

## Определение погрешности приближённого вычисления потенциала двойного слоя и его производных

*Национальный аэрокосмический университет им. Н. Е. Жуковского «ХАИ»*

Решается задача определения аэродинамических характеристик крыла. Классические работы Н.Е. Жуковского и С.А. Чаплыгина по теоретическим профилям, основанные на введении отображающих функций, дали возможность построить точное решение для ограниченного класса профилей [1]. Разрабатывается метод, позволяющий решить задачу для двумерного [2] и трехмерного обтекания крыла произвольной формы.

В различных задачах аэродинамики нашло широкое применение метода потенциала двойного слоя [3]. При использовании этого метода на поверхности обтекаемого тела непрерывным образом распределяется двойной слой, интенсивность которого определяется из условия непротекания. Обтекание тел произвольной формы строится на основе численного метода. Вопросы сходимости и устойчивости численного метода, рассматриваемые в общем виде, до настоящего времени не решены.

Потенциал скорости, индуцируемый элементом двойного слоя  $dS$  (рис. 1) в произвольной точке  $K$ , определяется по телесному углу  $d\vartheta$ , под которым из точки  $K$  виден элемент  $dS$ . В численных расчётах угол  $d\vartheta$  вычисляется по формуле  $d\vartheta = dS'/r^2$ , где  $dS'$  – проекция элемента  $dS$  на плоскость, перпендикулярную радиусу.

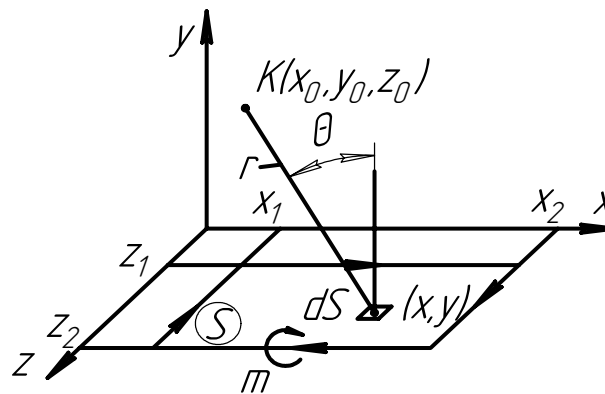


Рис. 1. Схема вычисления потенциала двойного слоя

В общем случае потенциал скорости, индуцируемый ячейкой  $S$ , определяем по формуле

$$\varphi(x_0, y_0, z_0) = \frac{1}{4\pi} \int_S \frac{m \cdot \cos \theta}{r^2} dS, \quad (1)$$

где  $r = \sqrt{(x - x_0)^2 + y_0^2 + (z - z_0)^2}$ ,  $\cos \theta = \frac{y_0}{r}$ ,

$m$  – константа внутри ячейки  $S$  (см. рис. 1).

Заметим, что интеграл в формуле (1) равен телесному углу, под которым из точки  $K(x_0, y_0, z_0)$  видна вся ячейка  $S$ .

$$\varphi = \frac{m \cdot y_0}{4\pi} \sum_{z_1}^{z_2} dz \sum_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{[(x-x_0)^2 + y_0^2 + (z-z_0)^2]^3}}. \quad (2)$$

Учитывая, что

$$\left( \frac{x}{a^2 \sqrt{x^2 + a^2}} \right)' = \frac{1}{\sqrt{(x^2 + a^2)^3}}, \quad a = y_0^2 + (z - z_0)^2,$$

получаем

$$\varphi = \frac{m \cdot y_0}{4\pi} \left\{ (x-x_0) \cdot \int_{z_1}^{z_2} \frac{dz}{\sqrt{[y_0^2 + (z-z_0)^2] \sqrt{(x-x_0)^2 + y_0^2 + (z-z_0)^2}}} \right\}_{x_1}^{x_2}.$$

При  $a^2 > b^2$  интеграл равен

$$\int \frac{dz}{(z^2 + b^2) \sqrt{z^2 + a^2}} = \frac{1}{b \sqrt{a^2 - b^2}} \cdot \operatorname{arctg} \frac{z \sqrt{a^2 - b^2}}{b \sqrt{z^2 + a^2}}.$$

С другой стороны,

$$\left( \operatorname{arctg} \frac{z \sqrt{a^2 - b^2}}{b \sqrt{z^2 + a^2}} \right)' = \frac{b \sqrt{a^2 - b^2}}{(z^2 + b^2) \sqrt{z^2 + a^2}},$$

$$b^2 = y_0^2, \quad a^2 = y_0^2 + (x - x_0)^2, \quad a^2 \geq b^2, \quad a^2 - b^2 = (x - x_0)^2.$$

С учётом предложенных выше преобразований формула (2) примет вид

$$\varphi = \frac{m}{4\pi} \cdot \operatorname{arctg} \frac{(z-z_0)(x-x_0)}{y_0 \sqrt{(x-x_0)^2 + y_0^2 + (z-z_0)^2}} \Bigg|_{x_1}^{x_2} \Bigg|_{z_1}^{z_2},$$

