УДК 517.55:519.8 **doi: 10.32620/reks.2020.1.10**

О. М. ПРОХОРОВА

Национальный аэрокосмический университет им. Н. Е. Жуковского «ХАИ», Украина

Ж.-Л. ЛАГРАНЖ КАК ОДИН ИЗ ОСНОВОПОЛОЖНИКОВ ТЕОРИИ ЭКСТРЕМУМОВ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

В статье впервые проведен подробный анализ результатов, полученных Ж.-Л. Лагранжем в его первой печатной работе. Теория экстремумов функций многих переменных, как часть математического анализа, относится к математическим основам исследования операций. В свою очередь, многие задачи оптимизации являются фактически задачами на условный экстремум функции многих переменных. Актуальность данной темы определяется тем, что методы решения задач на экстремум функции многих переменных, полученные в середине 18 – начале 20 веков, применяются при решении современных задач. Особое место здесь занимают Л. Эйлер и Ж.-Л. Лагранж. Целью статьи является исследование условий максимума и минимума функций многих переменных, полученных Ж.-Л. Лагранжем, и сравнение его результатов с изложением данной тематики в современных учебниках по высшей математике и математическому анализу. Установлено, что в своей первой печатной работе он впервые сформулировал и доказал достаточные условия существования экстремума функции многих переменных фактически установив критерий положительной (отрицательной) определенности квадратичных форм, задолго до его появления у Дж. Сильвестра в середине 19 века. Проведен сравнительный анализ результатов Л. Эйлера и Ж.-Л. Лагранжа. Выяснено, что достаточные условия существования экстремума функций многих переменных, полученные в первой печатной работе молодого Лагранжа, входят во все современные учебники фактически в том же виде. Показаны приведенные примеры, иллюстрирующие изложенную им теорию. Это задачи геометрического и физического содержания. Подробно рассмотрены частные случаи: функции двух и трех переменных. Отмечено, что эта статья стала программной для юного Лагранжа, хотя и осталась незамеченной его современниками. В дальнейшем, основываясь на полученном им методе, он создал вариационное исчисление, используя принцип наименьшего действия и теорию экстремумов, вывел основные законы механики, правило множителей для нахождения условного экстремума функций многих переменных, носящее теперь его имя.

Ключевые слова: *оптимизация; экстремум функции многих переменных; необходимое и достаточное условия экстремума функции многих переменных; точки экстремума; точки максимума и минимума.*

Введение

В настоящее время для решения задач оптимизации технического и экономического содержания используются алгоритмы, связанные с нахождением экстремумов функций нескольких переменных [1, 2]. Например, нахождение минимума для отыскания функции цели [3]

$$F(x) = \frac{1}{p}\sum_{\mu=1}^{p} \min_{j} \sum_{i=1}^{3} \left(s_{\mu i} - x_j\right)^2 \to \min_{x}.$$

Теория экстремумов функций многих переменных, как часть математического анализа, относится к математическим основам исследования операций. В общем виде задачу математического программирования можно записать, как известно, следующим образом: максимизировать целевую функцию $f(x_1, \ldots, x_n)$ на допустимом множестве G, где G задается системой

$$g_i(x_1, \ldots, x_n) \ge 0, \quad i = 1, \ldots, m, (x_1, \ldots, x_n) \in X,$$

где X – некоторое подмножество $\mathbb{R}^n$. Таким образом, многие задачи оптимизации являются фактически задачами на условный экстремум функции многих переменных.

Актуальность данной темы определяется тем, что методы решения задач на экстремум функции многих переменных, полученные в середине 18 – начале 20 веков, применяются при решении современных задач. Особое место здесь занимают Л. Эйлер и Ж.-Л. Лагранж.

ISSN 1814-4225 (print)
ISSN 2663-2012 (online)

Как известно [4], Л. Эйлер в «Дифференциальном исчислении» (1755) впервые методами дифференциального исчисления исследует экстремумы функции двух переменных. Им получены необходимые условия экстремума функции $V(x, y)$:

$$P = 0, \quad Q = 0,$$

где

$$P = \frac{\partial V(x, y)}{\partial x}, \quad Q = \frac{\partial V(x, y)}{\partial y}.$$

Достаточные условия Эйлером сформулированы так: если найденные из уравнений $P = 0$, $Q = 0$ значения x и y дают выражениям $\frac{\partial P}{\partial x}$ и $\frac{\partial Q}{\partial y}$ разные знаки, то функция не может иметь ни максимума, ни минимума. Если же оба выражения $\frac{\partial P}{\partial x}$, $\frac{\partial Q}{\partial y}$ положительны, то получим минимум. В противоположном случае, если они оба будут отрицательны, – максимум [4]. Удивительно, что Эйлер не заметил допущенной им в этих рассуждениях ошибки, которая видна на простейших примерах.

