УДК 519.6+51

В. А. РВАЧЕВ, Т. В. РВАЧЕВА, Е. П. ТОМИЛОВА

Национальный аэрокосмический университет им. Н. Е. Жуковского «ХАИ», Украина

БИРКГОФФОВА ИНТЕРПОЛЯЦИЯ ПОЛИНОМИАЛЬНЫМИ СПЛАЙНАМИ ЧЕТВЕРТОЙ СТЕПЕНИ

Предложен метод интерполяции полиномиальными сплайнами четвертой степени на равномерной сетке, при котором значения функции и ее первой производной интерполируются в целых точках, а узлы интерполяции значений каждой следующей производной расположены в два раза гуще, чем предыдущей. Интерполяцию такого типа принято называть биркгоффовой интерполяцией. Предложенные для интерполяции базисные сплайны построены на основе так называемого совершенного сплайна $\sigma_4(x)$ *и имеют компактный носитель. Показан метод построения базисных сплайнов и приведены явные формулы для них.*

Ключевые слова: *биркгоффова интерполяция, базисные сплайны, узлы интерполяции, интерполяционный полином, обобщенный ряд Тейлора.*

Введение

В настоящей статье предлагается метод интерполяции полиномиальными сплайнами четвертой степени на равномерной сетке, в котором значения функции и ее первой производной интерполируются в целых точках, значения второй производной – в точках вида $k/2$, третьей производной – в точках $k/4,\ k\in\mathbb{Z}$. Интерполяцию такого типа, в которой узлов интерполяции значений производных больше, чем узлов интерполяции самой функции, принято называть биркгоффовой интерполяцией. Подобная интерполяция используется, например, в области компьютерной томографии; в частности, в [1] предлагается новый ядерный метод алгебраического восстановления медицинского изображения с рассеянных данных Радона; при этом восстановление основано на обобщенной интерполяции Эрмита-Биркгоффа положительно определенными ядерными функциями в сочетании с удобной регуляризацией преобразования Радона. Предложенный в [2] метод восстановления формы поверхности объекта также базируется на интерполяции Эрмита-Биркгоффа с привлечением так называемых радиально-базисных функций.

Для дальнейшего изложения нам будет удобно привести некоторые сведения об обобщенных рядах Тейлора, предложенных В. А. Рвачевым в [3, 4] и исследованных в [5, 6]. В [3, 4] показано, что если функция f принадлежит классу H_ρ, где $\rho\in[1;2)$, т. е. если $f\in C^\infty[-1,1]$ и

$$\exists\rho\in[1,2):\|f^{(k)}\|_{C[-1,1]}\le c(f)\rho^k 2^{\frac{k(k+1)}{2}},\quad k=0,1,2,\ldots,$$

то f раскладывается в так называемый обобщенный ряд Тейлора:

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k\in N_n} f^{(n)}(x_{n,k})\varphi_{n,k}(x), \tag{1}$$

где:

$$N_n=\{-2^{n-1},-2^{n-1}+1,\ldots,2^{n-1}-1,2^{n-1}\},\ n\ne 0;$$

$$N_0=\{-1,0,1\};$$

$$x_{n,k}=\frac{k}{2^{n-1}},\ n\ne 0,\ k\in N_n;\ x_{o,k}=k,\ k\in N_0,$$

а функции $\varphi_{n,k}(x)\in H_1$ – базисные функции обобщенного ряда Тейлора – однозначно определяются из условий:

$$(\varphi_{n,k}(x_{m,s}))^{(m)}=\delta_n^m\delta_s^k$$

и являются конечными линейными комбинациями сдвигов функции

$$\mathrm{up}(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{itx}\prod_{k=1}^{\infty}\frac{\sin t2^{-k}}{t2^{-k}}dt$$

– решения с компактным носителем ФДУ

$$y'(x)=2y(2x+1)-2y(2x-1).$$

Функции $\varphi_{n,k}(x)$ играют ту же роль, что и функции x^n в обычных рядах Тейлора.

Точка $x_{n,k}$ называется собственной точкой функции $\varphi_{n,k}(x)$.

Удобно обозначать базисные функции $\varphi_{n,k}$ так, чтобы сразу была видна собственная точка функции: пусть

$$\hat{\varphi}_{n,x_{n,k}}(x)=\varphi_{n,k}(x).$$

Построение базисных функций $\hat{\varphi}_{n,x_{n,k}}(x)$ было проведено в [7]; там же получены асимптотические формулы для этих функций.

