УДК 629.7.01 М.В. Лежнина

Оценка вероятности устойчивости ракеты-носителя путем аппроксимации хвостов распределения КФ по статистическому материалу малого объема

Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского «ХАИ»

Постановка проблемы, анализ проведенных исследований, цель работы

В работе [1] показано, что распределение хвостов распределений функций случайных аргументов при наличии ограниченного объема статистического материала достаточно хорошо можно аппроксимировать тремя законами распределения:

- нормальным;
- логарифмически нормальным;
- законом экстремальных значений.

Полученные в работе [1] результаты основаны на исследовании функции случайного аргумента, имеющей заранее известное распределение – распределение Коши. Это позволило значения функций распределения, полученные с помощью аппроксимирующих законов распределения сравнить с точными теоретическими значениями и на основании такого сравнения сделать достаточно аргументированные выводы и рекомендации. Однако эффективность полученных таким образом рекомендаций требует подтверждения своей эффективности при использовании для целей получения оценки вероятности устойчивости РН при наличии статистического материала ограниченного объема.

Возможность распространения рекомендаций работы [1] необходимо проверить на реальном примере исследования устойчивости РН. Этот пример может быть в значительной мере упрощенным, но физически он должен правильно отображать основное влияние случайных разбросов параметров РН и АС на устойчивость движения РН. Такой пример позволит провести статистическое моделирование большого объема и получить достаточно точную «эталонную» оценку вероятности устойчивости.

С целью подтверждения приемлемости рекомендаций работы [1] для оценки вероятности устойчивости РН проведены исследования, результаты которых излагаются в настоящей статье. В качестве исследуемой критериальной функции (КФ) принята левая часть условия устойчивости РН.

Объект исследования

Движение статически неустойчивой ракеты-носителя (РН) в канале рыскания, устойчивость которой обеспечивается с помощью автомата стабилизации (АС), упрощенно можно описать следующей системой дифференциальных уравнений [2]:

$$\dot{\phi} = a_{\phi\phi}\phi + a_{\phi\delta}\delta,$$
$$\dot{z} = a_{z\phi}\phi + a_{z\delta}\delta, \qquad (1)$$
$$T_1\dot{\delta} + \delta = K_\phi \phi_g + K_{\dot{\phi}}\dot{\phi}_g - K_{\dot{Z}}\dot{z},$$

где ϕ- отклонение угла рыскания ракеты как твердого тела от программного значения; z- отклонение центра масс от программного значения; δ- угол отклонения управляющих органов; a_{ij}- коэффициенты, отражающие изменения параметров ракеты; T_1 - постоянная времени АС; K_ϕ- коэффициент усиления по каналу рыскания, $K_{\dot{\phi}} = T_d K_\phi$; T_d- постоянная времени дифференцирования; $K_{\dot{Z}}$ - коэффициент усиления по скорости отклонения центра масс. Параметры a_{ij}, T_1, T_2, K_ϕ, $K_{\dot{\phi}}$, T_d имеют существенные случайные разбросы.

Исследуем условие устойчивости системы (1) по «нижней границе» [5]:

$$\frac{(K_\phi |a_{Z\delta}| + |a_{Z\phi}|)K_{\dot{Z}} + a_{\phi\phi}K_\phi(T_d - T_1)}{|a_{\phi\delta}| K_\phi^2 (T_d - T_1)} < 1. \qquad (2)$$

Значения параметров и их разбросов для условия (2) указаны в табл.1.

Таблица 1

№ п/п	Обозначение параметра	Обозначение разброса	Величина	Размерность	Разброс
1	K_ϕ	η_1	14	-	30
2	$K_{\dot{Z}}$	η_2	0,009	рад.м$^{-1}$	50
3	T_d	η_3	0,5	с	20
4	T_1	η_4	0,1108	с	40
5	$a^0_{z\delta}$	η_5	-1,441	мс$^{-2}$	20
6	$a^0_{z\psi}$	η_6	-36,09	мс$^{-2}$	10
7	$a^0_{\psi\psi}$	η_7	1,8113	с$^{-2}$	50
8	$a^0_{\psi\delta}$	η_8	-0,295	с$^{-2}$	20

Основные результаты

В работе [3] для этого примера проведено статистическое моделирование в объеме N = 50 000 000 и получено значение оценки вероятности устойчивости P_y = 0,9^{5}77. Данное значение можно принять в качестве эталонного, т.к. погрешность его пренебрежимо мала (для доверительной вероятности $P_д$ = 0,95, доверительный интервал равен $\pm 2{,}3 \bullet 10^{-13}$.), оно практически совпадает с теоретическим.

