

Выбор коэффициента перекрытия для ускоренного статистического моделирования НДС конструкций

Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского «ХАИ»

Постановка проблемы, анализ проведенных исследований, цель работы

В работе [1] для оценки вероятности разрушения конструкций проблемы, связанные с хвостами распределений характеристик проектируемой конструкции, предложено решать на основе построения специальных моделей этих функций [3 - 5], получивших название граничных, а также с помощью ускоренного статистического моделирования (УСМ) [6,7]. Для этих целей построено 6 различных граничных моделей условия разрушения, с их помощью проведено УСМ, осуществлена аналитическая оценка вероятности разрушения и сделаны соответствующие рекомендации по выбору моделей. Исследования показали высокую эффективность УСМ по сравнению с прямым статистическим моделированием. Однако для успешного применения УСМ для оценки вероятности разрушения сложных объектов с большим количеством случайных параметров необходимы дальнейшие исследования и оптимизация метода ускоренного моделирования с точки зрения затрачиваемых машинных ресурсов.

Основным параметром УСМ, определяющим затрачиваемые при проведении УСМ машинные ресурсы, является коэффициент перекрытия. Цель настоящей статьи – исследование и выбор оптимальных коэффициентов перекрытия для различных граничных моделей для уменьшения затрачиваемого на проведение УСМ машинного времени.

Объекты исследования

В общем виде условие целостности конструкции можно записать следующим образом:

$$\sigma_{\max} - \sigma_B < 0, \quad (1)$$

где σ_{\max} - максимальное эквивалентное напряжение в опасном узле конструкции;

σ_B - предел прочности материала конструкции.

Условие допустимой деформации

$$f_{\max} - f_D < 0, \quad (2)$$

где f_{\max} - максимальная деформация конструкции; f_D - предельно допустимая деформация конструкции.

Поскольку параметры конструкции и нагрузок имеют случайные разбросы (в особенности если конструкция изготовлена из композиционного материала), то

левые части условий (1) и (2) представляют собой функции случайных величин. Поэтому, обобщая условия (1) и (2), получим

$$\lambda < \Lambda, \quad (3)$$

где λ - функция случайных величин, которую в дальнейшем будем называть критериальной функцией (КФ); Λ - константа-ограничение, которую в дальнейшем будем называть границей работоспособности.

В настоящей статье для получения вероятности нарушения условия (3) рассмотрены следующие модели КФ [4,5]:

- касательная граничная линейная модель (КГЛМ);
- секущая граничная линейная модель (СГЛМ);
- аппроксимирующая граничная линейная модель (АГЛМ), построенная на основе КГЛМ;
- аппроксимирующая граничная линейная модель (АГЛМ), построенная на основе СГЛМ;
- квадратичная граничная модель (КГМ), построенная на основе КГЛМ;
- квадратичная граничная модель (КГМ), построенная на основе СГЛМ.

Все линейные модели определены в виде

$$\lambda_m = \lambda_0 + \sum_{i=1}^n b_i \eta_i, \quad (4)$$

квадратичные – в виде

$$\lambda_m = \lambda_0 + \sum_{i=1}^n b_i \eta_i + \sum_{i=1}^n c_i \eta_i^2, \quad (5)$$

где λ_m - модели левой части (3); λ_0, b_i, c_i - коэффициенты моделей; η_i - случайные разбросы параметров конструкции или нагрузок.

В качестве объектов исследования выбраны конструкции, для которых могут быть получены эталонные результаты.

Первый объект исследования представляет собой стержень из композиционного материала. Геометрия объекта показана на рис.1.

Номинальные размеры стержня: длина $L = 0.85$ м; высота поперечного сечения $H = 0.03$ м; ширина поперечного сечения $B = 0.015$ м. Стержень закреплен на левом конце, по правой половине стержня равномерно распределена нагрузка $Q=5000$ Н. Материал стержня – углепластик КМУ-3Э с модулем упругости $E = 2E+11$ Н/м².

Случайные разбросы параметров (геометрии, нагрузки и свойств материала) приведены в табл. 1.