Класс H_ρ можно рассматривать и на всей оси $\mathbb{R}$. Обозначим его $H_\rho(\mathbb{R})$. Тогда для $f \in H_\rho(\mathbb{R})$, $\rho \in [1;2)$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{x_{n.k} \in X_n(\mathbb{R})} f^{(n)}(x_{n,k}) \hat{\varphi}_{n,x_{n,k}}(x),$$

где

$$X_0(\mathbb{R}) = \{x_{o,k} = k, k \in \mathbb{Z}\},$$

$$X_n(\mathbb{R}) = \{x_{n,k} = \frac{k}{2^{n-1}}, k \in \mathbb{Z}\},\ n > 0.$$

Заметим, что в этом случае при $x_{n,k} \notin (-1,1)$ всегда найдется целое число m такое, что

$$x_{n,k} - m \in (-1,1),$$

и тогда функция $\hat{\varphi}_{n,x_{n,k}}(x)$ строится следующим образом:

$$\hat{\varphi}_{n,x_{n,k}}(x) = \hat{\varphi}_{n,x_{n,k}-m}(x-m).$$

При этом исходные функции $\hat{\varphi}_{n,x_{n,k}}(x)$, собственные точки которых принадлежат $(-1,1)$, ранее определенные для ряда (1), всюду вне $(-1,1)$ доопределим нулем.

Построение сплайнов четвертой степени на основе функции $\sigma_4(x)$

Предлагаемый в настоящей работе интерполяционный полином bi_f для функции f, определенной на отрезке $[a,b]$, будет иметь вид:

$$bi_f = \sum_{n=0}^{3} \sum_{x_{n,k} \in [a,b] \cap X_n(\mathbb{R})} f^{(n)}(x_{n,k}) basp_{n,x_{n,k}}(x), \quad (2)$$

где $X_0(\mathbb{R})$, $X_n(\mathbb{R})$ определены выше, а $basp_{n,x_{n,k}}(x)$ - так называемые базисные сплайны – фиксированные (не зависящие от интерполируемой функции) сплайны четвертой степени с компактным носителем. В частности, для функции, определенной на $[-1,1]$, он будет иметь вид:

$$bi_f = \sum_{n=0}^{3} \sum_{k \in N_n} f^{(n)}(x_{n,k}) basp_{n,x_{n,k}}(x). \quad (3)$$

Для построения базисных сплайнов $basp_{n,x_{n,k}}(x)$, $k \in N_n$, $n = 0,1,2,3$ нам понадобится совершенный сплайн $\sigma_4(x)$, введенный в [8].

Функция $\sigma_4(x)$ имеет вид:

$$\sigma_4(x) = \begin{cases} \frac{64}{3}(x+1)^4, \quad x \in [-1;-\frac{7}{8}]; \\ \frac{158}{192} + x + 4(x+\frac{3}{4})^2 - \frac{64}{3}(x+\frac{3}{4})^4, \\ \quad x \in [-\frac{7}{8};-\frac{5}{8}], \\ \frac{64}{3}(x+\frac{1}{2})^4 + 2(x+\frac{5}{8}) + \frac{1}{4}, x \in [-\frac{5}{8};-\frac{1}{2}], \\ -\frac{64}{3}(x+\frac{1}{2})^4 + 2(x+\frac{1}{2}) + \frac{1}{2}, x \in [-\frac{1}{2};-\frac{3}{8}], \\ \frac{64}{3}(x+\frac{1}{4})^4 - 4(x+\frac{1}{4})^2 + x + \frac{113}{96}, \\ \quad x \in [-\frac{3}{8};-\frac{1}{8}], \\ 1 - \frac{64}{3}x^4, \quad x \in [-\frac{1}{8};0]. \end{cases}$$

Эта функция четная, равна 0 вне [-1,1].

