

Помехоустойчивая процедура для разделения пространственно-временных компонент

Национальный аэрокосмический университет им. Н. Е. Жуковского «ХАИ»

Постановка проблемы. Оптимальные технологии выделения из наблюдаемых смесей сигналов от пространственно разнесенных источников «излучения», представляющие интерес в различных технических приложениях, являются предметом исследований в течение последних двух десятков лет [1,2].

Анализ известных достижений. Ограничения традиционных максимально правдоподобных алгоритмов восстановления каждой из одновременно наблюдаемых на входах системы датчиков (приемников) компонент (сигналов) хорошо известны практикам: концепция известной формы не всегда может быть обоснована.

Выделение нерешенной проблемы. «Слепое» разделение компонент и его отдельные модификации базируются на посылаках «здравого смысла»: недостатки априорного знания о составляющих наблюдений «компенсируют» статистически сильным предположением о независимости первообразных [3]. Как следствие «здравого смысла»: матрицу преобразований исходных данных выбирают так, чтобы минимизировать функцию потерь, по возможности зависящую от кумулянтов четвертого порядка. Достоверность данных, сформированных такими технологиями, в каждой практической ситуации требует конкретных исследований, а квазиэффективность – доказательства.

Цель статьи. В настоящей работе применительно к задачам компонентного анализа для заданного диапазона неопределенности относительно формы (вида) видеосигналов при использовании основных посылок методологии максимального правдоподобия разработана вычислительная процедура для восстановления (разделения) из наблюдаемой смеси компонент, пространственно-временные параметры которых неизвестны.

Специфика задач диагностики связана с тем, что исследователь при анализе располагает, во-первых, некоторыми предварительными данными о характере видеосигналов: примерно известно множество, «ансамбль» их возможных видов. Во-вторых, область местоположений источников «стохастических» компонент ограничена геометрическим фактором и протяженностью интервала наблюдения.

Постановка задачи. С учетом указанной специфики в аналитической форме задачу восстановления при компонентном анализе формулируют так. Существует N независимых источников. В момент времени $k\Delta t$ ($k = \overline{1, K}$) на выходах M сенсоров регистрируют M -мерный вектор $U_k^T = U^T(k\Delta t) = [u_1(k\Delta t), u_2(k\Delta t), \dots, u_M(k\Delta t)]$. $u_m(k\Delta t)$ – амплитуда отсчета, зарегистрированного в k -й момент времени на выходе m -го приемника, $m = \overline{1, M}$, «Т» – знак транспонирования. Функциональная связь между вектором U_k и «фазовым» распределением $A = [A_1, A_2, \dots, A_N]$ «потенциалов»

источников, зарегистрированных сенсорами, определяется уравнением наблюдения:

$$U_k = A E_k + n_k. \quad (1)$$

Здесь $E_k = [E_1(k\Delta t), E_2(k\Delta t), \dots, E_N(k\Delta t)]^T$ – вектор отсчетов в момент времени $k\Delta t$ амплитуд независимых компонент $E_p(t)$ ($p = \overline{1, N}$), модуль $|\dot{G}(f)|$ спектра которых сосредоточен в полосе $2F$, $\Delta t = \frac{1}{2F}$. Элементы $\varphi_n^{(i)}$ ($i = \overline{1, M}$) вектора $\Lambda_n = [\varphi_n^{(1)}, \varphi_n^{(2)}, \dots, \varphi_n^{(M)}]^T$, норма $\|\Lambda_n\|$ которого равна 1, задаются как местоположением (x_n, y_n, z_n) в пространственной декартовой системе (X, Y, Z) n -го источника «излучения», так и координатами (x_m, y_m, z_m) приемных сенсоров, $\varphi_n^{(m)} = f(x_n, y_n, z_n, x_m, y_m, z_m)$ – известная функция координат датчиков и источников, $n = \overline{1, N}$, $m = \overline{1, M}$; $n_k^T = [n_1(k\Delta t), n_2(k\Delta t), \dots, n_M(k\Delta t)]$ – случайный гауссовский процесс с характеристиками

$$\begin{aligned} \langle n_k \rangle &= 0, \\ R &= \langle n_k n_t^T \rangle = \sigma_0^2 I_M \delta(k-t). \end{aligned} \quad (2)$$

$n_m(k\Delta t)$ – отсчет шума m -го сенсора, $\delta(\cdot)$ – символ Кронекера, I_M – единичная матрица размерности $M \times M$ из поля F , $I_M \in M_{M, M}(F)$, σ_0^2 – мощность помехи. Источники считаем неподвижными, а форму $E_p(t)$ ($p = \overline{1, N}$) компонент – фактором с заданной «априори» плотностью $\rho(E_K^N)$, $E_K^N = (E_1, E_2, \dots, E_K)$ из области Ω_I .