КФ (левая часть условия устойчивости (2)) рассматриваемого примера подвергнута статистическому моделированию в объемах N = 100; 200; 500. Упорядоченные по возрастанию хвосты полученного статистического материала приведены в табл. 2.

Таблица 2

N = 500			N = 200			N = 100		
i	λ_i	F*(λ_i)	i	λ_i	F*(λ_i)	i	λ_i	F*(λ_i)
483	0.5989	0.966						
484	0.6017	0.968						
485	0.6035	0.970						
486	0.6047	0.972						
487	0.6068	0.974						
488	0.6126	0.976						
489	0.6128	0.978	189	0.6000	0.945			
490	0.6180	0.980	190	0.6003	0.95			
491	0.6213	0.982	191	0.6046	0.955			
492	0.6219	0.984	192	0.6106	0.96			
493	0.6219	0.986	193	0.6156	0.965			
494	0.6368	0.988	194	0.6208	0.97	94	0.6003	0.94
495	0.6491	0.990	195	0.6211	0.975	95	0.6106	0.95
496	0.6562	0.992	196	0.6239	0.98	96	0.6156	0.96
497	0.6626	0.994	197	0.6379	0.985	97	0.6208	0.97
498	0.6633	0.996	198	0.6618	0.99	98	0.6211	0.98
499	0.6825	0.998	199	0.6879	0.995	99	0.6879	0.99
500	0.7348	1.000	200	0.6898	1.00	100	0.6898	1.00

В табл. 2 i – номер реализации КФ в упорядоченной статистической совокупности; λ_i - i-я реализация КФ в упорядоченной статистической совокупности; F*(λ_i) – значение статистической функции распределения, соответствующее i-й реализации КФ в упорядоченной статистической совокупности.

С целью определения зависимости результата аппроксимации от объема статистического материала проведена аппроксимация хвостов распределений нормальным законом распределения для всех объемов и различных, достаточно произвольно выбранных, комбинаций пар квантилей. Сравнение результатов проведено путем сравнения безразмерных аргументов функции Гаусса U_{yi}, соответствующих определенной с помощью аппроксимирующих законов распределения вероятности устойчивости. При этом следует иметь в виду, что для эталонного значения вероятности устойчивости при нормальном законе распределения безразмерный аргумент функции Гаусса U_y = 4,59. Результаты аппроксимации приведены в табл. 3.

Таблица 3

N	Вариант	λ_1	λ_2	$F^*(\lambda_1)$	$F^*(\lambda_2)$	U_1^*	U_2^*	U_{yi}
100	1	0.6106	0.6879	0.95	0.99	1.65	2.33	5.07
	2	0.6003	0.6211	0.94	0.98	1.56	2.06	11.17
	3	0.6208	0.6879	0.97	0.99	1.88	2.33	4.42
	4	0.6003	0.6879	0.94	0.99	1.56	2.33	5.07
200	1	0.6239	0.6879	0.98	0.995	2.06	2.58	5.11
	2	0.6046	0.6618	0.955	0.99	1.71	2.33	6.0
	3	0.6379	0.6879	0.985	0.995	2.17	2.58	5.13
	4	0.6003	0.6618	0.95	0.99	1.65	2.33	6.0
500	1	0.6035	0.6825	0.97	0.998	1.89	2.88	6.8
	2	0.6368	0.6825	0.988	0.998	2.26	2.88	7.15
	3	0.6626	0.6825	0.994	0.998	2.52	2.88	8.5
	4	0.6180	0.6491	0.98	0.99	2.06	2.33	5.38