Для построения базисных сплайнов на основе $\sigma_4(x)$ воспользуемся способом, предложенным в [7], для построения базисных функций обобщенного ряда Тейлора из функции $up(x)$. А именно, можно показать, что базисные сплайны $basp_{n,0}$ («отвечающие» за точку 0), строятся следующим образом:

$$basp_{0,0}(x) = \sigma_4(x);$$

$$basp_{n,0}(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k \sigma_4(x - 1 + \frac{1}{2^{n-k}}),\ x \in [-1,0],$$

где c_k однозначно определяются из системы

$$\begin{cases} c_n\sigma_4(0) + c_{n-1}\sigma_4(-1+\frac{1}{2}) + \cdots + c_0\sigma_4(-1+\frac{1}{2^n}) = 0, \\ c_{n-1}\sigma'_4(-1+\frac{1}{2}) + \cdots + c_0\sigma'_4(-1+\frac{1}{2^n}) = 0, \\ \ldots \\ c_1\sigma_4^{(n-1)}(-1+\frac{1}{2^{n-1}}) + c_0\sigma_4^{(n-1)}(-1+\frac{1}{2^n}) = 0, \\ c_0\sigma_4^{(n)}(-1+\frac{1}{2^n}) = 1 \end{cases}$$

На отрезок $[0,1]$ сплайны $basp_{n,0}(x)$ с четными n продолжаем четным образом, с нечетными n – нечетным.

Сплайны $basp_{n,-1}(x)$, $basp_{n,1}(x)$ имеют вид:

$$basp_{n,-1}(x) = basp_{n,0}(x+1),$$

$$basp_{n,1}(x) = basp_{n,o}(x-1).$$

После этого базисные сплайны,

$$basp_{n,x_{n,k}}(x),\ x_{n,k} = \frac{k}{2^{n-1}} = \frac{p}{2^m} \neq 0,$$

где дробь $\frac{p}{2^m}$, $m \geq 1$ несократимая, строим по индукции следующим образом:

$$\mathrm{basp}_{n,x_{n,k}}(x)=\mathrm{basp}_{n,0}\left(x-\frac{k}{2^{n-1}}\right)-$$
$$-[\mathrm{basp}_{n,0}\left(-1-\frac{k}{2^{n-1}}\right)\mathrm{basp}_{0,-1}(x)+$$
$$+\mathrm{basp}_{n,0}\left(-\frac{k}{2^{n-1}}\right)\mathrm{basp}_{0,0}(x)+$$
$$+\mathrm{basp}_{n,0}\left(1-\frac{k}{2^{n-1}}\right)\mathrm{basp}_{0,1}(x)]-$$
$$-\sum_{j=2}^{m+1}\frac{1}{2^{j(j-1)/2}}\sum_{l=-2^{j-2}}^{2^{j-2}}\mathrm{basp}_{n,0}^{(j-1)}\left(\frac{1}{2^{j-2}}-\frac{k}{2^{n-1}}\right)\cdot$$
$$\cdot\mathrm{basp}_{j-1,\frac{1}{2^{j-2}}}(x).$$

Построенные таким образом сплайны $\mathrm{basp}_{n,x_{n,k}}(x),\ k\in N_n,\ n=0,1,2,3$ имеют вид:

$\mathrm{basp}_{0,0}(x)=\sigma_4(x)$,

$\mathrm{basp}_{0,-1}(x)=\sigma_4(x+1)$,

$\mathrm{basp}_{0,1}(x)=\sigma_4(x-1)$,

$$\mathrm{basp}_{1,0}(x)=-\frac{1}{4}\mathrm{basp}_{0,0}(x)+\frac{1}{2}\mathrm{basp}_{0,0}(x-\frac{1}{2}),\ x\in[-1,0]$$

на $[0,1]$ отражаем нечетно.

$\mathrm{basp}_{1,-1}(x)=\mathrm{basp}_{1,0}(x+1)$,

$\mathrm{basp}_{1,1}(x)=\mathrm{basp}_{1,0}(x-1)$,

$$\mathrm{basp}_{2,0}(x)=\frac{17}{768}\mathrm{basp}_{0,0}(x)-\frac{1}{16}\mathrm{basp}_{0,0}(x-\frac{1}{2})+$$
$$+\frac{1}{8}\mathrm{basp}_{0,0}(x-\frac{3}{4}),\ \ x\in[-1,0],$$

на $[0,1]$ отражаем четно.