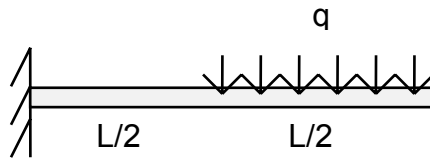


Рис.1. Первый объект исследования

Таблица 1

Параметр	Номинальное значение	Разброс, %
Длина L, м	0.85	9
Высота сечения h, м	0.03	9
Ширина сечения b, м	0.015	9
Нагрузка q, Н/м	5000	25
Модуль упругости E, Н/м ²	2E+11	10

Условия целостности и допустимой деформации объекта запишем следующим образом:

- условие допустимой деформации

$$\frac{41qL^4}{32Ebh^3} < f_D; \quad (6)$$

- условие целостности

$$\frac{9qL^2}{4bh^2} - \sigma_B < 0, \quad (7)$$

где для (6) допустимая величина прогиба принята равной $f_D = 0.0825$ (м); для (7) предел прочности материала случаен, нормален и имеет характеристики:

- математическое ожидание σ_B : $\bar{m}_{\sigma_B} = 9.5E+8$ (Н/м²);
- дисперсия σ_B : $\bar{D}_{\sigma_B} = 1.14E+8$ (Н/м²).

Второй объект исследования представляет собой стержневой Г-образный ротор из композиционного материала с грузом (рис. 2)

Номинальные размеры объекта: длина $L = 0.5$ м; плечо $A = 0.2$ м; высота поперечного сечения $H = 0.025$ м; ширина поперечного сечения $B = 0.04$ м.

Объект вращается вокруг оси вращения с угловой скоростью $\omega = 30$. К нижнему концу вертикального стержня прикреплен груз, в результате чего на объект действует нагрузка $Q=240$ Н.

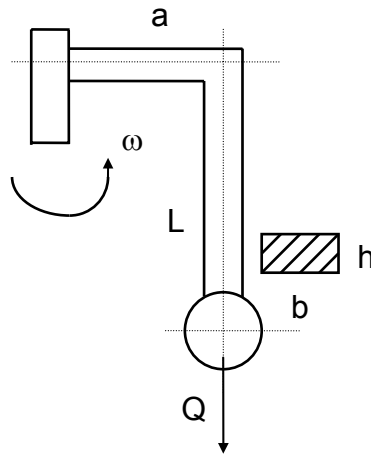


Рис. 2. Второй объект исследования

Материал объекта – углепластик КМУ-3Э с модулем упругости $E = 2E+11 \text{ Н/м}^2$.

Случайные разбросы параметров (геометрии, нагрузки и свойств материала) приведены в табл. 2.

Таблица 2

Параметр	Номинальное значение	Разброс, %
Длина L, м	0.5	9
Плечо a, м	0.2	9
Высота сечения h, м	0.025	9
Ширина сечения b, м	0.04	9
Нагрузка Q, Н	240	25
Угловая скорость ω	30	15
Модуль упругости E, Н/м ²	2E+11	10

Условие целостности и допустимой деформации объекта запишем следующим образом:

- условие допустимой деформации

$$\frac{Q\omega^2 a}{g} \cdot \frac{1}{\frac{Eb h^3}{4L^3} - \frac{Q\omega^2}{g}} < f_D; \quad (8)$$

- условие целостности

$$\frac{6Q\omega^2 aL}{gb h^2} - \sigma_B < 0, \quad (9)$$

где для (8) предельно допустимая величина перемещения груза равна $f_D = 0.03965$ (м), для (9) предел прочности материала случаен, нормален и имеет характеристики:

- математическое ожидание σ_B : $\overline{m}_{\sigma_B} = 9.5E+8$ (Н/м²);
- дисперсия σ_B : $\overline{D}_{\sigma_B} = 1.14E+8$ (Н/м²).

Простота КФ для выбранных объектов исследования позволяет провести классическое статистическое моделирование и найти статистические вероятности нарушения условий целостности и допустимой деформации объекта, которые можно принять за эталонные значения вероятностей нарушения этих условий.

Последовательность и методика исследования

Этап 1. Строятся упомянутые выше граничные модели КФ: КГЛМ, СГЛМ, АГЛМ на основе КГЛМ, АГЛМ на основе СГЛМ, КГМ на основе КГЛМ, КГМ на основе СГЛМ.

