

Оценка влияния корреляции на хвосты распределений функций случайных аргументов

Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского «ХАИ»

Постановка проблемы, анализ проведенных исследований, цель работы

При проектировании технических объектов и систем проектировщика часто интересует оценка вероятности работоспособности проектируемого объекта [1].

Условие работоспособности проектируемого объекта можно записать в виде [2]

$$\lambda(\eta) < \Lambda, \quad (1)$$

где λ - заданная функция случайного аргумента (ФСА) (например, приведенное напряжение в расчетной точке конструкции); η - m -мерный вектор случайных разбросов параметров – случайный аргумент (например, геометрии конструкции, нагрузки и др.); Λ - ограничение (например, предел прочности для материала конструкции). Вектор η задается как вектор случайных чисел с нулевым математическим ожиданием.

Вероятность работоспособности определяется как

$$P_p = P[\lambda(\eta) < \Lambda]. \quad (2)$$

Эта вероятность должна быть достаточно высокой, соответственно вероятность нарушения условия (1) - низкой. Так, для авиационных конструкций вероятность их целостности должна быть $P_p > 0,99999$, а вероятность разрушения $Q_p = 1 - P_p < 0,00001$.

Аналогичных примеров в технических приложениях достаточно много. Таким образом, возникает задача построения хвоста распределения ФСА с приемлемой для инженерных целей точностью. Наибольшее доверие вызывает экспериментальная функция распределения, получаемая с помощью статистического моделирования. Это доверие обусловлено тем, что, задавая объем статистического моделирования, можно влиять на точность конечного результата [3].

При построении экспериментальной функции распределения используются выражения [4]

$$F^* = \frac{N - N_\Lambda}{N} \quad (\text{a}) \quad \text{или} \quad Q^* = \frac{N_\Lambda}{N} \quad (\text{b}), \quad (3)$$

где F^* - значение экспериментальной функции распределения ФСА в точке $\lambda(\eta) = \Lambda$; N - объем статистического материала, полученного с помощью статистического моделирования; N_{Λ} - число реализаций ФСА, которые в процессе статистического моделирования легли правее значения Λ ; Q^* - экспериментальная оценка вероятности того, что условие (1) будет нарушено.

Использование ускоренного статистического моделирования (УСМ) [4] позволяет весьма экономно с требуемой точностью строить хвосты распределений ФСА и, как следствие, определять вероятность работоспособности.

На практике встречаются случаи, когда компоненты вектора случайных возмущений η коррелированы (например, геометрия конструкции из композитных материалов и ее масса). Влияние этой корреляции на хвосты распределений ФСА до настоящего времени не исследовано. В то же время с помощью УСМ проведение такого исследования не является проблематичным.

Цель данного исследования – оценить влияние корреляции компонент вектора случайного аргумента η на хвосты распределений ФСА.

Основные результаты

Исследуемый объект представляет собой стержень из композиционного материала. Геометрия объекта показана на рис.1.

Номинальные размеры стержня: длина $L = 0.85$ м; высота поперечного сечения $H = 0.03$ м; ширина поперечного сечения $B = 0.015$ м. Стержень закреплен на левом конце, по правой половине стержня равномерно распределена нагрузка $Q = 5000$ Н. Материал стержня – углепластик КМУ-3Э с модулем упругости $E = 2E+11$ Н/м².

Случайные разбросы параметров (геометрии, нагрузки и свойств материала) приведены в табл.1.

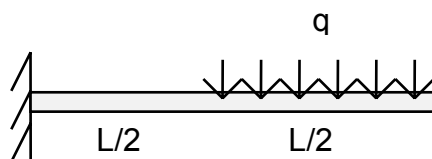


Рис. 1. Геометрия исследуемого объекта

Таблица 1

Параметр	Номинальное значение	Разброс, %
Длина L, м	0.85	9
Высота сечения h, м	0.03	9
Ширина сечения b, м	0.015	9
Нагрузка q, Н/м	5000	25
Модуль упругости E, Н/м ²	2E+11	10

Условие целостности любой конструкции можно записать в виде

$$\sigma_{\max} - \sigma_B < 0, \quad \text{или} \quad \sigma_{\max} - \eta_B < \sigma_B^0, \quad (1)$$

где σ_{\max} - максимальное эквивалентное напряжение в опасном узле конструкции; σ_B - предел прочности материала конструкции; η_B - случайный разброс предела прочности; σ_B^0 - номинальное значение предела прочности.