Пусть, например, дана функция

$$z = x^2 - 3xy + y^2.$$

При $x = 0$, $y = 0$ условия Эйлера выполняются, и должен быть минимум. Однако в этой точке функция не имеет ни максимума, ни минимума. В точке $(0, 0)$ функция равна нулю. Если положить, например, $x = \omega$ и $y = \omega$, то функция принимает отрицательное значение $z = -\omega^2$. Эта функция, действительно, имеет минимум $z = 0$, если переменной величиной является только x или только y.

Таким образом, условия

$$\frac{\partial P}{\partial x} > 0, \quad \frac{\partial Q}{\partial y} > 0$$

вовсе не являются достаточными, хотя Эйлер подтверждает свой метод массой примеров. Более того, удивительным оказывается, что все его результаты в этих примерах верны. Это происходит за счет того, что условие

$$V''_{xx} V''_{yy} - {V''_{yy}}^2 > 0,$$

являющееся на самом деле достаточным, всегда молчаливо выполняется за счет тех или иных особенностей рассматриваемой функции.

Впервые общий метод нахождения экстремумов для функций многих переменных предложил Ж.-Л. Лагранж (1736-1813) в статье «Recherchers sur la méthode de maximis et minimis» (1795) [5]. Это была первая печатная работа молодого Лагранжа. Она опубликована в первом томе философско-математического сборника созданного Лагранжем Туринского математического общества. В этой статье впервые получены достаточные условия для нахождения экстремумов функций многих переменных и исправлена ошибка, допущенная Л. Эйлером. Причем, делает он это очень тактично, не называя его имени. Этот поступок вполне оправдан, ведь Лагранжу было в то время всего 23 года.

Постановка задачи исследования

Целью статьи является исследование условий максимума и минимума функций многих переменных, полученных Ж.-Л. Лагранжем, и сравнение его результатов с изложением данной тематики в современных учебниках по высшей математике и математическому анализу. Метод исследования – историко-научный анализ первоисточника, позволяющий научные результаты, полученные в 19 веке, оценить с позиций современного математического анализа.

Исследование результатов Ж.-Л. Лагранжа

Ж.-Л. Лагранж начинает свою статью со ссылки на «Трактат о флюксиях» (1742) К. Маклорена, одну из первых и основополагающих работ, положивших начало дифференциальному исчислению функций одной переменной и математическому анализу в целом. Здесь Маклорен дал метод нахождения экстремумов для функций одной переменной и разобрал случай обращения в нуль дифференциалов высших порядков. В этом случае, как пишет Маклорен, если второй дифференциал равен нулю, следует рассматривать третий дифференциал. Если он не равен нулю, то функция не имеет экстремума. Тогда следует смотреть на знак четвертого: если он больше нуля, то функция имеет минимум, если меньше – максимум и так далее [6].

Затем Лагранж приступает к изложению общего метода нахождения максимумов и минимумов сразу для функций многих переменных. Рассматривая алгебраическую функцию $z = z(t, u, ...)$ от независимых переменных t, u, r, …, он находит ее первый дифференциал

$$dz = pdt + qdu + ...$$

и приравнивает его нулю

$$pdt + qdu + ... = 0 .$$

Из этого соотношения, так как переменные t, u, … независимы, следует

$$p = 0, \quad q = 0, \quad r = 0, ...$$

Из этих уравнений находится система значений неизвестных t, u, …, дающих функции z максимум или минимум (так называемые точки, “подозрительные на экстремум”).

Далее он рассматривает второй дифференциал. Предполагая, что первые дифференциалы du, dt, dx, … являются константами, получает второй дифференциал в виде

$$d^2z = dpdt + dqdu + drdx + dsdy + ...$$

или

$$\begin{aligned} dp &= Adt + Bdu + Ddx + Gdy + ..., \\ dq &= Bdt + Cdu + Edx + Hdy + ..., \\ dr &= Ddt + Edu + Fdx + Idy + ..., \\ ds &= Gdt + Hdu + Idx + Ldy + ..., \\ &. \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; , \end{aligned}$$

что дает

$$\begin{aligned} d^2z = Adt^2 + 2Bdtdu + Cdu^2 + 2Ddtdx + 2Edudx + \\ + Fdx^2 + 2Gdtdy + 2Hdudy + 2Idxdy + Ldy^2 + \quad ... \end{aligned}$$

После этого Лагранж подробно рассматривает частные случаи, предполагая сначала, что z является функцией одной переменной. Но на нем мы не будем останавливаться, поскольку этот случай подробно рассмотрен, как было сказано выше, Маклореном, и не является целью данной статьи. Для нас представляют интерес случаи большего числа переменных.