$\mathrm{basp}_{2,-1}(x)=\mathrm{basp}_{2,0}(x+1)$,

$\mathrm{basp}_{2,1}(x)=\mathrm{basp}_{2,0}(x-1)$,

$$\mathrm{basp}_{2,-\frac{1}{2}}(x)=\mathrm{basp}_{2,0}(x+\frac{1}{2})-\frac{17}{1536}\mathrm{basp}_{0,-1}(x)-$$
$$-\frac{17}{1536}\mathrm{basp}_{0,0}(x)-\frac{17}{384}\mathrm{basp}_{1,-1}(x)+\frac{17}{384}\mathrm{basp}_{1,0}(x),$$

$\mathrm{basp}_{2,\frac{1}{2}}(x)=\mathrm{basp}_{2,-\frac{1}{2}}(-x)$,

$$\mathrm{basp}_{3,0}(x)=-\frac{5}{6144}\mathrm{basp}_{0,0}(x)+\frac{1}{384}\mathrm{basp}_{0,0}(x-\frac{1}{2})-$$
$$-\frac{1}{128}\mathrm{basp}_{0,0}(x-\frac{3}{4})+\frac{1}{64}\mathrm{basp}_{0,0}(x-\frac{7}{8}),\ \ x\in[-1,0],$$

на $[0,1]$ отражаем нечетно.

$\mathrm{basp}_{3,-1}(x)=\mathrm{basp}_{3,0}(x+1)$, $\mathrm{basp}_{3,1}(x)=\mathrm{basp}_{3,0}(x-1)$,

$$\mathrm{basp}_{3,-\frac{1}{2}}(x)=\mathrm{basp}_{3,0}(x+\frac{1}{2})+\frac{5}{3\cdot 2^{12}}\mathrm{basp}_{0,-1}(x)-$$
$$-\frac{5}{3\cdot 2^{12}}\mathrm{basp}_{0,0}(x)+\frac{5}{3\cdot 2^{10}}\mathrm{basp}_{1,-1}(x)+\frac{5}{3\cdot 2^{10}}\mathrm{basp}_{1,0}(x),$$

$\mathrm{basp}_{3,\frac{1}{2}}(x)=\mathrm{basp}_{3,-\frac{1}{2}}(x-1)$,

$$\mathrm{basp}_{3,-\frac{1}{4}}(x)=\mathrm{basp}_{3,0}(x+\frac{1}{4})+\frac{35}{3\cdot 96\cdot 2^{11}}\mathrm{basp}_{0,-1}(x)-$$
$$-\frac{333}{3\cdot 96\cdot 2^{11}}\mathrm{basp}_{0,0}(x)+\frac{5}{3\cdot 2^{11}}\mathrm{basp}_{1,-1}(x)-$$
$$-\frac{11}{3\cdot 2^{11}}\mathrm{basp}_{1,0}(x)+\frac{5}{3\cdot 2^{8}}\mathrm{basp}_{2,-1}(x)-\frac{7}{2^8}\mathrm{basp}_{2,-\frac{1}{2}}(x)+$$
$$+\frac{7}{2^8}\mathrm{basp}_{2,0}(x)-\frac{5}{3\cdot 2^{8}}\mathrm{basp}_{2,\frac{1}{2}}(x),$$

$\mathrm{basp}_{3,\frac{3}{4}}(x)=\mathrm{basp}_{3,-\frac{1}{4}}(x-1)$, $\mathrm{basp}_{3,\frac{1}{4}}(x)=-\mathrm{basp}_{3,-\frac{1}{4}}(-x)$,

$\mathrm{basp}_{3,-\frac{3}{4}}(x)=-\mathrm{basp}_{3,\frac{3}{4}}(-x)$..

Для интерполирования функции, заданной на произвольном отрезке $[a,b]$ требуемые в (2) базисные сплайны получаем из построенных выше следующим образом: при $x_{n,k}\notin(-1,1)$

$$\mathrm{basp}_{n,x_{n,k}}(x)=\mathrm{basp}_{n,x_{n,k}-m}(x-m),$$

где m – целое число, такое, что $x_{n,k}-m\in(-1,1)$.

Явные формулы для базисных сплайнов четвертой степени.

Приведем явные формулы для базисных сплайнов $\mathrm{basp}_{n,x_{n,k}}(x),\ k\in N_n,\ n=0,1,2,3$.