Этап 2. Проводится параллельное УСМ по всем построенным граничным моделям и прямое СМ с целью определения эталонного значения вероятности нарушения условий целостности и допустимой деформации объекта. Под параллельным проведением моделирования подразумевается, что для получения одной реализации КФ и их моделей используется один и тот же «комплект» случайных реализаций разбросов параметров конструкций и нагрузок (в дальнейшем будем называть этот «комплект» вектором случайной реализации разбросов), чтобы исключить различие результатов за счет «случайности» генераций разбросов.

Этап 3. Вычисляется параметр, характеризующий погрешность проведения УСМ для каждой модели:

$$\Delta Q^* = Q^* - Q_{et}, \quad (10)$$

где Q^* - вероятности нарушения условий целостности и допустимой деформации объекта для модели; Q_{et} - эталонное значение вероятности нарушения этих условий, полученное при проведении СМ по КФ.

Этап 4. Этапы 2 и 3 повторяются для различных значений коэффициентов перекрытия. Коэффициент перекрытия K_X постепенно уменьшается от 2 до 1 (с шагом 0.1), все получаемые значения ΔQ^* заносятся в таблицы, по которым для каждой модели строятся графики зависимости погрешности УСМ ΔQ^* от коэффициента перекрытия K_X . Отметим, что УСМ для различных K_X также выполняется параллельно (как и для различных моделей), то есть по одним и тем же векторам случайной реализации разбросов.

В работе [2] описан алгоритм проведения УСМ и, в частности, способ определения требуемого объема УСМ. В этом исследовании предпринимается попытка оптимизации описанного в работе [2] алгоритма ускоренного моделирования. Потребный объем моделирования N_{CM} определяется автоматизированной системой проведения УСМ автоматически в процессе моделирования, на базе заданных пользователем двух значений:

- N_{Λ} - объем случайных реализаций, входящих в хвост распределения и превышающих граничное значение КФ;
- K_X – коэффициент перекрытия.
Объем УСМ определяется в виде

$$N_X = K_X * N_{\Lambda}, \quad (11)$$

Связь коэффициента перекрытия с объемом УСМ и общим объемом статистического моделирования показана на рис. 3.

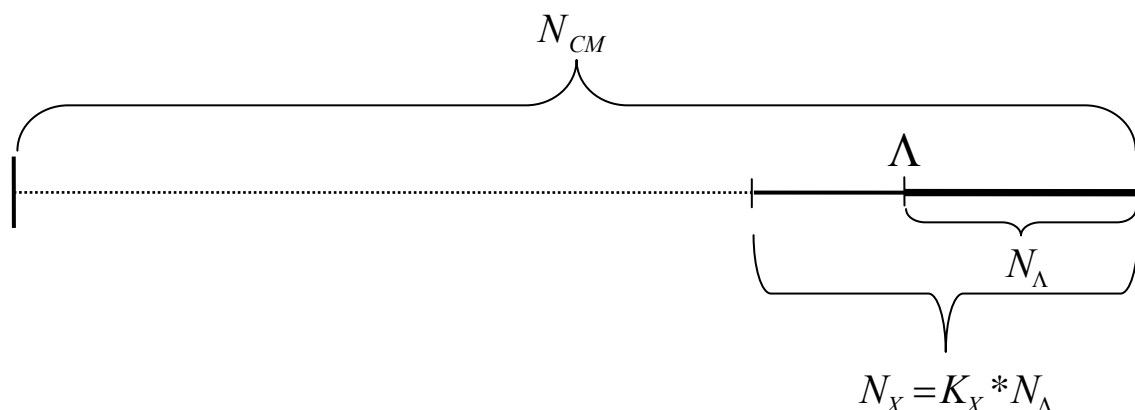


Рис. 3. Связь коэффициента перекрытия с объемом УСМ.

При заданных значениях N_{Λ} и K_X при проведении СМ генерируется вектор случайной реализации разбросов такого объема N_{CM} , который минимально необходим для получения массива хвостовых реализаций КФ с N_{Λ} значениями, превысившими границу Λ , после чего проводится УСМ в объеме $K_X \cdot N_{\Lambda}$. Таким образом, чем меньше коэффициент перекрытия, тем меньше объем «реального моделирования».

