случай изучения характеристик широкополосных полей.

Сопоставляя (58) с (57) находим, что

$$0,25G_u(f,\Delta\vec{r}') = \int\limits_{-\infty}^{\infty} R(\tau,\Delta\vec{r}')\exp\{j2\pi f\tau\}d\tau; \quad (60)$$

$$R(\tau,\Delta\vec{r}') = 0,25\int\limits_{-\infty}^{\infty} G_u(f,\Delta\vec{r}')\exp\{j2\pi f\tau\}df. \quad (61)$$

Эти соотношения соответствуют теореме Хинчина-Винера.

Подставив (54) в (56), имеем

$$0,25G_u(f,\Delta\vec{r}') = V_{mF}[B(\tau,\vec{\vartheta})] =$$

$$= \int\int\limits_{-\infty}^{\infty} B(\tau,\vec{\vartheta})\exp\{-j2\pi f(\tau+\vec{\vartheta}\Delta\vec{r}'/c)\}d\tau d\vec{\vartheta}. \quad (62)$$

Подставив (57) в (53), получим

$$B(\tau,\vec{\vartheta}) = 0,25V_{mF}^{-1}\left[\frac{f^2}{c^2}G_u(f,\Delta\vec{r}')\right] = 0,25\times$$

$$\times\int\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{f^2}{c^2}G_u(f,\Delta\vec{r}')\exp\{j2\pi f(\tau+\vec{\vartheta}\Delta\vec{r}'/c)\}dfd\Delta\vec{r}'. \quad (63)$$

Эти формулы можно рассматривать как модификацию выражений (58), (59), обобщающих теорему Ван Циттера-Цернике.

Корреляционная функция излучения в направлении $\vec{\vartheta}$, $B(0,\vec{\vartheta})$ при $\tau=0$ равна интенсивности (средней мощности излучения, приходящего с направления $\vec{\vartheta}$):

$$I(\vec{\vartheta}) = B(0,\vec{\vartheta}) = 0,25\times$$

$$\times\int\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f^2}{c^2} G_u(f,\Delta\vec{r}')\exp\left\{j2\pi f\vec{\vartheta}\Delta\vec{r}'/c\right\} df d\Delta\vec{r}'. \quad (64)$$

Учитывая (57), находим

$$I(\vec{\vartheta}) = 0,25\int_{-\infty}^{\infty} B(f,\vec{\vartheta})df\,. \quad (65)$$

Эта характеристика имеет важное значение. В отличие от спектральной яркости $B(f,\vec{\vartheta})$, характеризующей изображение источника излучения на каждой частоте, интенсивность $I(\vec{\vartheta})$ является интегральным изображением источника широкополосного излучения.

Выражение (63) можно также записать в виде

$$B\left(\tau,\vec{\vartheta}\right) =$$

$$= 0,25\int_{-\infty}^{+\infty} d\Delta\vec{r}'\left\{F^{-1}\left[\frac{f^2}{c^2}G_u\left(f,\Delta\vec{r}'\right)\exp\left\{j2\pi f\vec{\vartheta}\Delta\vec{r}'/c\right\}\right]\right\} =$$

$$= \frac{0,25}{(2\pi)^2 c^2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d^2R(\tau-\vec{\vartheta}\Delta\vec{r}'/c,\Delta\vec{r}')}{d\tau^2}d\Delta\vec{r}', \quad (66)$$

где F – знак обратного преобразования Фурье (по f).

Интенсивность

$$I(\vec{\vartheta}) = -\frac{0,25}{(2\pi)^2 c^2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d^2R(\tau-\vec{\vartheta}\Delta\vec{r}'/c,\Delta\vec{r}')}{d\tau^2}d\Delta\vec{r}' \quad (67)$$

является результатом интегрирования второй производной вещественной функции когерентности значений полей, принятых элементами раскрыва антенной системы и задержанных на время задержек, соответствующих выравниванию времени запаздывания поля по его наклонному фронту падения относительно плоскости раскрыва. Особенностью этой формулы является отсутствие ограничения пространственно-временной узкополосности (квазимонохроматического приближения). Формула применима для работы со сверхширокополосными сигналами.