Как следствие модельных приближений: матрицу $R_N = \langle u_k u_k^T \rangle$ (размера $M \times M$) межсенсорных корреляций вектора u_k можно записать в виде:

$$R_N = A \Psi A^T + \sigma_0^2 I_M, \quad (3)$$

где $\Psi_N = \langle E_k^N (E_k^N)^T \rangle$, $\Psi_N \in M_{N, N}(F)$.

Требуется: разработать процедуру, которая позволяет по выборке $u^K = [u_1, u_2, \dots, u_K]$ выделить (восстановить) каждую компоненту $E_p(t)$ или ее дискретный эквивалент $E_p(k\Delta t)$, $p = \overline{1, N}$, $k = \overline{1, K}$, из наблюдаемого процесса.

Решение проблемы. Задача восстановления дискретного эквивалента E_K вектора $E(t) = (E_1(t), E_2(t), \dots, E_N(t))^T$, используя наблюдения u^K , в технической литературе формулируют как задачу нахождения «смешивающей» матрицы A , обеспечивающей на каждом k -ом этапе по заданному правилу оценивание E_K .

Для нахождения оценки \hat{A} детелизируем связь функции правдоподобия $W(U^K / A, R)$ с условной плотностью вероятности $W(U^K / A, R, E_K^N)$:

$$W(U^K / A, R) = \int_{\Omega_I} W(U^K / A, E_K^N, R) \rho(E_K^N) dE_K^N. \quad (4)$$

Здесь каждой точке множества Ω_I возможных E_K^N исходов случайного эксперимента ставится в соответствие конкретная реализация совокупности $\{E_k\}$ независимых случайных векторов E_k : при фиксированной A различными комбинациями $S_k = AE_k$ будут соответствовать различные точки пространства сигналов. Считая, что параметры матриц A (местоположение источников) и R постоянны в пределах интервала наблюдения $T = (K - I)\Delta t$, условная плотность $W(U^K / A, E_K, R)$ при фиксированной E_K^N запишется в традиционной форме

$$W(U^K / A, E_K, R) = (2\pi)^{-\frac{MK}{2}} |R|^{-\frac{K}{2}} \exp\left\{-\frac{1}{2} \sum_{k=1}^K (U_k - A E_k)^T R^{-1} (U_k - A E_k)\right\}. \quad (5)$$

Матрица R положительно определена, для ее детерминанта здесь использовано обозначение $|R|$. Без потери общности повествования при записи равенства (4) использовано понятие объемного интеграла по области Ω_I , отражающего факт последовательного интегрирования, кратность которого определена мерностью соответствующей плотности.

Очевидно, что норма $\|U_k - AE_k\|$ не изменится при ортогональном преобразовании вектора $v_k = U_k - AE_k$. Следовательно, если D ортогональная $(M \times M)$ матрица, и $DD^T = I_M$, то при заданной модели $R = \sigma_0^2 I_M$ невязка $\varepsilon^2 = \sum_{k=1}^K (u_k - A E_k)^T R^{-1} (u_k - A E_k)$ будет равна

$$\varepsilon^2 = \sum_{k=1}^K \{D v_k\}^T R^{-1} \{D v_k\}. \quad (6)$$

Последнее равенство при $K \gg I$ тривиально приводится к виду

$$\varepsilon^2 = K Sp \left\{ R^{-1} [\Phi - Y] \right\}. \quad (7)$$

Здесь $Sp T$ – след матрицы T , $\Phi = DSD^+ = \text{diag}(\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_M)$, $\Phi_i > 0$, $i = \overline{1, M}$;

$$S = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K u_k u_k^T; Y = DA S_N (DA)^T = \text{diag}(Y_1, Y_2, \dots, Y_M), Y_i > 0 \text{ если } i = \overline{1, N},$$

$$Y_i = 0 \text{ если } i = \overline{N+1, M}; S_N = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K E_k E_k^T.$$