Такое автоматическое определение объема моделирования вместе с выбором оптимального коэффициента перекрытия позволяет значительно снизить затраты машинных ресурсов на выполнение УСМ сложных объектов.

Результаты исследования

Результаты исследования, проведенного в соответствии с описанной выше методикой, представлены в виде таблиц и графиков.

Погрешность УСМ по всем исследованным моделям для различных значений коэффициентов перекрытия приведена в табл. 3, 4 для первого объекта исследования и в табл. 5, 6 для второго объекта исследования:

- табл. 3, 5 – погрешность УСМ ΔQ^* для вероятности превышения допустимой деформации (первая КФ);
- табл. 4, 6 – погрешность УСМ ΔQ^* для вероятности разрушения и их относительные погрешности (вторая КФ).

Графики зависимости погрешности УСМ по моделям от коэффициента перекрытия построены по этим таблицам для первого и второго объектов исследования соответственно:

- рис. 4, 6 – графики зависимости погрешности УСМ по модели от коэффициента перекрытия для первой КФ;
- рис. 5, 7 – графики зависимости погрешности УСМ по модели от коэффициента перекрытия для второй КФ.

По этим графикам можно легко определить оптимальный коэффициент перекрытия для каждой модели. Оптимальным коэффициентом перекрытия для модели является такое минимальное значение K_x , при котором погрешность УСМ ΔQ^* остается очень близкой к нулю, или равной нулю.

Первый объект исследования

Таблица 3

Модель K_x	СГЛМ	КГЛМ	АГЛМ по СГЛМ	АГЛМ по КГЛМ	КГМ по СГЛМ	КГМ по КГЛМ
1	-3.635110E-06	-4.791736E-06	-1.404474E-06	-1.487091E-06	-1.734939E-06	-2.478484E-07
1.1	-2.891565E-06	-3.635110E-06	-8.261610E-08	-3.304646E-07	-4.130807E-07	0.000000E+00
1.2	-1.900171E-06	-2.643717E-06	-8.261610E-08	0.000000E+00	-8.261610E-08	0.000000E+00
1.3	-1.321858E-06	-1.982787E-06	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00
1.4	-5.783130E-07	-1.321858E-06	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00
1.5	-4.956969E-07	-7.435453E-07	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00
1.6	-3.304646E-07	-4.956969E-07	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00
1.7	-1.652323E-07	-4.956969E-07	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00
1.8	-1.652323E-07	-3.304646E-07	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00
1.9	0.000000E+00	-1.652323E-07	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00
2	0.000000E+00	-1.652323E-07	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00

Таблица 4

Модель K_x	СГЛМ	КГЛМ	АГЛМ по СГЛМ	АГЛМ по КГЛМ	КГМ по СГЛМ	КГМ по КГЛМ
1	-8.078672E-06	-3.840680E-06	-1.059498E-06	-1.854122E-06	-7.946235E-07	0.000000E+00
1.1	-5.827239E-06	-1.324373E-06	-1.324373E-07	-2.648745E-07	-1.324373E-07	0.000000E+00
1.2	-5.032615E-06	-9.270608E-07	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00
1.3	-3.840680E-06	-2.648745E-07	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00
1.4	-2.913619E-06	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00
1.5	-2.516308E-06	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00
1.6	-1.854122E-06	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00
1.7	-1.456810E-06	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00
1.8	-1.059498E-06	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00
1.9	-9.270608E-07	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00
2	-6.621863E-07	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00