Условие целостности исследуемого объекта можно записать следующим образом:

$$\frac{9qL^2}{4bh^2} - \eta_B < \sigma_B^0. \quad (2)$$

Параметры конструкции и нагрузок имеют случайные разбросы (особенно если конструкция изготовлена из композиционного материала), поэтому левая часть условия (2) представляет собой функцию случайных величин. В общем виде приходим к (1).

Вектор коррелированных чисел ξ с заданной корреляционной матрицей K может быть получен путем специального линейного преобразования вектора η нормально распределенных величин по выражению [6]

$$\xi = A\eta + m \quad (3)$$

В соотношении (3) матрица A получается путем преобразования ковариационной матрицы K и является «треугольной», т.е.

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{12} & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Коэффициенты a_{ij} определяются по рекуррентной формуле

$$a_{ij} = \frac{K_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} a_{ik} a_{jk}}{\sqrt{K_{jj} - \sum_{k=1}^{j-1} a_{jk}^2}}, \quad \text{причем} \quad \sum_{k=1}^0 a_{ik} a_{jk} = 0, \quad (4)$$

где K_{ij} ($1 \leq j \leq i \leq n$) - коэффициенты ковариационной матрицы K.

Для КФ условия (2) проведены следующие исследования:

- статистическое моделирование (СМ) КФ объемом N без учета корреляции ее параметров с последующим определением вероятности разрушения для разных значений границы работоспособности σ_B^0 ;
- СМ КФ объемом N с учетом корреляции ее параметров с последующим определением вероятности разрушения для разных значений границы работоспособности;

Результаты исследований представлены в табл. 2 и 3.

Таблица 2

N	σ_B^0	Вероятность потери работоспособности при различной степени корреляции параметров L и h					
		0.1		0.5		0.8	
		без корреляции	с корреляцией	без корреляции	с корреляцией	без корреляции	с корреляцией
4000	704155354	0.0915	0.08825	0.08925	0.07075	0.09125	0.06625
40000	796277967	0.009225	0.007975	0.009425	0.0044	0.00995	0.003925
400000	870219049	0.00091	0.0006825	0.00099	0.00029	0.0009475	0.00017
4000000	934398849	0.0001	0.000064	0.0000957	0.000013	0.0000965	0.0000092
10000000	950000000	0.00004	0.0000342	0.00004	0.0000058	0.00004	0.0000037

Таблица 3

N	σ_B^0	Вероятность потери работоспособности при различной степени корреляции параметров b и h					
		-0.1		-0.5		-0.8	
		без корреляции	с корреляцией	без корреляции	с корреляцией	без корреляции	с корреляцией
4000	704155354	0.1	0.09775	0.0925	0.07925	0.0895	0.0675
40000	796277967	0.009225	0.008575	0.008825	0.00565	0.009375	0.004875
400000	870219049	0.00077	0.000675	0.000945	0.000455	0.00097	0.00032
4000000	934398849	0.0000975	0.0000775	0.0000997	0.0000325	0.0001	0.000017
10000000	950000000	0.00004	0.0000387	0.00004	0.000016	0.00004	0.0000066

Отличия в табл. 2, 3 значений вероятностей при отсутствии корреляции незначительны и связаны с повтором статистического моделирования.

По значениям, приведенным в табл. 2 и 3, построены зависимости вероятности потери работоспособности от коэффициента ковариации параметров для разных значений границ. Эти зависимости для параметров L и h изображены на рис. 1 - 5, а для параметров b и h — на рис. 6 - 10.