Заключение

Предложенные преобразования не являются преобразованиями Фурье, Френеля и Лапласа, а сводятся к ним лишь в частных случаях (при выполнении КМП). Одна из возможных областей применения этих преобразований – это решение уравнений в частных производных, описывающих волновые поля и многомерные динамические процессы. В технических приложениях (в радиоастрономии, спектроскопии, гидроакустике) преобразования V_F, $V_F^{-1}, V_{\Phi 1}, V_{\Phi 1}^{-1}, V_{\Phi 2}, V_{\Phi 2}^{-1}$ могут найти широкое применение при исследовании широкополосных и сверхширокополосных пространственно-временных процессов и систем, в частности, при исследовании свойств и способов формирования изображений различных источников излучений.

Преобразования $V_{FL}, V_{FL}^{-1}, V_{\Phi L}, V_{\Phi L}^{-1}$ могут быть полезны при исследовании динамических пространственно-распределенных систем (тепловых, химических, ядерных, экологических), в частности пространственно-распределенных многомерных систем управления и переходных процессов в них, а также широко- и сверхширополосных систем радиоастрономии и дистанционной спектрометрии, так как по переменной t обладают преимуществами преобразований Лапласа.

Приведенные выше формулы и в, частности, формулы (66), (67), являющиеся строгой математической формализацией соответствующих физических характеристик радиотеплового излучения, позволят ставить и решать вариационные задачи оптимальных оценок не только спектральных яркостей $B\left(f,\vec{\vartheta}\right)$, но и интенсивностей $I(\vec{\vartheta})$ как интегральных (по частотам f) изображений природных объектов и в задачах дистанционного зондирования, и в задачах радиоастрономии, и в задачах дистанционной радиоспектрометрии. Формулу (67) также следует рассматривать как обобщение теоремы Ван Циттера-Цернике, но применительно не к спектральной яркости $B\left(f,\vec{\vartheta}\right)$, а к интенсивности $I(\vec{\vartheta})$. Сформулировать эту теорему можно следующим образом: интенсивность радиотеплового излучения $I(\vec{\vartheta})$ может быть найдена путем интегрирования второй производной вещественной функции когерентности поля, принятого элементами раскрыва антенной системы, и задержанного в них на время задержек, соответствующих выравниванию времени запаздывания поля по его наклонному фронту падения.

Литература

1. Фалькович С.Е. Оптимальный прием пространственно-временных сигналов в радиоканалах с рассеянием / С.Е. Фалькович, В.И. Пономарев, Ю.В. Шкварко. – М.: Радио и связь, 1989. – 542 с.

2. Построение изображений в астрономии по функциям когерентности / под ред. К. ван Схонвелда. – М.: Мир, 1982. – 335 с.

3. Томпсон Р. Интерферометрия и синтез в радиоастрономии / Р. Томпсон, Дж. Моран, Дж. Свенсон. – М.: Мир, 1989. – 668 с.

4. Волосюк В.К. Статистическая теория радиотехнических систем дистанционного зондиро-

вания и радиолокации / В.К. Волосюк, В.Ф. Кравченко. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2008. – 342 с.

5. Волосюк В.К. Преобразование полей и их корреляционных функций в спектральные характеристики протяженных источников широкополосного излучения / В.К. Волосюк // Изв. вузов. Сер. Радиоэлектроника. – 1993. – Т. 36, №6. – С. 27-30.

6. Волосюк В.К. Спектральные преобразования широкополосных полей и их корреляционных характеристик. Приближение Френеля / В.К. Волосюк // Изв. вузов. Сер. Радиоэлектроника. – 1994. – Т. 37, №8. – С. 58-66.