Представим $(\Phi - Y)$ в виде составной матрицы как:

$$\Phi - Y = \begin{bmatrix} (\Phi_N - Y_N) & 0_{N}^{M-N} \\ 0_{M-N}^N & v_{M-N} \end{bmatrix}. \quad (8)$$

В равенстве (8): $(\Phi_N - Y_N) = \text{diag}(\Phi_1 - Y_2, \Phi_2 - Y_2, \dots, \Phi_N - Y_N)$, $\nu_{M-N} = \text{diag}(\Phi_{M-N+1}, \Phi_{M-N+2}, \dots, \Phi_M)$, нижний индекс у символа – размер соответствующей квадратной матрицы, O_m^n – нулевая $(m \times n)$ -размерная матрица.

Тогда невязка ε^2 может быть рассчитана из соотношения:

$$\varepsilon^2 = KSpR^{-1}(\Phi_N - Y_N) + KSpR_{M-N}^{-1}\nu_{M-N}. \quad (9)$$

$$R_N = \sigma_o^2 I_N, R_{M-N} = \sigma_o^2 I_{M-N}.$$

Последнее соотношение позволяет записать функцию правдоподобия $W(U^K / A, R, E_K)$ в виде произведения двух функций

$$W(U^K / A, R, E_K) = W(U^K / R_{M-N})W(U^K / A, R_N, E_K), \quad (10)$$

где

$$W(U^K / R_{M-N}) = 2\pi^{-\frac{K(M-N)}{2}} |R_{M-N}|^{-\frac{K}{2}} \exp\left\{-\frac{K}{2} SpR_{M-N}^{-1}\nu_{M-N}\right\}, \quad (11)$$

$$W(U^K / A, R_N, E_K) = 2\pi^{-\frac{KN}{2}} |R_N|^{-\frac{K}{2}} \exp\left\{-\frac{K}{2} SpR_N^{-1}(\Phi_N - Y_N)\right\}.$$

Первый сомножитель в (10) не зависит от формы $E_p(t)$ и местоположения источника. Во-вторых – величина $\frac{1}{N} SpR_N^{-1}(\Phi_N - Y_N)$ характеризует невязку между оценкой $\hat{\sigma}_0^2$ и ее истинным значением σ_0^2 . МП-оценки \hat{A} и \hat{R} , постоянных на интервале наблюдения A и R (обеспечивают максимум $W(U^K / A, R)$), являются корнями системы уравнений правдоподобия:

$$\frac{\partial W(U^K / A, R)}{\partial A} = 0, \quad \frac{\partial W(U^K / A, R)}{\partial R} = 0. \quad (12)$$

Решить их в явном виде не представляется возможным. Однако условие экстремума

$$\int_{\Omega_1} W(U^K / A, \hat{R}, E_K) p(E_K) dE_K = \max_{A, R} \quad (13)$$

может удовлетворяться, если область Ω_1 охватывает все точки пространства наблюдений, в которых $\exp\left\{-\frac{K}{2} SpR_N^{-1}(\Phi_N - Y_N)\right\}$ достигает максимального значения, равного $\exp\left\{-\frac{K}{2} SpI_N\right\}$. Это эквивалентно выполнению

$$(\Phi_N - Y_N) = \hat{\sigma}_0^2 I_N. \quad (14)$$

Из результатов работы [4] следует, что при $M \gg N$ МП-оценка $\hat{\sigma}_0^2$ может быть найдена из равенства $\hat{\sigma}_0^2 = \frac{1}{M-N} \sum_{i=M-N+1}^M \Phi_i$. Отсюда вытекает, что максимум

$W(U^K / \hat{A}, \hat{R}_N)$, где $\hat{R}_N \hat{=} \hat{=}^2 I_N$, достигается при $Z_i = (\Phi_i - Y_i) = \hat{\sigma}_i^2$, $i = \overline{1, N}$. Таким образом, «центрированное» собственное значение

$$\Phi_i^0 = \Phi_i - \hat{\sigma}_i^2 \quad (15)$$

является МП-оценкой для Y_i , $i = \overline{1, N}$.