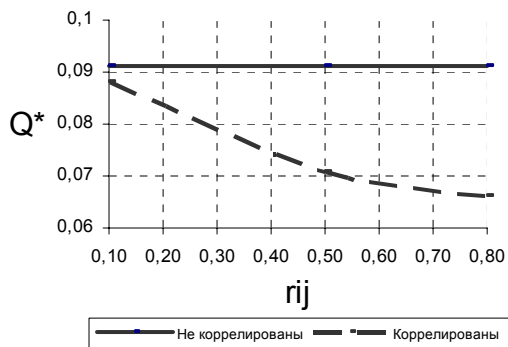


Рис. 1 ($\Lambda=704155354$)

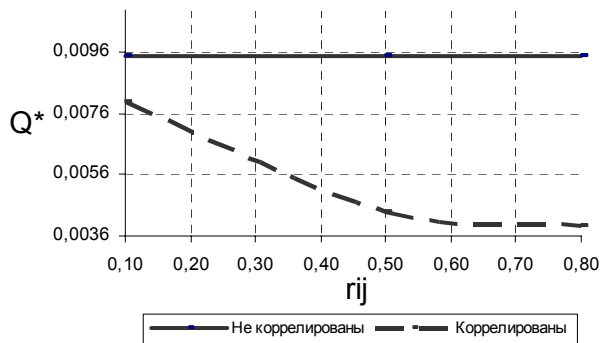


Рис. 2 ($\Lambda=796277967$)

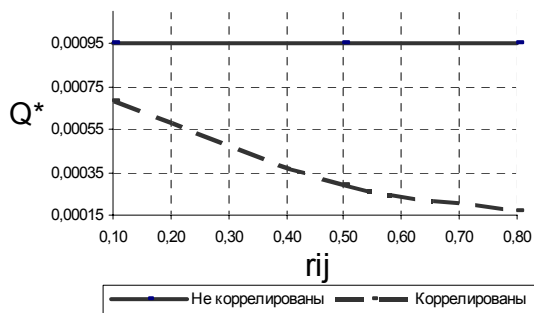


Рис. 3 ($\Lambda=870219049$)

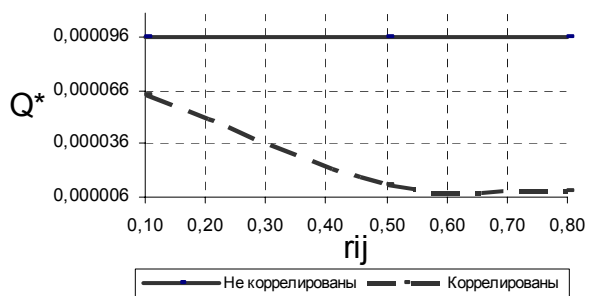


Рис. 4 ($\Lambda=934398849$)

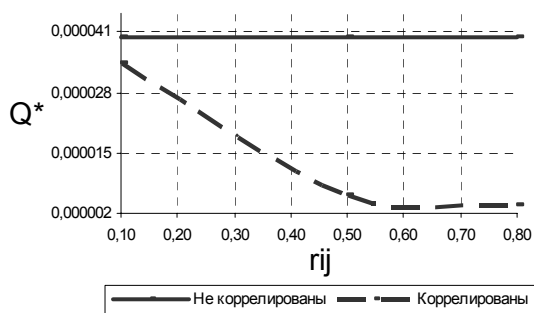


Рис. 5 ($\Lambda=950000000$)

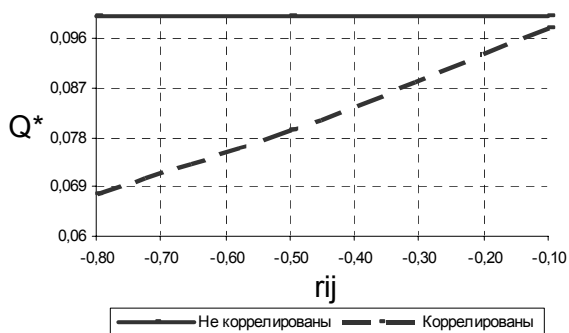


Рис. 6 ($\Lambda=704155354$)