Далее Лагранж рассматривает функцию двух переменных $z = z(t,u)$. Тогда

$$d^2z = Adt^2 + 2Bdtdu + Cdu^2 .$$

Преобразовывает это выражение к виду

$$A\left(dt + \frac{Bdu}{A}\right)^2 + \left(C - \frac{B^2}{A}\right)du^2 .$$

Отсюда, так как du и dt независимы, Лагранж получает условия для минимума:

$$A > 0, \quad C - \frac{B^2}{A} > 0$$

или

$$CA > B^2 .$$

Откуда следует, что величина C должна быть положительной.

Аналогично для максимума:

$$A < 0, \quad C < 0, \quad AC > B^2 .$$

Если переменных три: t, u, x, то второй дифференциал запишется в форме

$$\begin{aligned} d^2z = Adt^2 + 2Bdtdu + Cdu^2 + 2Ddtdx + \\ + 2Edudx + Fdx^2 , \end{aligned}$$

которую можно привести к виду

$$\begin{aligned} A\left(dt + \frac{Bdu}{A} + \frac{Ddx}{A}\right)^2 + \left(C - \frac{B^2}{A}\right)du^2 + \\ + 2\left(E - \frac{BD}{A}\right)dudx + \left(F - \frac{D^2}{A}\right)dx^2 . \end{aligned}$$

Обозначив

$$C - \frac{B^2}{A} = a, \quad E - \frac{BD}{A} = b, \quad F - \frac{D^2}{A} = c ,$$

получает

$$\begin{aligned} d^2z = A\left(dt + \frac{Bdu}{A} + \frac{Ddx}{A}\right)^2 + \\ + adu^2 + 2bdudx + cdx^2 \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} d^2z = A\left(dt + \frac{Bdu}{A} + \frac{Ddx}{A}\right)^2 + \\ + a\left(du + \frac{bdx}{a}\right)^2 + \left(c - \frac{b^2}{a}\right)dx^2 . \end{aligned}$$

ISSN 1814-4225 (print)
ISSN 2663-2012 (online)

Тогда весь дифференциал будет больше нуля, если коэффициенты A, a, $c-\frac{b^2}{a}$ будут иметь положительный знак. Следовательно, получаются условия для минимума

$$A>0, \quad a>0, \quad ca>b^2.$$

Или

$$A>0, \quad C-\frac{B^2}{A}>0,$$
$$\left(C-\frac{B^2}{A}\right)\left(F-\frac{D^2}{A}\right)>\left(E-\frac{BD}{A}\right)^2.$$

То есть,

$$A>0, \quad CA>B^2,$$
$$\left(AC-B^2\right)\left(FA-D^2\right)>\left(EA-BD\right)^2.$$

Откуда

$$C>0, \quad F>0, \quad FA>D^2.$$

Пользуясь тем же приемом, Лагранж находит условия для максимума

$$A<0, \quad CA>B^2,$$
$$\left(AC-B^2\right)\left(FA-D^2\right)>\left(EA-BD\right)^2.$$

Говоря современным языком, для того, чтобы функция трех переменных имела минимум (максимум) достаточно, чтобы второй дифференциал представлял собой положительно (отрицательно) определенную квадратичную форму. По теореме Сильвестра для положительной определенности квадратичной формы

$$d^2z = Adt^2 + 2Bdtdu + Cdu^2 + 2Ddtdx + \\ +2Edudx + Fdx^2$$

необходимо и достаточно выполнение неравенств

$$A>0, \quad \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix}>0, \quad \begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix}>0,$$

а для отрицательной определенности:

$$A<0, \quad \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix}>0, \quad \begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix}<0.$$

Это полностью соответствует условиям, полученным Лагранжем, который, собственно, и оперирует квадратичными формами, однако самими терминами «определитель» и «квадратичная форма» не пользуется. Они, как и критерий Сильвестра, появились значительно позднее, в середине 19 века.

Фактически в таком виде достаточные условия существования экстремума функции многих переменных мы встречаем во всех современных учебниках математического анализа, например, в [7].

Далее Лагранж указывает, что эту теорию можно распространить на случай функций четырех и более переменных. При этом замечает, что все выкладки будут абсолютно аналогичными, только более громоздкими.