Анализ данных табл. 3 показывает, что закономерность зависимости результатов аппроксимации от объема статистического материала выявить не удается. Однако из материалов этой таблицы следует, что для объема статистического материала N = 100 результаты в большей степени зависят от выбора пары точек, по которым проводится аппроксимация. Для более полного анализа в табл. 4 для каждого из объемов статистического материала приведены:

- максимальные значения безразмерных аргументов (мах U_{yi});
- минимальные значения безразмерных аргументов (min U_{yi});
- средние значения безразмерных аргументов (среднее U_{yi});
- значения безразмерных аргументов, полученные путем обработки статистического материала методами классической теории вероятностей (статистическое U_{yi}).

Таблица 4

N	100	200	500
Min U_{yi}	4.42	5.11	5.38
Max U_{yi}	11.17	6.0	8.5
Среднее U_{yi}	6.43	5.56	6.96
Статистическое U_{yi}	6.44	6.76	7.34

Эти данные свидетельствуют о следующем:

- для объемов статистического материала $N \geq 200$ результаты аппроксимации имеют достаточную стабильность и меньше зависят от выбора точек аппроксимации;
- с целью получения стабильного результата аппроксимации ее следует проводить по нескольким наборам точек, используя среднее значение (в нашем примере - «среднее U_{yi}»).

Поскольку зависимости результатов аппроксимации от объема статистического материала выявить не удается, для определения наиболее приемлемого аппроксимирующего закона распределения хвостов КФ условия устойчивости примем объем N = 200. Для этого статистического материала выбрано три комплекта точек аппроксимации (табл. 5).

Таблица 5

Номер варианта	λ_1	λ_2	$F^*(\lambda_1)$	$F^*(\lambda_2)$	U_1^*	U_2^*
1	0.6239	0.6879	0.98	0.995	2.06	2.58
2	0.6046	0.6618	0.955	0.99	1.71	2.33
3	0.6379	0.6879	0.985	0.995	2.17	2.58

Для данных табл. 5 проведена аппроксимация хвостов четырьмя законами распределения:

- нормальным;
- Ln – нормальным;
- законом экстремальных значений;
- экспоненциальным.

Результаты аппроксимации и последующего определения приведенного безразмерного аргумента функции Гаусса и его среднего значения для выбранных комплектов точек аппроксимации приведены в табл. 6.

Таблица 6

Аппроксимирующий закон распределения	Нормальный			Ln-нормальный			Экстремаль-ный			Экспоненци-альный		
Номер варианта	1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3
U_{yi}	5.11	6.0	5.13	4.56	5.17	4.62	4.72	4.4	4.4	3.12	2.8	3.18
U_{ys}	5.41			4.78			4.51			3.03		

В табл. 6 U_{ys}- среднее значение безразмерных аргументов U_{yi} по вариантам.

Материалы оценки вероятности устойчивости с помощью аппроксимирующих логарифмически нормального закона и закона распределения экстремальных значений приведены в табл. 7.

Таблица 7

Аппроксимирующий закон распределения	Ln - нормальный			Экстремальный		
Номер варианта	1	2	3	1	2	3
P_{yi}	$0.9^5 74$	$0.9^7 04$	$0.9^5 81$	$0.9^5 88$	$0.9^5 46$	$0.9^5 46$
P_{ys}	$0.9^5 85$			$0.9^5 60$		

В табл. 7 P_{yi} - оценка вероятности устойчивости для *i*–го варианта; P_{ys} - среднее значение оценки вероятности устойчивости по вариантам.

Данные табл. 6 и 7 подтверждают результаты, полученные выше на абстрактном примере КФ, подчиненной закону распределения Коши, о том, что при аппроксимации хвостов распределений КФ по малому объему статистического материала предпочтение следует отдать логарифмически нормальному закону и закону распределения экстремальных значений.