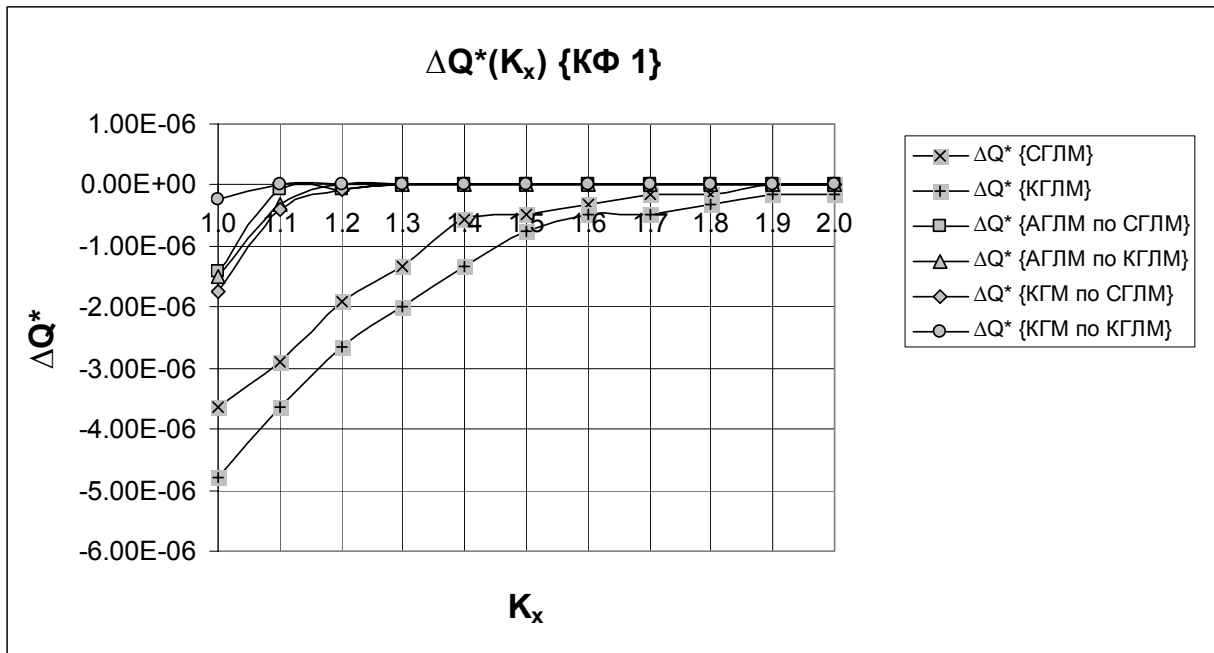


Рис. 4. Зависимости погрешности УСМ от коэффициента перекрытия для первой КФ первого объекта