$\mathrm{basp}_{0,0}(x)=\sigma_4(x)$, $\mathrm{basp}_{0,-1}(x)=\mathrm{basp}_{0,0}(x+1)$,

$\mathrm{basp}_{0,1}(x)=\mathrm{basp}_{0,0}(x-1)$,

$$\mathrm{basp}_{1,0}(x)=\begin{cases}-\frac{16}{3}(x+1)^4,\quad x\in[-1;-\frac{7}{8}];\\ \frac{64}{12}(x+\frac{3}{4})^4-(x+\frac{3}{4})^2-\frac{x}{4}-\frac{79}{384},\\ \quad x\in[-\frac{7}{8};-\frac{5}{8}],\\ -\frac{64}{12}(x+\frac{1}{2})^4-\frac{1}{2}(x+\frac{5}{8})-\frac{1}{16},\\ \quad x\in[-\frac{5}{8};-\frac{1}{2}],\\ \frac{1}{8}(128x^4+256x^3+192x^2+\\ \quad +60x+5),\quad x\in[-\frac{1}{2};-\frac{3}{8}],\\ -\frac{1}{128}(2048x^4+2048x^3+384x^2-\\ \quad -96x+1),\quad x\in[-\frac{3}{8};-\frac{1}{8}],\\ 16x^4+x,\quad x\in[-\frac{1}{8};0].\end{cases}$$

Нечетная; равна 0 вне [-1,1].

$\mathrm{basp}_{1,-1}(x)=\mathrm{basp}_{1,0}(x+1)$, $\mathrm{basp}_{1,1}(x)=\mathrm{basp}_{1,0}(x-1)$,

$$\mathrm{basp}_{2,0}(x)=\begin{cases}\frac{17}{36}(x+1)^4,\ x\in[-1;-\frac{7}{8}];\\ \frac{17}{768}(-\frac{64}{3}(x+\frac{3}{4})^4+4(x+\frac{3}{4})^2+x+\frac{79}{96}),\\ x\in[-\frac{7}{8};-\frac{5}{8}],\\ \frac{17}{768}(\frac{64}{3}(x+\frac{1}{2})^4+2(x+\frac{5}{8})+\frac{1}{4}),\\ x\in[-\frac{5}{8};-\frac{1}{2}],\\ -\frac{1}{4608}(8320x^4+16640x^3+12480x^2+\\ +3956x+367),\ x\in[-\frac{1}{2};-\frac{3}{8}],\\ \frac{1}{73728}(133120x^4+133120x^3+\\ +24960x^2-7136x-607),\ x\in[-\frac{3}{8};-\frac{1}{4}],\\ \frac{1}{73728}(329728x^4+329728x^3+\\ +98688x^2+5152x+161),\ x\in[-\frac{1}{4};-\frac{1}{8}],\\ -\frac{1}{36}(161x^4-18x^2),\quad x\in[-\frac{1}{8};0].\end{cases}$$

Вне [-1,1] равна нулю; четная.

$\mathrm{basp}_{2,-1}(x)=\mathrm{basp}_{2,0}(x+1)$, $\mathrm{basp}_{2,1}(x)=\mathrm{basp}_{2,0}(x-1)$,

$$\mathrm{basp}_{2,-\frac{1}{2}}(x)=\begin{cases}-\frac{1}{18}(41x^4+164x^3+246x^2+164x+\\ \quad +41),\quad x\in[-1;-\frac{7}{8}];\\ \frac{1}{1536}(2048x^4+6144x^3+6528x^2+\\ \quad +2784x+353),\quad x\in[-\frac{7}{8};-\frac{3}{4}],\\ \frac{1}{1536}(6144x^4+18432x^3+20352x^2+\\ \quad +9696x+1649),\quad x\in[-\frac{3}{4};-\frac{5}{8}],\\ -\frac{1}{768}(3072x^4+6144x^3+4224x^2+\\ \quad +1152x+113),\quad x\in[-\frac{5}{8};-\frac{3}{8}],\\ \frac{1}{1536}(6144x^4+6144x^3+1920x^2+\\ \quad +288x+17),\quad x\in[-\frac{3}{8};-\frac{1}{4}],\\ \frac{1}{1536}(2048x^4+2048x^3+384x^2+\\ \quad +32x+1),\quad x\in[-\frac{1}{4};-\frac{1}{8}],\\ -\frac{4}{3}x^4,\quad x\in[-\frac{1}{8};0].\end{cases}$$

Вне [-1,0] равна нулю.