Справедливо считая изложенную теорию полностью новой, Лагранж посчитал целесообразным сделать некоторые замечания. «Каково бы ни было число переменных, входящих в z, для того, чтобы исследовать функцию на максимум или минимум в каждом случае надо находить первые дифференциалы pdt, qdu, rdx, … и приравнивать нулю коэффициенты

$$p=0, \quad q=0, \quad r=0, ...$$

Затем, переходя известным способом ко второму дифференциалу, надо смотреть на знаки A, C, F, L, … Если все они больше нуля (меньше нуля), то этого условия не достаточно для того, чтобы значения t, u, x, …, найденные из уравнений $p=0$, $q=0$, …, доставляли z минимум (максимум)» [5].

Далее Лагранж на примере функции двух переменных поясняет свою новую теорию с помощью геометрической интерпретации. Если z является функцией двух независимых переменных $z=z(t,u)$, то z можно представить как аппликату поверхности. (Лагранж пользуется термином «ордината».)

Тогда первый дифференциал

$$dz = pdt + qdu,$$

если предположить, что $u=\text{const}$, примет вид

$$dz = pdt.$$

Это уравнение описывает все сечения поверхности плоскостями, параллельными плоскости tz при различных значениях u. Так как $u = \text{const}$, дифференцируя снова z, получим

$$d^2z = Adt^2.$$

Подставив вместо t значение, найденное из уравнения $p = 0$, получим максимум или минимум, соответственно знаку A, для каждого параллельного сечения. Если $A > 0$ ($A < 0$) при некоторых значениях u, тот все сечения имеют минимум (максимум). Если же A меняет знак при изменении u, то на некоторых промежутках сечения будет максимум, а на некоторых – минимум.

Геометрическое место всех точек, аппликаты которых являются максимумом или минимумом, или ни тем и ни другим, будут определяться уравнением

$$p = 0.$$

Эти точки образуют некоторое плоское или неплоское (у Лагранжа: «просто или двояко вогнутое») сечение, которое определяется парой уравнений

$$dz = pdt + qdu, \quad p = 0$$

или

$$dz = qdu, \quad p = 0.$$

Очевидно, как указывает Лагранж, что для отыскания максимума или минимума на всей поверхности следует большую или меньшую аппликаты на этих сечениях. Снова будем иметь $q = 0$, что и дает значение переменной u. Дифференциал от q равен

$$dq = Bdt + Cdu.$$

Но поскольку в этом случае t определяется из уравнения $p = 0$ или из его дифференциала

$$Adt + Bdu = 0,$$

что дает

$$dt = -\frac{B}{A}du, \quad dq = \left(-\frac{B^2}{A} + C\right)du.$$

В результате, если

$$-\frac{B^2}{A} + C > 0,$$

то есть

$$C > \frac{B^2}{A},$$

то ордината будет наименьшей, если $A > 0$, а при $A < 0$ – наибольшей. Если $C = \frac{B^2}{A}$, то не будет ни максимума, ни минимума, если только не будут выполнены определенные требования к дифференциалам более высоких порядков.

Здесь Лагранж подводит итог: экстремум поверхности ищется среди экстремумов полученных сечений. Если значения t и u полученные из уравнений $p = 0$ и $q = 0$, подставить в A и $C - \frac{B^2}{A}$, то условия для максимума поверхности:

$$A < 0, \quad C > \frac{B^2}{A},$$

а для минимума:

$$A > 0, \quad C > \frac{B^2}{A},$$

что соответствует общей теории, изложенной выше.

Если теперь взять $t = \text{const}$, то получим следующие условия:

$$C < 0, \quad AC > B^2$$

для максимума и

$$C > 0, \quad AC > B^2$$

для минимума, что приводит к условиям, полученным выше.

Эта статья Лагранжа содержит, помимо теоретического материала, примеры. В одном из них он рассматривает поверхность

$$z^2 = ax^2 + 2bxy + cy^2 - ex - fy$$

и предлагает найти ее максимум и минимум. Первый дифференциал имеет вид

$$2zdz = 2axdx + 2bydx + 2bxdy + 2cydy - edx - fdy.$$

ISSN 1814-4225 (print)
ISSN 2663-2012 (online)