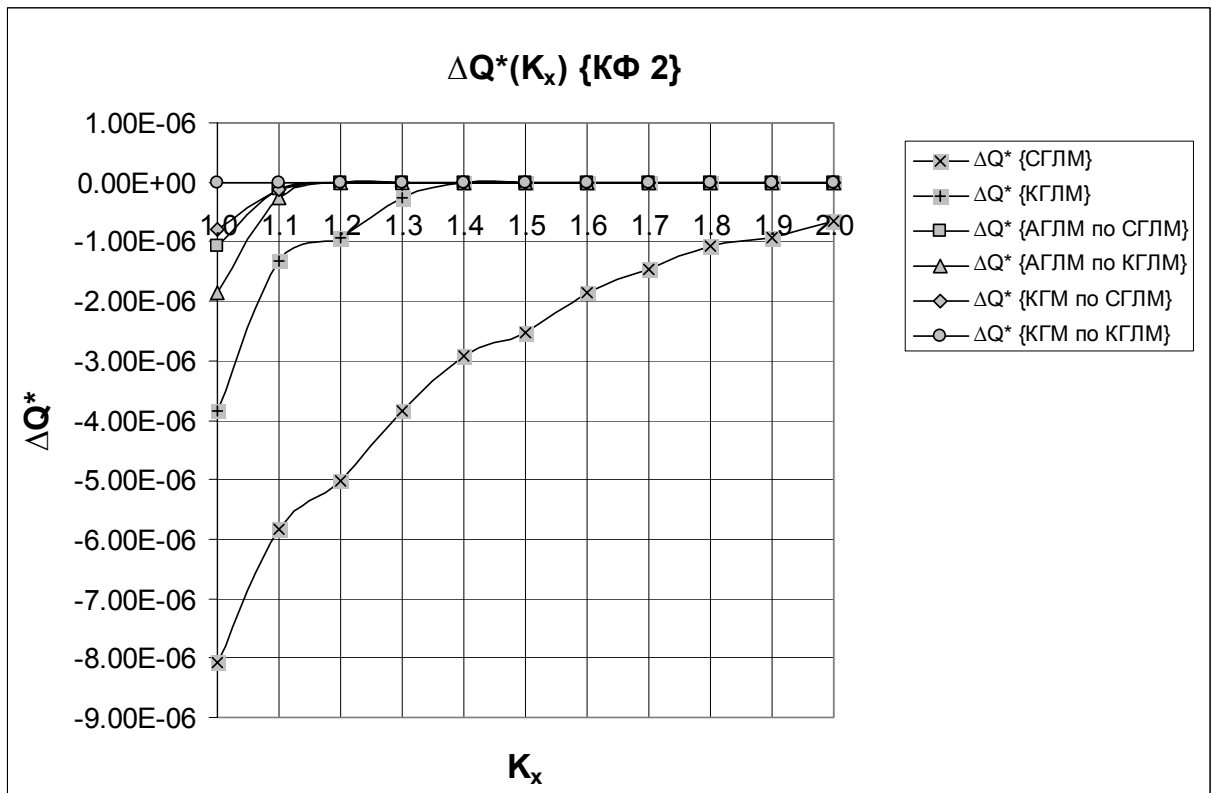


Рис. 5. Зависимости погрешности УСМ от коэффициента перекрытия для второй КФ первого объекта

Второй объект исследования

Таблица 5

Модель K_x	СГЛМ	КГЛМ	АГЛМ по СГЛМ	АГЛМ по КГЛМ	КГМ по СГЛМ	КГМ по КГЛМ
1	-2.752927E-05	-2.919771E-05	-1.167909E-05	-2.168973E-05	-1.585019E-05	-1.251331E-05
1.1	-2.002129E-05	-1.918707E-05	-4.171102E-06	-1.084487E-05	-7.507984E-06	-3.336882E-06
1.2	-1.167909E-05	-1.251331E-05	-1.668441E-06	-2.502662E-06	-4.171102E-06	-8.342210E-07
1.3	-7.507984E-06	-7.507984E-06	-8.342210E-07	0.000000E+00	-2.502662E-06	-8.342210E-07
1.4	-4.171102E-06	-4.171102E-06	0.000000E+00	0.000000E+00	-8.342210E-07	-8.342210E-07
1.5	-3.336882E-06	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00	-8.342210E-07
1.6	-1.668441E-06	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00
1.7	-8.342210E-07	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00
1.8	-8.342210E-07	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00
1.9	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00
2	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00

Таблица 6

Модель K_x	СГЛМ	КГЛМ	АГЛМ по СГЛМ	АГЛМ по КГЛМ	КГМ по СГЛМ	КГМ по КГЛМ
1	-3.273130E-06	-3.208951E-06	-8.985064E-07	-1.797013E-06	-5.134322E-07	-3.850742E-07
1.1	-1.989550E-06	-2.246266E-06	-1.925371E-07	-8.343274E-07	0.000000E+00	-6.417910E-08
1.2	-1.347760E-06	-1.476118E-06	-6.417910E-08	-1.283581E-07	0.000000E+00	0.000000E+00
1.3	-8.985064E-07	-1.091043E-06	0.000000E+00	-1.283581E-07	0.000000E+00	0.000000E+00
1.4	-6.417903E-07	-6.417903E-07	0.000000E+00	-6.417910E-08	0.000000E+00	0.000000E+00
1.5	-5.776113E-07	-3.208952E-07	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00
1.6	-5.134322E-07	-1.283581E-07	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00
1.7	-4.492532E-07	-6.417910E-08	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00
1.8	-1.283581E-07	-6.417910E-08	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00
1.9	-6.417910E-08	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00
2	-6.417910E-08	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00