Это, в свою очередь, означает, что вектор Z_i ($i = \overline{1, N}$), соответствующий i -му центрированному собственному числу Φ_i^0 матрицы наблюдений S является МП-оценкой i -го собственного вектора «сигнальной» компоненты $AS_N A$.

Известные свойства оценок максимального правдоподобия позволяют, во-первых, разложение Z_i по системе базовых векторов A_p записать в виде :

$$Z_i = \sum_{p=1}^N \beta_{ip} A_p + \xi_i, \quad i = \overline{1, N}. \quad (16)$$

Здесь гауссовский случайный процесс ξ_i имеет статистические характеристики: $\langle \xi_i \rangle = 0$, $\langle \xi_i \xi_j^T \rangle = \sigma_\xi^2 I_M (i - j)$. Во-вторых, вычисление \hat{A} свести к оцениванию составляющих A_p ($p = \overline{1, N}$) по результатам измерения Z_i . А именно: исходные данные на этом этапе решения задачи задаются $F = (M \times N)$ -мерным вектором T :

$$T = \beta A + \xi, \quad (17)$$

где

$$T = \begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ \vdots \\ Z_N \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_N \end{bmatrix}, \quad \xi = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_N \end{bmatrix}, \quad \beta = \begin{bmatrix} \|\beta_{11}\| & \|\beta_{12}\| & \vdots & \|\beta_{1N}\| \\ \|\beta_{21}\| & \|\beta_{22}\| & \vdots & \|\beta_{2N}\| \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \|\beta_{N1}\| & \|\beta_{N2}\| & \vdots & \|\beta_{NN}\| \end{bmatrix}, \quad (18)$$

$\|\beta_{ij}\| = \text{diag}(\beta_{ij}, \beta_{ij}, \dots, \beta_{ij})$ – диагональная вещественная матрица размера $M \times M$ ($i, j = \overline{1, M}$); $\langle \xi_i \rangle = 0$, $R_\xi = \langle \xi \xi^T \rangle = \sigma_\xi^2 I_F$. Оценки $\hat{\Lambda}_p$ составляющих A_p вектора A находим по методу максимального правдоподобия. Для этого запишем условную плотность вероятности $W(T / \beta, A, R_\xi)$ совокупности $\{Z_i\}$ относительно β, A, R_ξ так:

$$W_I(T / \beta, A, R_\xi) = 2\pi^{-\frac{1}{2}} |R_\xi|^{-\frac{1}{2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}(T - \beta A)^T R_\xi^{-1} (T - \beta A)\right\}. \quad (19)$$

Для получения оценок $\hat{\beta}$ и $\hat{\Lambda}$ потребуем, чтобы

$$\frac{\partial \ln W_I(\dots)}{\partial \beta} = 0 \quad \frac{\partial \ln W_I(\dots)}{\partial A} = 0 \quad (20)$$

в точках истинных значений β и A . Подставив (19) в (20) приходим к выводу: точки максимума $W_I(\dots)$ по β и A необходимо искать среди корней невырожденной системы уравнений связи

$$T = \beta A. \quad (21)$$

Если элементы матрицы β известны лишь приближенно, то для отыскания нормального решения системы относительно A при большом N , ($N > 3$) используют итерационные методы с соответствующей регуляризацией. При этом получают ответ в виде предела $A = \lim_{j \rightarrow \infty} A^{(j)}$ последовательности $\{A^{(j)}\}$ j элементов линейного пространства

$$A^{(j+1)} = A^{(j)} - H_j(\beta A^{(j)} - T) \quad (22)$$

с начальным приближением $A^{(0)}$

$$A^{(0)} = \begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ \vdots \\ Z_N \end{bmatrix} \quad (23)$$