Необходимое условие экстремума

$$ax+by=\frac{e}{2}, \quad cy+bx=\frac{f}{2}.$$

Так как $dz=0$, то второй дифференциал имеет вид

$$2zd^2z=2adx^2+4bdxdy+2cdy^2,$$

куда величины x и y не входят. Итак, чтобы функция имела максимум (минимум), надо, чтобы a и c были оба отрицательны (положительны). Но этого недостаточно. Должно еще выполняться неравенство

$$ca>b^2.$$

В заключение Лагранж предлагает решить эту задачу другим способом. Предполагая переменной сначала x, находит первый дифференциал $2(ax+by-\frac{e}{2})dx$ и второй $2adx^2$. Далее полагает y переменной. Тогда первый и второй дифференциалы имеют соответственно вид

$$2(cy+bx-\frac{f}{2})dy \text{ и } 2cdy^2.$$

Равенство нулю первых двух дифференциалов дает такие же уравнения, которые были найдены выше в предположении, что обе величины являются переменными. Если оба вторых дифференциала больше нуля (меньше нуля), то функция имеет минимум (максимум) по одной из переменных, считая вторую постоянной. Однако Лагранж подчеркивает, что этого вовсе не достаточно, как было показано выше, для того, чтобы функция двух независимых переменных имела экстремум. Следует рассматривать еще дополнительные условия. Тем самым Лагранж косвенно указывает на ошибку Эйлера.

Гораздо позже в «Теории аналитических функций» (1797) [8] Лагранж продолжает разработку вопросов, связанных с экстремумами функций многих переменных. Здесь он уже прямо указывает на ошибку Эйлера: «Для существования максимума или минимума функции $z(x,y)$ недостаточно, чтобы было $z''<0$ и $z_{,,}<0$ или $z''>0$ и $z_{,,}>0$, как можно заключить из XI главы второй части «Дифференциального исчисления» Эйлера». [8] (Здесь в обозначениях Лагранжа z'' – вторая производная по x функции $z(x,y)$, а $z_{,,}$ – ее вторая производная по y в точке (x_0,y_0), удовлетворяющей необходимым условиям существования экстремума.) В связи с этим Лагранж выводит достаточное условие существования экстремума для функции двух переменных $z''\cdot z_{,,}-z''_{,,}>0$, где $z''_{,,}$ – вторая производная по x и y в точке (x_0,y_0)

Еще один пример, рассмотренный Лагранжем в статье [5] с целью пояснения изложенной им теории. Задачу он формулирует следующим образом. Предположим, что первое тело ударяет второе с заданной скоростью c, второе, с приобретенной скоростью от первого, ударяет третье и так далее. Массы первого и последнего тел даны: a и b. Спрашивается, какими должны быть массы промежуточных, чтобы последнему была сообщена максимально возможная скорость? Если обозначить t, u, x, y, $\ldots$ – неизвестные массы промежуточных тел, то для решения задачи необходимо найти максимум функции

$$z=\frac{2...2c\cdot a\cdot t\cdot u\cdot x\cdot y...b}{(a+t)(t+u)(u+x)(x+y)...}.$$

Эта проблема была впервые рассмотрена Хр. Гюйгенсом, а затем рассматривалась многими математиками, но без использования теории экстремумов. Сейчас эта задача входит в современные учебники и задачники по математическому анализу, например, [9].

Однако первая статья Лагранжа об экстремумах функций многих переменных осталась незамеченной современниками. Только через 20 лет, в 1779 году Ж. Ф. Фаньяно (G. F. Fagnano, 1715-1797) в сочинении «Problemata quaedam ad methodum maximorum et minimorum shectanta», 1775 г., опубликовано и 1779) изложил отдельные задачи на максимум и минимум функции многих переменных, которые решал, как с помощью метода Лагранж, так и геометрическими методами, создавая для каждой отдельной задачи свой метод [10]. Очень вероятно, что Ж. Ф. Фаньяно знал об исследованиях Эйлера и Лагранжа в этой области. Лагранж состоял в переписке с отцом Ж. Ф. Фаньяно – Джулио Карло де Тоски ди Фаньяно (1682-1766). В одном из писем Лагранжа Фаньяно-отцу от 24 декабря 1755 года обсуждался вопрос об экстремумах функций.

В статье [5] Лагранж указывает, что полученный метод нахождения экстремумов функций многих переменных можно применить и к решению задач на экстремум интегралов (в современной терминологии – это задачи вариационного исчисления). В период работы над своей первой статьей Лагранж уже трудился над созданием метода вариаций, который был опубликован в 1761 году. Деятельность

Лагранжа в этом направлении подробно освещена в [11].

Уже в статье [5] Лагранж пишет, что теорию экстремумов неопределенных интегралов (метод вариации) он намеревается применить к задачам механики. Он предполагал, используя принцип наименьшего действия и теорию экстремумов, вывести основные законы механики. Свои планы Лагранж осуществил в «Аналитической механике» (1788). В связи с задачами механики Лагранж вывел и свое правило множителей для нахождения условного экстремума функций многих переменных, носящее теперь его имя.