$$\mathrm{basp}_{3,0}(x)=\begin{cases}-\frac{5}{288}(x+1)^4,\quad x\in[-1;-\frac{7}{8}];\\ \frac{1}{589824}(10240x^4+30720x^3+32640x^2+\\ \quad +13920x+1765),\quad x\in[-\frac{7}{8};-\frac{5}{8}],\\ -\frac{1}{36864}(640x^4+1280x^3+960x^2+\\ \quad +380x+85),\quad x\in[-\frac{5}{8};-\frac{1}{2}],\\ \frac{1}{12288}(896x^4+1792x^3+1344x^2+\\ \quad +428x+41),\quad x\in[-\frac{1}{2};-\frac{3}{8}],\\ -\frac{1}{196608}(14336x^4+14336x^3+2688x^2-\\ \quad -800x-89),\quad x\in[-\frac{3}{8};-\frac{1}{4}],\\ -\frac{1}{196608}(47104x^4+47104x^3+\\ \quad +14976x^2+1248x+39),\ x\in[-\frac{1}{4};-\frac{1}{8}],\\ \frac{1}{96}(55x^4+16x^3),\quad x\in[-\frac{1}{8};0].\end{cases}$$

Нечетная, равна нулю вне отрезка [-1;1].

$$\mathrm{basp}_{3,-\frac{1}{2}}(x)=\begin{cases}\frac{1}{48}(x+1)^4,\ x\in[-1;-\frac{7}{8}];\\ -\frac{1}{98304}(2048x^4+6144x^3+6528x^2+\\ \quad +2784x+353),\ x\in[-\frac{7}{8};-\frac{3}{4}],\\ -\frac{1}{98304}(18432x^4+55296x^3+61824x^2+\\ \quad +30432x+5537),\ x\in[-\frac{3}{4};-\frac{5}{8}],\\ \frac{1}{3072}(1600x^4+3712x^3+3168x^2+\\ \quad +1174x+159),\ x\in[-\frac{5}{8};-\frac{1}{2}],\\ -\frac{1}{3072}(1600x^4+2688x^3+1632x^2+\\ \quad +426x+41),\quad x\in[-\frac{1}{2};-\frac{3}{8}],\\ \frac{1}{98304}(18432x^4+18432x^3+6528x^2-\\ \quad -1056x+65),\ x\in[-\frac{3}{8};-\frac{1}{4}],\\ \frac{1}{98304}(2048x^4+2048x^3+384x^2+\\ \quad +32x+1),\ x\in[-\frac{1}{4};-\frac{1}{8}],\\ -\frac{x^4}{48},\ x\in[-\frac{1}{8};0].\end{cases}$$

Равна нулю вне отрезка [-1;0].

$$\mathrm{basp}_{3,\frac{1}{2}}(x) = \mathrm{basp}_{3,-\frac{1}{2}}(x-1),$$

$$\mathrm{basp}_{3,-\frac{1}{4}}(x) = \begin{cases} \frac{1}{48}(x+1)^4, \quad x \in [-1;-\frac{7}{8}]; \\ -\frac{1}{98304}(2048x^4 + 6144x^3 + 6528x^2 + \\ \quad +2784x + 353), \quad x \in [-\frac{7}{8};-\frac{5}{8}], \\ \frac{1}{6144}(128x^4 + 256x^3 + 192x^2 + \\ \quad +76x + 17), \quad x \in [-\frac{5}{8};-\frac{1}{2}], \\ -\frac{1}{2048}(384x^4 + 768x^3 + 576x^2 + 188x + \\ \quad +21), \quad x \in [-\frac{1}{2};-\frac{3}{8}], \\ \frac{1}{98304}(51200x^4 + 67584x^3 + 31104x^2 + \\ \quad +5664x + 369), \quad x \in [-\frac{3}{8};-\frac{1}{4}], \\ -\frac{1}{98304}(47104x^4 + 30720x^3 + 5760x^2 + \\ \quad +480x + 15), \quad x \in [-\frac{1}{4};-\frac{1}{8}], \\ \frac{7}{48}x^4, \quad x \in [-\frac{1}{8};0]. \end{cases}$$

Равна 0 вне [-1;0].