и выбранным параметром H_j ($\{H_j\}$ – последовательность невырожденных матриц) [5]. В (22): $\varepsilon^{(j)} = (\beta A^{(j)} - T)$ – вектор невязки j -го цикла, $\Psi^j = A^j - A$ – ошибка между j -м приближением и точным решением. Требования $\gamma(T) = \max |\lambda_n(T)| < 1$ (λ_n – собственное число оператора шага $T = E - H_j \beta$, E – единичная матрица) выражают необходимые и достаточные условия сходимости последовательности (22). Таким образом, при выполнении достаточных условий решение системы (21) относительно A задаем как $A = \hat{A}^{j+1}$, а в качестве оценки \hat{A} используем набор уточненных Z_p^{j+1}

$$\hat{A}_{j+1} = [Z_1^{j+1}, Z_2^{j+1}, \dots, Z_N^{j+1}] \quad (24)$$

в итерационном цикле с начальным приближением \hat{A}_0

$$\hat{A}_0 = [Z_1, Z_2, \dots, Z_N]. \quad (25)$$

Для ряда технических приложений с учетом знания конкретного класса функций $\varphi_n^{(m)} = f(x_n, y_n, z_n, x_m, y_m, z_m)$ при практически достаточных мощностях видеосигналов удается найти инвариантное, относительно составляющих матрицы β , линейное преобразование $\mathcal{G} = DT$ вектора T , приводящее (в итерационном цикле) к несмещенному оцениванию параметров компонент A_n ($n = \overline{1, N}$) с показателями качества, близким к теоретически предельным [6]. Если этой возможности нет и исследователь не располагает хотя бы частичной априорной «определенностью» относительно числовых значений матрицы β , то в качестве оценки A следует принимать значение $A^{(0)}$.

Ограничиваясь классом линейных ортогональных операторов при априорной неопределенности относительно формы $E_p(t)$ для разделения компонент используем оптимально-инвариантную оценку \hat{E}_k вектора E_k в текущий момент дискретных наблюдений U_k [6]:

$$\hat{E}_k = (\hat{A}_{j+1}^T R^{-1} \hat{A}_{j+1})^{-1} \hat{A}_{j+1}^T R^{-1} U_k. \quad (26)$$

Как результат: на N выходах системы в «скользящем» времени по наблюдениям U_k может быть сформирована (по критерию среднего квадрата) линейная однородная инвариантная оценка \hat{E}_k вектора E_k , отражающая характер поведения $E(t)$ в отсчетных точках $k\Delta t$ интервала наблюдения T с начальным приближением

$$\hat{E}_k^0 = (\hat{A}_0^T R^{-1} \hat{A}_0)^{-1} \hat{A}_0^T R^{-1} U_k. \quad (27)$$

Степень квазиоптимальности разделения на $(j+1)$ -м шаге цикла определяется степенью выполнения равенства $\hat{A}_{j+1}^T A = I_N$. На эффективность процедуры оказывает влияние выбор числа K и M . Если K мало, то равенство (7) будет выполняться неточно. При $M = N$ (число сенсоров соизмеримо с числом компонент) отсутствует возможность точно оценить σ_0^2 . Кроме того, качество решений будет зависеть от степени априорной неопределенности в отношении элементов матрицы в системе (21).

Для подтверждения выводов теоретических исследований и оценки качества решений приводим один из результатов аттестации разработанной технологии разделения, полученный на примере обработки реальной электроэнцефалограммы (ЭЭГ). На рисунке 1 представлена исходная ЭЭГ пациента, зарегистрированная на 16-ти потенциальных сенсорах прибора. Номер временного отсчета исходной информации на выходе соответствующего сенсора указан на оси абсцисс. Числовое значение на оси ординат – величина мгновенной амплитуды процесса. На рисунке 2 – результат разделения, полученный с использованием синтезированной технологии при условии $\hat{\Lambda} = \Lambda^{(0)}$. Кривые, приведенные на рисунке 3, иллюстрируют (для сопоставления) возможности обработки ЭЭГ упомянутого пациента с помощью алгоритма ICA [7].

Здесь номер выделенной компоненты соответствует номеру «канала» (номеру сенсора), ее «координата» – местоположение на временной оси (ось абсцисс). На всех рисунках единые единицы измерения и масштаб, нумерация каналов: сверху вниз.

Выводы

Анализ результатов позволяет констатировать. Несмотря на то, что выделенные из наблюдений компоненты цитируемой технологией имеют различную оцифровку на рис. 2 и 3, их условное местоположение и форма практически одинаковы. Интенсивность видеосигналов отличается на 10 – 15 %, что в пределах ошибок полунатурного эксперимента.