Выводы

Таким образом, статья юного Лагранжа «Recherchers sur la méthode de maximis et minimis» стала программной не только для него самого, но и для следующих, более поздних, поколений математиков. К ней в дальнейшем обращались и многие отечественные математики. Основываясь на фундаментальных результатах Лагранжа, они рассматривали частные, но не менее важные случаи в вопросе о нахождении экстремумов функций многих переменных. [12, 13].

Впервые в историко-математической литературе проведен подробный анализ результатов, полученных Лагранжем в его первой печатной работе.

Установлено, что здесь он впервые вывел достаточные условия существования экстремумов функции многих переменных фактически установив критерий положительной (отрицательной) определенности квадратичных форм, задолго до его появления у Дж. Сильвестра.

Задачи на экстремум имеют широкое применение в математических моделях различных практических задач.

Так задача определения оптимальных параметров турбореактивных двигателей может быть сведена к многокритериальной задаче параметрической оптимизации [14]. Поэтому такой раздел математического анализа, как теория экстремумов функций многих переменных, всегда присутствует в учебниках высшей математики и является неотъемлемой частью курса высшей математики в высших учебных заведениях для студентов различных специальностей.

Литература

1. Model Transformation Modularization as a Many-objective Optimization Problem [Text] / M. Fleck, J. Troya, M. Kessentini, M. Wimmer, B. Alkhazi // IEEE Transactions on software. – 2017. – Vol. 43. – P. 1009-1032.

2. A rewrstsng system for convex optimization problem [Text] / A. Agraval, R. Verschueren, S. Diamond, S. Boyd // Journal of control and decision. Taylor & Francis. – 2018. – Vol. 5, № 1. – P. 42-60.

3. Патрушев, В. О. Сегментація двовимірного сигналу, який представляє собою зображення товару, що замовляється споживачем [Текст] / В. О. Патрушев, О. І. Патрушева // Радіоелектронні і комп'ютерні системи. – 2019. – № 1(89). – С. 37-43. Doi: 10.32620/reks.2019.1.04

4. Эйлер, Л. Дифференциальное исчисление [Текст] / Л. Эйлер. – М. – Л. : Гостехиздат, 1949. – 579 с.

5. Lagrange, J.-L. Recherchers sur la méthode de maximis et minimis [Text] / J.-L. Lagrange // Oeuvres de Lagrange. – Paris : Gauthier-Villars, 1867. – T. 1. – P. 3-20.

6. Maclaurin, C. A treatise of fluxions [Text] / C. Maclaurin. – Edinburgh : T. W. and T. Ruddiman, 1742. – Vol. 1. – 416 p. – Vol. 2. – 338 p.

7. Фихтенгольц, Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления [Текст] / Г. М. Фихтенгольц. – М. : Физматлит, 2001 – Т. 1. – 616 с.

8. Lagrange, J.-L. Théorie des fonctions [Text] / J.-L. Lagrange. – Paris : La République, 1797. – 386 p.

9. Демидович, Б. П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу [Текст] / Б. П. Демидович. – М. : Наука, 1977. – 527 с.

10. Cantor, M. Vorlesungen über Geschichte der Mathematik [Text] / M. Cantor. – Leipzig : B. G. Teubner, 1908. – 1113 p.

11. Дорофеева, А. В. Развитие вариационного исчисления как исчисления вариаций [Текст] / А. В. Дорофеева // Историко-математические исследования / Под ред. А. П. Юшкевича. – М. : Физматгиз, 1961. – Вып. XIV. – С. 101-181.

12. Прохорова, О. М. Задачи на экстремум в работах киевского математика Б. Я. Букреева [Текст] / О. М. Прохорова // Вопросы проектирования и производства конструкций летательных аппаратов : сб. науч. тр. Нац. аэрокосм. ун-та им. Н. Е. Жуковского «ХАИ». – Вып. 1 (89). – Х., 2017. – С. 96-105.

13. Прохорова, О. М. О вкладе киевского математика М. Е. Ващенко-Захарченко в теорию экстремумов функций многих переменных [Текст] / О. М. Прохорова // Вопросы проектирования и производства конструкций летательных аппаратов: сб. науч. тр. Нац. аэрокосм. ун-та им. Н. Е. Жуковского «ХАИ». – Вып. 1 (93). – Х., 2018. – С. 154-162.

14. Меняйлов, А. В. Применение эволюционных методов решения задач оптимизации компрессоров газотурбинных двигателей [Текст] / А. В. Меняйлов, А. А. Трончук, Е. М. Угрюмова // Авиационно-космическая техника и технологии. – 2008. – № 5(52). –С. 59-65.