или

$$\begin{aligned} \varphi = \frac{m}{4\pi} & \left[ \operatorname{arctg} \frac{(z_2 - z_0)(x_2 - x_0)}{y_0 \sqrt{(x_2 - x_0)^2 + y_0^2 + (z_2 - z_0)^2}} - \right. \\ & - \operatorname{arctg} \frac{(z_1 - z_0)(x_2 - x_0)}{y_0 \sqrt{(x_2 - x_0)^2 + y_0^2 + (z_1 - z_0)^2}} - \\ & - \operatorname{arctg} \frac{(z_2 - z_0)(x_1 - x_0)}{y_0 \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + y_0^2 + (z_2 - z_0)^2}} + \\ & \left. + \operatorname{arctg} \frac{(z_1 - z_0)(x_1 - x_0)}{y_0 \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + y_0^2 + (z_1 - z_0)^2}} \right]. \quad (3) \end{aligned}$$

При  $y_0 \rightarrow 0$  телесный угол в формуле (1) занимает половину пространства (если точка  $(x_0, z_0)$  попадает внутрь ячейки (см. рис. 1)), и равен  $\pm 2\pi$ ; следовательно,  $\varphi = \pm m/2$ . Такой же результат должна давать полученная формула (3).

Действительно, при  $y \rightarrow +0$  и если точка  $(x_0, z_0)$  находится внутри ячейки,  $x_1 < x_0 < x_2$ ,  $z_1 < z_0 < z_2$ . Следовательно,  $z_2 - z_0 > 0$ ,  $z_1 - z_0 < 0$ ,  $x_2 - x_0 > 0$ ,  $x_1 - x_0 < 0$  и получим

$$\varphi_{+0} = \frac{m}{4\pi} \left( \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \right) = +\frac{m}{2}.$$

$$\text{При } y \rightarrow -0 \quad \varphi_{-0} = \frac{m}{4\pi} \left( -\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} \right) = -\frac{m}{2}.$$

Очевидно, что если  $(x_0, y_0)$  лежит вне ячейки, то  $\varphi = 0$ .

Определим область применения вычисления потенциала двойного слоя. Для этого примем ячейку со следующими параметрами (см. рис. 1):

$$x_0 = z_0 = x = z = 0, \quad x_1 = -\Delta, \quad x_2 = \Delta, \quad z_1 = -\delta, \quad z_2 = \delta.$$

Точка  $(x_0, y_0, z_0)$  лежит над центром ячейки  $2\Delta \cdot 2\delta$ .

Учитывая это, формулу (3) можно записать так:

$$\varphi = \frac{m}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{\delta \cdot \Delta}{y_0 \sqrt{y_0^2 + \Delta^2 + \delta^2}} = \frac{m}{\pi} \cdot \operatorname{arctg} \frac{\bar{\Delta} \cdot \bar{\delta}}{\sqrt{1 + \bar{\Delta}^2 + \bar{\delta}^2}}, \quad (4)$$

$$\text{где } \bar{\Delta} = \frac{\Delta}{y_0}, \quad \bar{\delta} = \frac{\delta}{y_0}.$$

При использовании численных методов вычисления потенциал скорости равен

$$\varphi_{\text{числ}} = \frac{m}{\pi} \cdot \bar{\delta} \cdot \bar{\Delta}. \quad (5)$$

Если принять, что ячейка квадратная ( $\bar{\delta}^2 = \bar{\Delta}^2 = t$ ), то формула (4) примет вид

$$\varphi = \frac{m}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{t}{\sqrt{1+2t}}.$$

Разложим в ряд Тейлора функцию  $\varphi$  (при  $|\bar{\Delta}| < 1$ ):

$$\varphi(t) = \frac{m}{\pi} \cdot \left( \varphi(0) + \varphi'(0) \cdot t + \frac{\varphi''(0) \cdot t^2}{2} + \dots \right) = \frac{m}{\pi} \left( t - \frac{3}{2} t^2 \right).$$

Подставив полученное выражение в формулу (5), получим

$$\varphi = \varphi_{\text{числ}} \left( 1 - \frac{3}{2} \cdot t \right) = \varphi_{\text{числ}} \left( 1 - \frac{3}{2} \cdot \bar{\Delta}^2 \right) = \frac{\varphi_{\text{числ}}}{\left( 1 + \frac{3}{2} \cdot \bar{\Delta}^2 \right)}. \quad (6)$$

Если считать, что ошибка вычисления составляет менее 5%, то, учитывая выражение, (6) определяем область применения формулы (3):

$$\frac{3}{2} \cdot \bar{\Delta}^2 > 0.05 \quad \text{или} \quad \bar{\Delta}^2 > 0.03.$$

Относительная ошибка метода в случае  $\Delta \neq \delta$  составит величину

$$\frac{\bar{\Delta}^{-2} + \bar{\delta}^{-2}}{2} = \frac{\Delta^2 + \delta^2}{8 \cdot y_0^2}.$$

Формулой (3) можно пользоваться для проверки численных методов вычисления потенциала по выражению (1).