$$\mathrm{basp}_{3,\frac{3}{4}}(x) = \mathrm{basp}_{3,-\frac{1}{4}}(x-1),$$

$$\mathrm{basp}_{3,\frac{1}{4}}(x) = -\mathrm{basp}_{3,-\frac{1}{4}}(-x),$$

$$\mathrm{basp}_{3,-\frac{3}{4}}(x) = -\mathrm{basp}_{3,\frac{3}{4}}(-x).$$

Заключение

Предложен метод интерполяции полиномиальными сплайнами четвертой степени на равномерной сетке, при котором значения функции и ее первой производной интерполируются в целых точках, а узлы интерполяции значений каждой следующей производной расположены в два раза гуще, чем предыдущей. Метод интерполяции такого типа, который в настоящее время находит широкое применение [9]-[19], принято называть биркгоффовой интерполяцией. Биркгоффова интерполяция кубическими сплайнами, построенными на базе совершенного сплайна $\sigma_3(x)$, была рассмотрена в [19]. Интерполяционный полином, предложенный в настоящей статье, подобен отрезку обобщенного ряда Тейлора, в котором на месте базисных функций $\varphi_{n,k}(x)$ находятся базисные сплайны, которые построены на основе так называемого совершенного сплайна $\sigma_4(x)$ и имеют компактный носитель. Показан метод построения базисных сплайнов и приведены явные формулы для них.

Литература

1. De Marchi, S. Algebraic Medical Image Reconstruction from Scattered Radon Data by Positive Definite Kernels [Text] / S. De Marchi, A. Iske, A. Sironi // Hamburger Beitrage zur Angewandten Mathematik. – 2012. – Nr. 2012-08. – P. 1-14.

2. Lowitzsch, S. Shape reconstruction of 3d-objects from noisy slope data [Electronic resource] / S. Lowitzsch, J. Kaminski, G. Häusler. – URL: http://www.dgao-proceedings.de/download/106/106_a22.pdf. – 2005.

3. Рвачев, В. А. Обобщенные ряды Тейлора для бесконечно дифференцируемых функций [Текст] / В. А. Рвачев // Мат. методы анализа динамических систем. – 1982. – Вып.6. – С. 99–102.

4. Рвачев, В.А. Финитные решения функционально-дифференциальных уравнений и их применение [Текст] / В. А. Рвачев // Успехи мат. наук. – 1990. – Т. 45, Вып. 1 (271). – С. 77–103.

5. Rvachova, T. V. On a relation between the coefficients and the sum of the generalized Taylor series [Text] / T. V Rvachova // Matematicheskaya fizika, analiz, geometriya. – 2003. – Vol. 10, No 2. – P. 262 – 268.

6. Рвачева, Т. В. О скорости приближения бесконечно дифференцируемых функций частичными суммами обобщенного ряда Тейлора [Текст] / Т. В. Рвачева // Вісник ХНУ, сер. «Математика, прикладна математика і механіка». – 2010. – № 931. – С. 93–98.

7. Рвачева, Т.В. Об асимптотике базисных функций обобщенного ряда Тейлора [Текст] / Т.В. Рвачева // Вісник ХНУ, сер. «Математика, прикладна математика і механіка» – 2003. – № 602. – С.94–104.

8. Рвачев, В. А. Некоторые финитные функции и их применения [Текст] / В. А. Рвачев // Математическая фізика. – 1973. – № 13. – С. 139–149.

9. Branga, A. Natural splines of Birkhoff type and optimal approximation [Text] / A. Branga // Journal of Computational Analysis and Applications – 2005. – Vol. 7, No 1. – P. 81–88.

10. Acu Ana Maria .Natural splines of Birkhoff type approximating the solution of differential equations [Text] /Ana Maria Acu // General Mathematics. – 2010. – Vol. 18, No 1. – P. 3–17.

11. Birou, M. Biermann interpolation of Birkhoff type [Text] /M. Birou // Rev. Anal. Numer. Theor. Approx. – 2005. – Vol. 34, No 1. – P. 37–45.

12. Singh, K. Using a Quartic Spline Function for Certain Birkhoff Interpolation Problem [Text] / K. Singh, A. K. Pandey // International Journal of Computer Applications. – 2014. – Vol. 99, No 3. – P. 348–50.

13. Pandey, A. K. Solution of a Birkhoff Interpolation Problem by a Special Spline Function [Text] / A. K. Pandey, K.B. Singh, Q. S. Ahmad // International Journal of Computer Applications – 2012. – Vol. 48, No 9. – P. 22-27.

14. Hierarchical ownership and deterministic watermarking of digital images via polynomial interpolation [Text] / G. Boato, F.G.B. De Natale, C. Fontanari, F. Melgani // Signal Processing: Image Communication. – 2006. – № 21. – С. 573–585.