ISSN 1814-4225 (print)
ISSN 2663-2012 (online)

References

1. Fleck, M., Troya, J., Kessentini, M., Wimmer, M., Alkhazi, B. Model Transformation Modularization as a Many-objective Optimization Problem. *IEEE Transactions on software*, 2017, vol. 43, pp. 1009-1032.
2. Agraval, A., Verschueren, R., Diamond, S., Boyd, S A rewrstsng system for convex optimization problem. *Journal of control and decision*. Taylor & Francis Publ., 2018, vol. 5, no 1, pp. 42-60.
3. Patrushev, V. O., Patrusheva, O. I. Segmentatcija dvovymirnogo signalu, jakiy predstavljaie sobou zobragennij tovaru, sho zamovljayet'sija spogivachem [Sigmentation of a Bidden Signal, Which Represents a Picture of Ordered Goods by the Consumer]. *Radioelektronni i komp'uterni sistemi - Radioelectronic and computer systems*, 2019, vol. 89, no 1, pp. 37-43. DOI: 10.32620/reks.2019.1.04
4. Eiyler, L. *Differencial'noe ischislenie* [Differential Calculus]. Moscow-Leningrad, Gostekhizdat Publ., 1949. 579 p.
5. Lagrange, J.-L. Recherchers sur la méthode de maximis et minimis. *Oeuvres de Lagrange.* Paris, Gauthier-Villars Publ., 1867, vol. 1, pp. 3-20.
6. Maclaurin, C. *A treatise of fluxions*. Edinburgh, T. W. and T. Ruddiman Publ., 1742, vol. 1. 416 p., vol. 2. 338 p.
7. Fikhtengol'c, G. M. *Kurs differencial'nogo i integral'nogo ischislenija* [Differential and Integral Calculus Cours]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2001, vol. 1. 616 p.
8. Lagrange, J.-L. *Théorie des fonctions*. Paris, La République, 1797. 386 p.
9. Demidovych, B. P. *Sbornik zadach i upragnenij po matematicheskomu analizu* [Collection of tasks and exercises in mathematical analysis]. Moscow, Nauka Publ., 1977. 527 p.
10. Cantor, M. *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik*. Leipzig, B. G. Teubner Publ., 1908. 1113 p.
11. Dorofeeva, A. V. Razvitije variacionnogo ischislenija kak ischislenija variacij. [Development of the calculus of variations as the calculus of variations] *Istoriko-matematicheskije issledovanija – Historical and mathematical research,* Moscow, Fizmatgiz Publ., 1961, vol. XIV, pp. 101-181.
12. Prokhorova, O. M. Zadachy na ekstremum v rabotakh kyivskogo matemetika B. Ja. Bukreeva [Extreme tasks in the works of the Kiev mathematician B. Ya. Bukreev]. *Voprosy proektirovanija i proizvodstva konstrukcij letatel'nyh apparatov: sb. nauch. tr. Nac. ajerokosm. un-ta im. N. E. Zhukovskogo «HAI» – Problems of design and production of aircraft structures,* 2017, vol. 89, no 1, pp. 96-105.
13. Prokhorova, O. M. O vklade kyivskogo matemetika M. E. Vashenko-Zakharchenko v teoriyu ekstremumov funkcij mnogih peremennyh [On the contribution of the Kiev mathematician M. E. Vashenko-Zakharchenko to the theory of extrema of functions of several variables]. *Voprosy proektirovanija i proizvodstva konstrukcij letatel'nyh apparatov: sb. nauch. tr. Nac. ajerokosm. un-ta im. N. E. Zhukovskogo «HAI» – Problems of design and production of aircraft structures,* 2018, vol. 93, no. 1, pp. 154-162.
14. Menjailov, A. V., Tronchuk, A. A., Ugrjumova, E. M. Primenenie evolucionnyh metodov reshenija zadach optimizacii kompressorov gazoturbinnykh dvigateley [Application of evolutionary methods for solving problems of compressor optimization for gas turbine engines]. *Aviacionno-kosmicheskaja tehnika i tehnologija – Aerospace engineering and technology*, 2018, no. 5 (52), pp. 59-65.