7. Волосюк В.К. Оптимизация оценок параметров поверхностей по их собственному излучению при дистанционном зондировании / В.К. Волосюк // Радиотехника и электроника. – 1995. – Т. 40, №7. – С. 1052-1063.

8. Волосюк В.К. Прямые и обратные преобразования при построении спектральных образов случайных полей / В.К. Волосюк // Автометрия. – 1995. – №1. – С. 39-45.

9. Волосюк В.К. Спектральные преобразования широкополосных полей и их функций когерентности / В.К. Волосюк // Изв. вузов. Сер. Радиофизика. – 1993. – №11. – С. 1061-1063.

10. Волосюк В.К. Теорема о спектральных преобразованиях широкополосных полей и их корреляционных характеристик / В.К. Волосюк // Радиотехника. – 1996. – №3. – С. 74-80.

11. Волосюк В.К. Интегральные преобразования волновых процессов и их спектрально-корреляционных характеристик / В.К. Волосюк // Электромагнитные волны и электронные системы. – 1997. – Т. 2, №6. – С. 4-12.

Поступила в редакцию 17.04.2009

Рецензент: д-р техн. наук, проф., проф. каф. 504 В.В. Лукин, Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского «ХАИ», Харьков.

МАТЕМАТИЧНИЙ АПАРАТ СПЕКТРАЛЬНИХ ПЕРЕТВОРЕНЬ ШИРОКОСМУГОВИХ ТА НАДШИРОКОСМУГОВИХ ПРОСТОРОВО-ЧАСОВИХ СИГНАЛІВ ТА ЇХ ФУНКЦІЙ КОГЕРЕНТНОСТІ

В.К. Волосюк

Розглянуто спектральні перетворення просторово-часових сигналів та їх модифікації, що є узагальненням перетворень Фур'є, Френеля і Лапласа для випадків аналізу та обробки хвильових полів. Перетворення різняться тим, що в них знято обмеження просторово-часової вузькосмуговості. Узагальнена теорема Ван Ціттерта-Церніке, що встановлює зв'язок між функцією когерентності поля в області розкриву антенної системи і спектральною яскравістю протяжного джерела випромінювання. Перетворення можуть бути корисними при дослідженні динамічних просторово-розподілених систем, зокрема, просторово-розподілених багатовимірних систем керування та перехідних процесів в них, а також широко- та над широкосмугових систем радіоастрономії та дистанційної радіоспектрометрії.

Ключові слова: узагальнення, спектральні перетворення, обмеження просторово-часової вузькосмуговості, хвильові поля, просторово-часові сигнали, функція когерентності, теорема Ван Циттерта-Цернике.

MATHEMATICAL APPARATUS OF SPECTRAL TRANSFORMATIONS OF BROADBEND AND SUPERBROADBAND SPAYIO-TEMPORAL SIGNALS AND THEIR FUNCTIONS OF COHERENS

V.K. Volosyuk

Spectral transformations of spatio-temporal signals and their modifications, that are generalization of Fourier, Fresnel and Laplace transforms for the case of wave fields analysis and processing, are analysed. The characteristic feature of these transforms is removing of the spatiotemporal band-limitedness restriction. The Van Cittert-Zernike theorem, that expresses the connection between a field coherency function on antenna system aperture and spectral radiance of extended emission source, is generalized. Proposed transformations can be used for dynamic spatially-distributed systems analysis (particularly, for spatially-distributed multidimensional control systems and transient processes in them) as well as for wideband and superwideband radioastronomic and remote radiospectrometric systems.

Key words: generalization, spectral transform, constraint of spatio-temporal bandlimitedness, wave fields, spatio-temporal signals, coherence function, theorem by Van Cittert-Cernike.

Волосюк Валерий Константинович – д-р техн. наук, профессор, профессор каф. 501, Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского «Харьковский авиационный институт», Харьков, Украина.