Кроме того, анализ данных табл. 7 показывает следующее:

- для закона распределения экстремальных значений оценка вероятности устойчивости в меньшей мере зависит от выбранного комплекта точек аппроксимации;
- для закона распределения экстремальных значений оценка вероятности устойчивости наилучшим образом согласуется с эталонным значением.

Таким образом, из двух названных законов наиболее рационально использовать закон распределения экстремальных значений. Такой вывод представляется вполне естественным, т.к. проводит параллель между хвостами функций случайных аргументов и экстремальными значениями случайных функций [4].

На основании полученных результатов целесообразно исследовать качество аппроксимации хвостов распределений КФ законом распределения экстремальных значений для всех вариантов, приведенных в табл. 3. Результаты этого исследования приведены в табл. 8.

Таблица 8

N	Вариант	$1/F^*(\lambda_1)$	$1/F^*(\lambda_2)$	σ	m	P_{yi}	P_{ys}
100	1	1.053	1.010	0.0471	0.147	$0.9^4 87$	$0.9^4 89$
	2	1.064	1.020	0.0183	0.549	$0.9^{10} 81$	
	3	1.031	1.010	0.0600	0.411	$0.9^4 81$	
	4	1.064	1.010	0.0479	0.467	$0.9^4 87$	
200	1	1.047	1.010	0.0373	0.490	$0.9^5 88$	$0.9^5 67$
	2	1.020	1.005	0.0464	0.442	$0.9^5 46$	
	3	1.015	1.005	0.0457	0.446	$0.9^5 46$	
	4	1.053	1.010	0.0375	0.489	$0.9^5 88$	
500	1	1.031	1.002	0.0290	0.502	$0.9^7 65$	$0.9^5 89$
	2	1.012	1.002	0.0263	0.521	$0.9^7 88$	
	3	1.006	1.002	0.0182	0.570	$0.9^{10} 49$	
	4	1.020	1.010	0.0452	0.441	$0.9^5 57$	

Помимо ранее введенных обозначений в табл. 4.8 символами σ и m обозначены параметры закона распределения экстремальных значений для соответствующих вариантов точек аппроксимации.

Анализ данных табл. 8 подтверждают сделанные ранее следующие выводы:

- для объемов статистического материала $N \geq 200$ результаты аппроксимации имеют достаточную стабильность и меньше зависят от выбора точек аппроксимации;
- с целью получения стабильного результата аппроксимации ее следует проводить по нескольким наборам точек, используя среднее значение оценки вероятности устойчивости;
- для закона распределения экстремальных значений оценка вероятности устойчивости в меньшей мере зависит от выбранного комплекта точек аппроксимации;
- для закона распределения экстремальных значений оценка вероятности устойчивости наилучшим образом согласуется с эталонным значением.

Кроме того, анализ этих данных свидетельствует о том, что на ранних стадиях проектирования РН закон распределения экстремальных значений может использоваться в качестве аппроксимирующего для оценки вероятности устойчивости по статистическому материалу малого объема ($N < 200$).

Автор приносит благодарность М.И. Никифоровой, предоставившей статистический материал, на основании которого получены приведенные выше результаты.

Список литературы

1. Сухоребрый В.Г. Аппроксимация хвостов распределений статистического мавтериала для оценки вероятности работоспособности объектов аэрокосмической техники // Открытые информационные и компьютерные интегрированные технологии. - Х.: НАКУ «ХАИ». – 2003. – Вып. 18. - С. 35 - 40.

2. Игдалов И.М., Кучма Л.Д., Поляков Н.В., Шептун Ю.Д. Ракета как объект управления: Учебник /Под ред. акад. С.Н. Конюхова. – Д.: АРТ-ПРЕСС, 2004. – 544 с.

3. Сухоребрый В.Г., Никифорова М.И. Оценка эффективности ускоренного статистического моделирования для определения проектной вероятности устойчивости ракеты-носителя // Открытые информационные и компьютерные интегрированные технологии. - Х.: НАКУ «ХАИ». – 2006. – Вып. 30. - С. 42-49.

4. Гумбель Э. Статистика экстремальных значений. – М.: Мир, 1965. – 451 с.