Поступила в редакцию 3.12.2019, рассмотрена на редколлегии 20.01.2020

Ж.-Л. ЛАГРАНЖ ЯК ОДИН З ОСНОВОПОЛОЖНИКІВ ТЕОРІЇ ЕКСТРЕМУМІВ ФУНКЦІЙ ДЕКІЛЬКОХ ЗМІННИХ

О. М. Прохорова

У статті вперше проведено докладний аналіз результатів, які отримав Ж.-Л. Лагранж в його першій друкованій роботі. Теорія екстремумів функцій багатьох змінних, як частина математичного аналізу, відноситься до математичних основ дослідження операцій. В свою чергу, багато задач оптимізації є фактично задачами на знаходження умовного екстремума функції багатьох змінних. Актуальність теми визначається тим, що методи розв'язання задач на екстремум функції багатьох змінних, які отримані в середині 18 – на початку 20 століть, застосовуються для розв'язку сучасних задач. Особливе місце тут займають Л. Эйлер і Ж.-Л. Лагранж. Метою статті є дослідження умов максимума та мінімума функцій багатьох змінних, що отримані Ж.-Л. Лагранжем, й порівняння його результатів з викладанням цієї тематики в сучасних підручниках з вищої математики та математичного аналізу. Виявлено**,** що в своїй першій друкованій роботі вперше сформульовано й доведено достатні умови існування екстремума функції багатьох змінних, тим самим фактично встановлено критерій додатньої (від'ємної) визначеності квадратичних форм, задовго до його появи у Дж. Сильвестра в середині 19 століття. Проведено порівняльний аналіз результатів Л. Эйлера та Ж.-

Л. Лагранжа. З'ясовано, що достатні умови існування екстремума функцій багатьох змінних, які отримані в першій друкованій роботі молодого Лагранжа, входять в усі сучасні підручники фактично в тому ж вигляді. Показано наведені приклади, які є ілюструючими наведену ним теорію. Ці задачі є задачами геометричного і фізичного змісту. Докладно розглянуті часткові випадки: функції двох і трьох змінних. Відзначено, що ця стаття стала програмною для юного Лагранжа, хоча і залишилася непоміченою його сучасниками. В подальшому, спираючись на отриманий ним метод, ним створене варіаційне числення, використовуючи принцип найменшої дії і теорію екстремумів, виведено основні закони механіки, правило множників для знаходження умовного екстремума функції багатьох змінних, що носить зараз його ім'я.

Ключові слова: оптимізація; екстремум функії багатьох змінних; необхідня і достатня умови екстремуму функції багатьох змінних; точки екстремуму; точки максимуму і мінімуму.

J.-L. LAGRANGE AS ONE OF THE FOUNDERS OF THE SEVERAL VARIABLES FUNCTIONS EXTREMA THEORY

O. M. Prokhorova

In the article we carried out a detailed analysis of the results obtained by J.-L. Lagrange in his first. The theory of extrema of functions of many variables, as part of mathematical analysis, refers to the mathematical foundations of the study of operations. In turn, many optimization problems are actually problems on the conditional extremum of the function of many variables. The relevance of this topic is determined by the fact that the methods for solving problems on the extremum of the function of many variables obtained in the mid 18th - early 20th centuries are used in solving modern problems. A special place here is occupied by L. Euler and J.-L. Lagrange. The aim of the article is to study the conditions for the maximum and minimum functions of many variables obtained by J.-L. Lagrange, and a comparison of its results with the presentation of this topic in modern textbooks on higher mathematics and mathematical analysis. It was established that in his first printed work he first formulated and proved sufficient conditions for the existence of an extremum of the function of many variables by actually establishing a criterion for the positive (negative) definiteness of quadratic forms, long before it appeared in J. Sylvester in the mid-19th century. A comparative analysis of the results of L. Euler and J.-L. Lagrange. It was found that sufficient conditions for the existence of an extremum of functions of many variables obtained in the first printed work of the young Lagrange are included in all modern textbooks in virtually the same form. The examples shown illustrate his theory. These are tasks of geometric and physical content. Special cases are considered in detail: functions of two and three variables. It is noted that this article became programmatic for the young Lagrange, although it remained unnoticed by his contemporaries. Subsequently, based on the method he obtained, he created the variational calculus, using the principle of least action and the theory of extrema, derived the basic laws of mechanics, the rule of factors for finding the conditional extremum of functions of many variables, which is named after him.

Keywords: optimization; extremum of function many variables; necessary and sufficient conditions of extremum of function many variables; points of extremum; points maximum and minimum.

Прохорова Ольга Михайловна – канд. физ.-мат. наук, доцент, доцент кафедры высшей математики и системного анализа, Национальный аэрокосмический университет им. Н. Е. Жуковского “Харьковский авиационный институт”, Харьков, Украина.

Prokhorova Olha Mikhailovna – PhD in Physics and Mathematics, Associate Professor of Department of Higher Mathematics and System Analysis, National Aerospace University "Kharkov Aviation Institute", Kharkov, Ukraine, e-mail: o.prokhorova@khai.edu.