По предложенной методике рассчитываем серию крыльев, параметры, которых представлены на рис. 2.

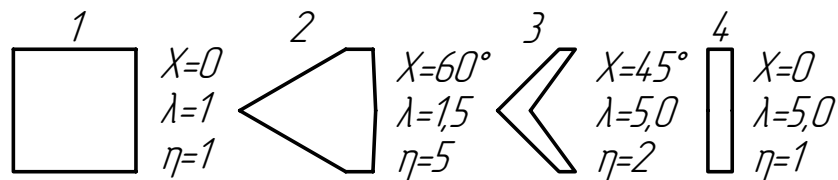


Рис. 2. Серия рассчитываемых крыльев

Сравнивая полученные результаты с результатами расчета крыльев с таким же числом подобных ячеек, можно сделать вывод, что результаты для плоского крыла отличаются незначительно (рис.3,4:Т – значения величины  $c_y^\alpha$  согласно [4], П – значения величины  $c_y^\alpha$ , полученные предлагаемым методом).

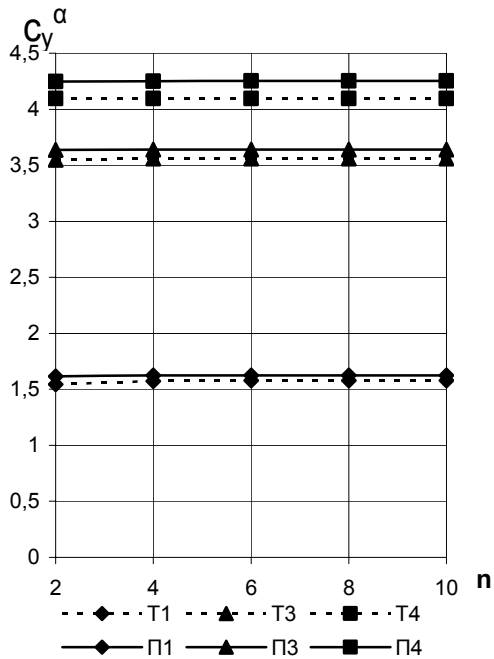


Рис. 3. Влияние числа ячеек n по хорде на величину  $c_y^\alpha$

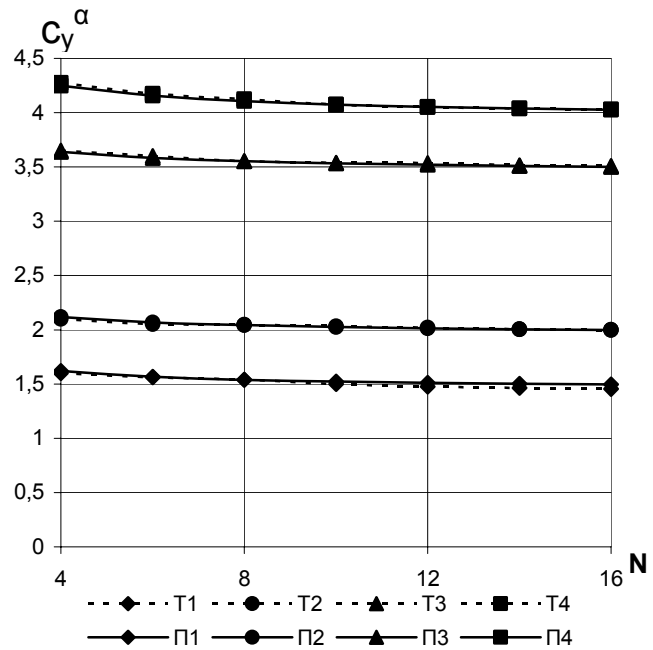


Рис. 4. Влияние числа ячеек N на полуразмахе на величину  $c_y^\alpha$

**Вывод.** Данный метод является теоретически более строго обоснованным, чем метод дискретных вихрей, и позволяет делать расчеты производных потенциала двойного слоя с большей точностью. При использовании теоретической основы этого метода решаются вопросы вычисления аэродинамических характеристик толстого крыла, а также влияния поверхности земли при посадке и взлете самолета и много других подобных задач.

### Список литературы

1. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа.– М.: Наука,1987.– 840 с.
2. Тюрев В.В. Метод расчёта обтекания несущей поверхности, испытывающей произвольные деформации // Доповіді Національної академії наук України. Математика. Природознавство. Технічні науки. – 2001. – №4. – С.56 – 60.
3. Сретенский Л.Н. Теорія ньютонівського потенціала. – М.: Гостехиздат, 1946. – 318 с.
4. Белоцерковский С.М. Тонкая несущая поверхность в дозвуковом потоке газа. – М.: 1965. – 242 с.