Таким образом, синтезированная технология разделения реальных компонент отвечает критерию максимальной достоверности, работоспособности в условиях сильной априорной неопределенности, может быть использована в широком круге диагностической практики.

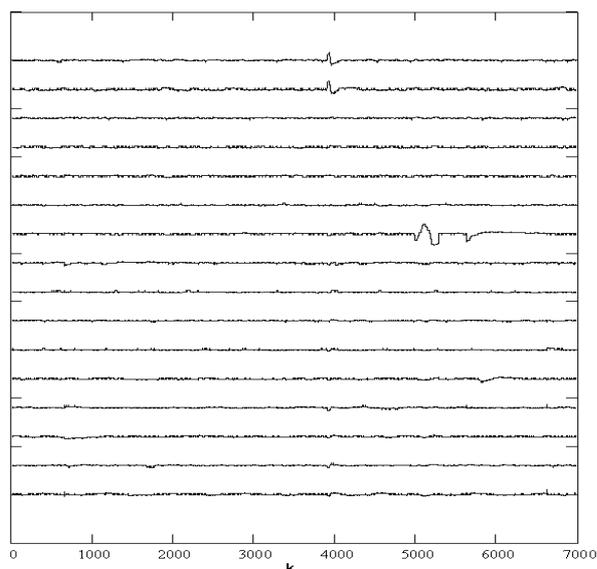


Рис. 1. Исходная ЭЭГ

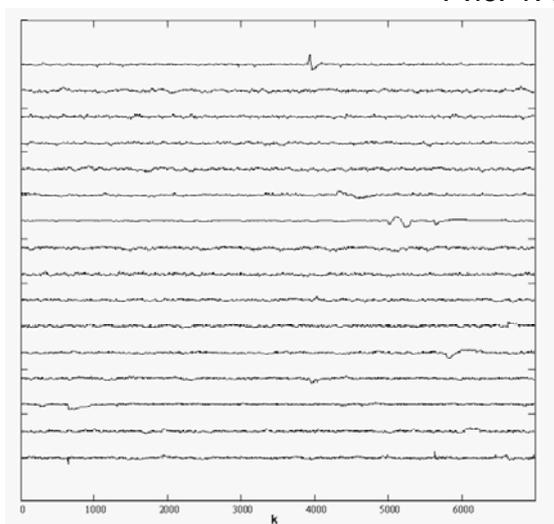


Рис.2. Результат выполнения алгоритма ICA

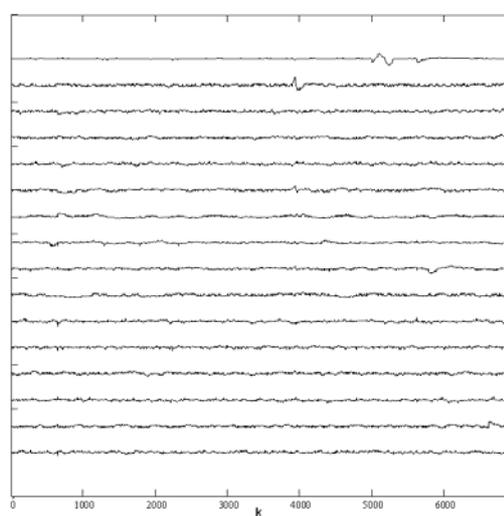


Рис.3. Результат выполнения предложенного алгоритма

Список литературы

1. Ефименко В. С., Харисов В. Н. Оптимальные алгоритмы разделения пространственно-разнесенных источников излучения // Радиотехника. - 1996. - №7. - С. 87-95.
2. Гнездицкий В.В. Обратная задача ЭЭТ и клиническая электроэнцефалография. - М.: Наука. - 2000. – 600 с.
3. J.-F. Cardoso. Source separation using higher order moments. In Proc. IEEE Int. Conf. on Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP'89), pages 2109-2112, Glasgow, UK, 1989.
4. Абрамов. А.Д. Нежальский Р.В. Экспериментальное исследование определителя числа одновременно наблюдаемых компонент с неизвестными параметрами // Радиоелектронні і комп'ютерні системи. 2004. № 2 (6). С. 27-32.
5. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. _ М.: Наука, 1974.
6. Иванов Ю.П. Комплексная фильтрация и классификация сигналов. – Л.: Изд-во Ленинградского университета, 1988. – 212 с.