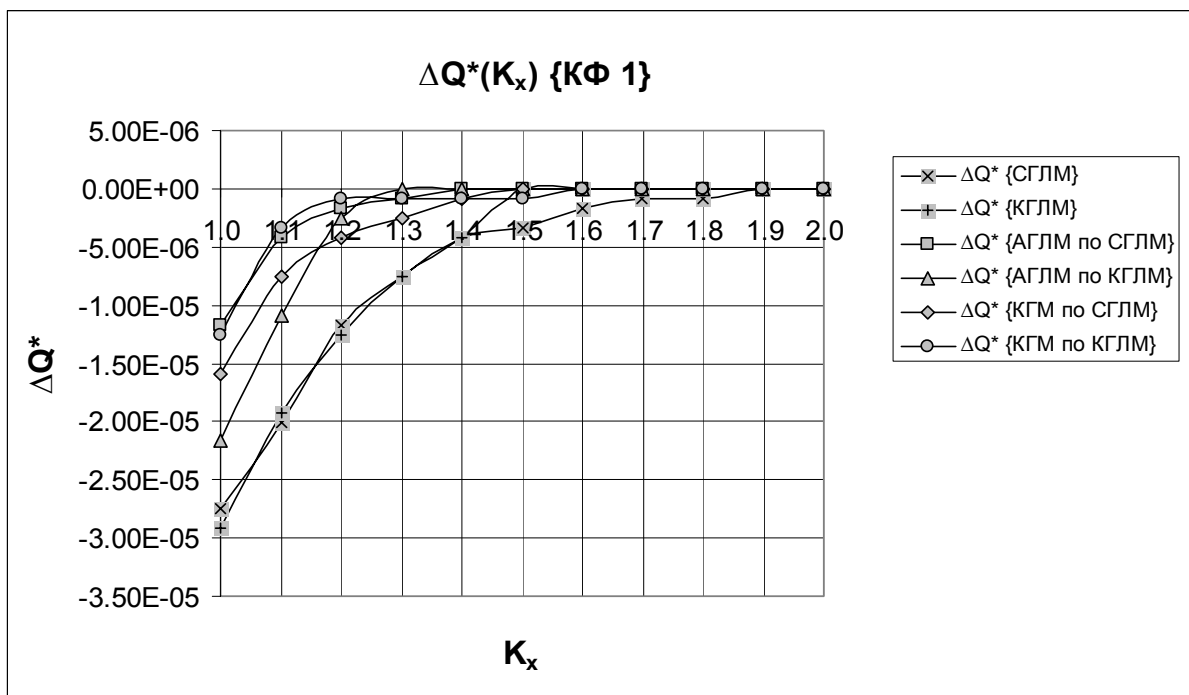


Рис. 6. Зависимости погрешности УСМ от коэффициента перекрытия для первой КФ второго объекта