15. Wu, Z. Hermite-Birkhoff interpolation for scattered data by radial basis function [Text] / Z. Wu // Approximation Theory and its Applications. – 1992. – Vol. 8, Iss. 2. – P. 1-10.

16. Niculescu, I. Computing the Codimension of the Singularity at the Origin for Delay Systems: The Missing Link with Birkhoff Incidence Matrices [Text] / Islam Boussaada Silviu-Iulian Niculescu // 21st International Symposium on Mathematical Theory of Networks and Systems, July 7-11, 2014. Groningen, The Netherlands – 2004. – P. 1699-1706.

17. Fourth Order Schemes for Time-Harmonic Wave Equations with Discontinuous Coefficients [Text] / G. Baruch, G. Fibich, S. Tsynkov, E. Turkel // Communications in Computational Physics. – 2009. – Vol. 5, No. 2-4. – P. 442-455.

18. Lenard, M. Pal-type Interpolation and Quadrature Formulae on Laguerre Abscissas [Text] / M. Lenard // Mathematica Pannonica. – 2004. – No 15/2. – P. 265-274.

19. Baruch, G. High-order numerical method for the nonlinear Helmholtz equation with material discontinuities in one space dimension [Text] / G. Baruch, G. Fibich, S. Tsynkov // Journal of Computational Physics – 2007. – No 227. – P. 820–850.

20. Рвачева, Т. В. Биркгоффова интерполяция кубическими сплайнами [Текст] / Т. В. Рвачева, Е. П. Томилова // Вопросы проектирования и производства летательных аппаратов : сб. науч. тр. Нац. аэрокосм. ун-та «ХАИ». – 2008. – Вып. 5 (56). – С. 146–149.

Поступила в редакцию 10.02.2015, рассмотрена на редколлегии 20.03.2015

БІРКГОФОВА ІНТЕРПОЛЯЦІЯ ПОЛІНОМІАЛЬНИМИ СПЛАЙНАМИ ЧЕТВЕРТОГО СТУПЕНЯ

В. О. Рвачов, Т. В. Рвачова, Є. П. Томілова

Запропоновано метод інтерполяції поліноміальними сплайнами четвертого ступеня на рівномірній сітці, у якому значення самої функції та її першої похідної інтерполюються в цілих точках, а вузли інтерполяції значень кожної наступної похідної розташовані вдвічі густіше, ніж попередньої. Інтерполяцію такого типу звичайно називають біркгофовою інтерполяцією. Запропоновані для інтерполяції базисні сплайни побудовано на основі так званого досконалого сплайна $\sigma_4(x)$ і мають компактний носій. У статті вказано метод побудови базисних сплайнів та наведено явні формули для них.

Ключові слова: біркгофова інтерполяція, базисні сплайни, вузли інтерполяції, інтерполяційний поліном, узагальнений ряд Тейлора.

BIRKHOFF INTERPOLATION WITH POLINOMIAL SPLINES OF FOURTH DEGREE

V. O. Rvachov, T. V. Rvachova, Ye. P. Tomilova

A new method is proposed for function interpolation using 4-th order polynomial splines on a regular mesh with the following conditions: function and its first derivative can be interpolated in integer points and interpolation points for the subsequent higher order derivatives are placed twice as frequent as for the previous order. Such interpolation is usually called a Birkhoff interolation. For the interpolation we use basis splines with a compact support based on perfect spline $\sigma_4(x)$. Method of constructing of the bases splines and the direct formulas are shown in this article.

Key words:. Birkhoff interolation, basis splines, interpolation points, interpolation polynomial, generalized Taylor series.

Рвачев Владимир Алексеевич – д-р физ.-мат. наук, проф., гл. науч. сотр. кафедры высшей математики и системного анализа, Национальный аэрокосмический университет им. Н. Е. Жуковского «Харьковский авиационный институт», Харьков, Украина, e-mail: rvachov@gmail.com.

Рвачева Татьяна Владимировна – канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры высшей математики и системного анализа, Национальный аэрокосмический университет им. Н. Е. Жуковского «Харьковский авиационный институт», Харьков, Украина, e-mail: rvachova@gmail.com.

Томилова Евгения Павловна – старший преподаватель кафедры высшей математики и системного анализа, Национальный аэрокосмический университет им. Н. Е. Жуковского «Харьковский авиационный институт», Харьков, Украина, e-mail: tomilova.evgenia@gmail.com.