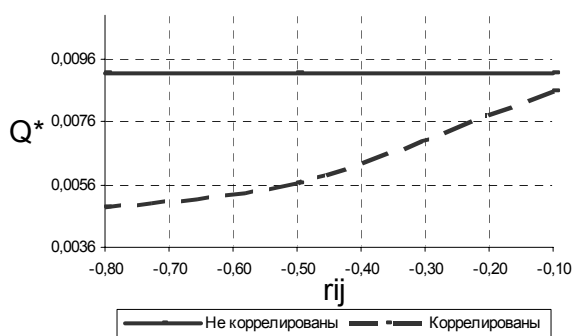


Рис. 7 ($\Lambda=796277967$)

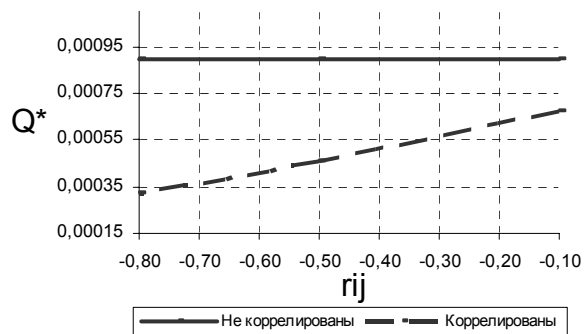


Рис. 8 ($\Lambda=870219049$)

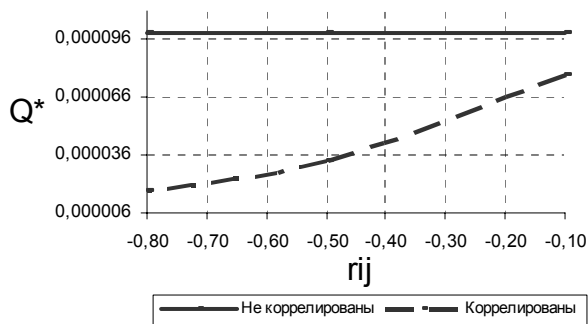


Рис. 9 ($\Lambda=934398849$)

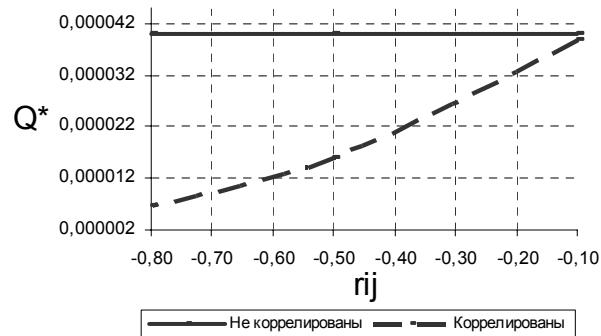


Рис. 10 ($\Lambda=950000000$)

Выводы

В результате исследований, проведенных в данной работе, можно сделать следующие выводы:

1. Корреляция компонент вектора η оказывает существенное влияние на значение вероятности потери работоспособности. Это влияние тем больше, чем больше:
 - уровень оцениваемой вероятности;
 - коэффициенты корреляции.
2. Для оценки вероятности потери работоспособности необходимо учитывать корреляцию случайных параметров, т.к. конечный результат может отличаться на порядок.

Список литературы

1. Айзенберг Я.Е., Сухоревый В.Г. Проектирование систем стабилизации носителей космических аппаратов. – М.: Машиностроение, 1986. – 224 с.
2. Сухоревый В. Г. Вероятностные методы проектирования технических объектов. – Х: ХАИ, 1990. – 103 с.
3. Сухоревый В.Г. Определение объема статистического моделирования для оценки проектной вероятности работоспособности технических объектов// Открытые информационные и компьютерные интегрированные технологии. - Х.: ХАИ. – 2000. – Вып. 7. - С. 49 - 51.
4. Сухоревый В.Г. Оценка вероятности работоспособности технических объектов с помощью ускоренного статистического моделирования// Авиационно-космическая техника и технология. - Х.: ХАИ. – 2000. – Вып. 19. - С. 215 - 218.
5. Ермаков С.М., Михайлов Г.А. Курс статистического моделирования. – М.: Наука, 1976. – 319 с.
6. Вероятностные характеристики прочности авиационных материалов и размеров сортамента: Справочник/Под ред. С.О. Охупкина. - М.: Машиностроение, 1970.- 568 с.