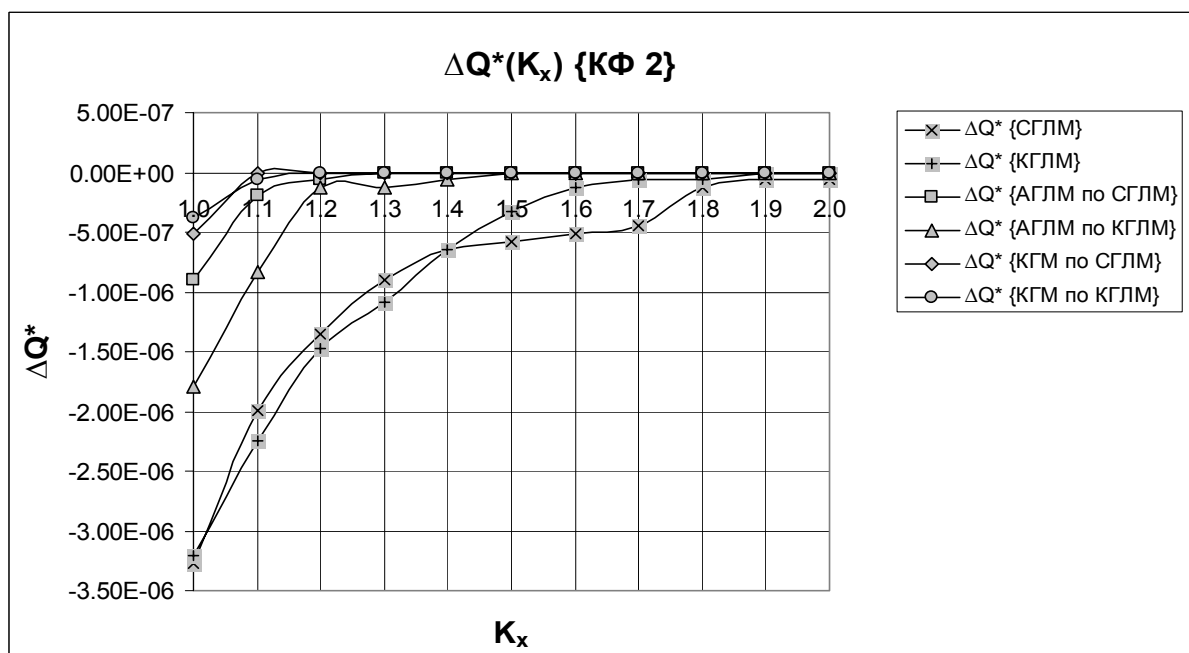


Рис. 7. Зависимости погрешности УСМ от коэффициента перекрытия для второй КФ второго объекта

Выводы

Анализ результатов исследований, проведенных в данной работе и представленных в табл. 3 - 6 и на рис. 4 - 7, позволяет сделать следующие выводы:

1. Все ГЛМ дают приемлемую для инженерных приложений погрешность оценки вероятности нарушения условий целостности и допустимой деформации с помощью УСМ.
2. Минимального коэффициента перекрытия и, следовательно, минимальных затрат машинных ресурсов удается достичь при использовании квадратичной граничной модели; аппроксимирующая граничная линейная модель также позволяет использовать небольшие коэффициенты перекрытия.

Рекомендации

Для получения с приемлемой точностью оценок вероятности превышения допустимых границ при решении прочностных задач с помощью УСМ для сложных объектов с множеством случайных параметров наиболее рационально с точки зрения затрат машинных ресурсов использовать квадратичные граничные модели КФ, построенные на основе СГЛМ и КГЛМ. При этом можно значительно снизить объем реального моделирования по объекту. Использование аппроксимирующих граничных линейных моделей на основе СГЛМ и КГЛМ также позволяет снизить объем реального моделирования в среднем в 1.5 раза по сравнению с моделями СГЛМ и КГЛМ.

Список литературы

1. Сухоребрый В.Г., Стерлева А.С. Оценка вероятности разрушения пластины с отверстием// Открытые информационные и компьютерные интегрированные технологии. - Х.: НАКУ «ХАИ». – 2004. – Вып. 23. - С. – 59 - 62.
2. Сухоребрый В.Г., Стерлева А.С. Оценка качества граничных моделей для определения вероятности разрушения конструкции// Открытые информационные и компьютерные интегрированные технологии. - Х.: НАКУ «ХАИ». – 2004. – Вып. 24. - С. 242 - 249.
3. Сухоребрый В.Г., Шевцова М.А. Эффективные методы оценки вероятности разрушения самолетных конструкций.//Вопросы проектирования и производства конструкций летательных аппаратов. - Х.: ХАИ. – 1998. – Вып. 12. - С.53 - 60.
4. Лежнина М.В., Сухоребрый В.Г. Алгоритмы построения граничных линейных моделей критериальных функций для оценки вероятности работоспособности объектов аэрокосмической техники// Открытые информационные и компьютерные интегрированные технологии. - Х.: НАКУ «ХАИ». – 2002. – Вып. 12. - С. 63 - 74.
5. Сухоребрый В.Г. Статистические модели разрушения конструкций// Открытые информационные и компьютерные интегрированные технологии. - Х.: ХАИ. – 2001. – Вып. 10. - С. 89 - 95.
6. Сухоребрый В.Г., Айзенберг Е.Я. Ускоренное статистическое моделирование для оценки вероятности устойчивости динамических систем со случайными параметрами // Математическое моделирование динамических процессов в системах с жидкостью. – К.: ИМ АН УССР. – 1988. – С. 128 - 136.
7. Сухоребрый В.Г. Оценка вероятности работоспособности технических объектов с помощью ускоренного статистического моделирования// Авиационно-космическая техника и технология. - Х.: ХАИ. – 2000. – Вып. 19. - С. 215 - 218.