УДК 681.5:517.2
Е.Н. Коробкова, Ю.И. Ялинич

Разработка и анализ алгоритма нахождения ориентированных и неориентированных булевых производных

Белгородский государственный технологический университет им. В.Г. Шухова, Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского «ХАИ»

Постановка проблемы. При решении различных задач анализа цифровых систем, декомпозиции булевых функций, лежащей в основе методов многоуровневого синтеза, а также при разработке диагностирующих тестов широкое распространение получил аппарат булева дифференциального исчисления [1,2,3]. Наиболее сложной процедурой в решении этих задач является нахождение булевых производных различного типа. Выбор рационального метода нахождения производных из всех известных или разработка новых методов, наиболее полно удовлетворяющих требованиям той или иной задачи, может значительно упростить её решение.

Анализ исследований и публикаций, посвящённых данному вопросу, показал, что большинство способов нахождения функций чувствительности основано на непосредственном использовании аналитических соотношений, определяющих эти функции [1,4]. Однако в случае большого числа переменных эти способы довольно трудоёмки даже при их машинной реализации.

В [5] предложен алгоритм нахождения ориентированных и неориентированной производных, основанный на преобразовании области определения логической функции $F(X)$ в область определения производных с последующим представлением их в любой из форм. Предложенный алгоритм предельно прост как при машинной, так и при ручной его реализации.

Цель статьи – дальнейшее развитие алгоритма, предложенного в [5], путём рассмотрения задачи с позиций теоретико-множественного представления области определения функции и её производных.

Метод решения. Предлагаемая версия алгоритма основана на представлении области определения заданной функции $F(X)$ в виде модифицированной декомпозиционной карты.

Основным понятием булева дифференциального исчисления является булева производная функции $F(X)$ по переменной x_i ($X = \{x_{n-1}x_{n-2}...x_1x_0\}$, $x_i \in X$). Это понятие впервые введено в [4] следующим образом:

$$\frac{\partial F(X)}{\partial x_i} = F(X) \oplus F(\overline{x}_i),$$

где $F(\overline{x}_i) = F(x_{n-1}x_{n-2}...x_{i+1}\overline{x}_i x_{i-1}...x_0)$.

Булева производная функции $F(X)$ по переменной x_i равна единице тогда и только тогда, когда при изменении значения переменной x_i на противоположное (с нуля на единицу или с единицы на нуль) функция $F(X)$ также изменяет своё значение. Поскольку булева производная отражает только факт изменения значения функции при изменении значения одного из её аргументов без учёта направления изменения аргумента, то очень часто производную называют неориентированной. Большинство известных способов нахождения булевых производных основано на непосредственном использовании приведенного выражения или на представлении этого выражения в ДНФ:

$$\frac{\partial F(X)}{\partial x_i} = F(X)\cdot\overline{F(\overline{x}_i)} \vee \overline{F(X)}\cdot F(\overline{x}_i).$$

Все эти способы довольно громоздки, особенно в случае нахождения производных по всем переменным, поскольку они требуют представления функций $F(X)$, $\overline{F(X)}$, $F(\overline{x}_i)$, $\overline{F(\overline{x}_i)}$ в аналитическом виде с последующим перемножением соответствующих функций и логическим суммированием полученных произведений.

Первое произведение представленного в правой части выражения обычно называют убывающей частной производной функции $F(X)$ по переменной x_i , обозначая её как

$$\frac{\partial^1 F(X)}{\partial x_i} = F(X)\cdot\overline{F(\overline{x}_i)},$$

а второе – возрастающей частной производной функции $F(X)$ по переменной x_i, обозначая её как

$$\frac{\partial^0 F(X)}{\partial x_i} = \overline{F(X)}\cdot F(\overline{x}_i).$$

Поскольку эти производные отражают не только факт изменения функции при изменении одного из её аргументов, но и направление этого изменения, то эти производные обычно называют ориентированными. Известные аналитические способы нахождения ориентированных частных булевых производных, основанные на непосредственном использовании приведенных выражений, также довольно сложны.

В математике известен способ, получивший название метода перевода, суть которого состоит в том, что если не предоставляется возможность решить какую-то задачу, исходя из её представления, или если возможное решение очень сложно, то её заменяют взаимно однозначной ей задачей, решение которой проще, а затем полученное решение переводят на язык исходной задачи, получая решение этой задачи. Применим подобный подход для разработки такого способа нахождения булевых производных, который не требует аналитических представлений и преобразований, приведенных в представленных выше формулах, задающих эти производные.

Способ основан на сжатии области определения заданной функции по переменной, по которой необходимо найти производную того или другого типа. При сжатии области определения заданной функции $F(X)$ по переменной x_i значения функции в точках сжатой области будут определяться не только константами 0 и 1, но и литералами переменной x_i ($\tilde{x}_i = \{\overline{x}_i, x_i\}$).

Представленную таким образом функцию можно рассматривать как упорядоченное множество, образованное 2^{n-1} одноэлементными подмножествами, каждое из которых представляет собой нуль, единицу или один из литералов переменной x_i, т.е. $F(X) = \{0,1,\tilde{x}_i\}$.

Инверсное значение функции $\overline{F(X)}$ в той же самой области определения можно представить инверсией её значений в каждой точке. Следовательно, его также можно рассматривать в виде множества, образованного 2^{n-1} одноэлементными подмножествами, каждое из которых инверсно по отношению к исходным, т.е. $\overline{F(X)} = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{\tilde{x}}_i\}$.

Функция $F(\bar{x}_i)$ в соответствующих точках сжатой области определения представлена инверсией её литералов и теми же константами, в связи с чем и её можно рассматривать в виде множества, образованного 2^{n-1} одноэлементными подмножествами $F(\bar{x}_i) = \{0, 1, \bar{\tilde{x}}_i\}$.

Функция $\overline{F(\bar{x}_i)}$ в сжатой области определения представлена инверсией её значений в соответствующих точках по отношению к значениям функции $F(\bar{x}_i)$, следовательно, её также можно рассматривать как множество, образованное 2^{n-1} одноэлементными подмножествами, каждое из которых инверсно по отношению к подмножествам функции $F(\bar{x}_i)$, т.е. $\overline{F(\bar{x}_i)} = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{\bar{\tilde{x}}}_i\}$.

Двойное отрицание литерала равно исходному литералу, поэтому приведенное множество можно представить как $\overline{F(\bar{x}_i)} = \{\bar{0}, \bar{1}, \tilde{x}_i\}$.

Предложенное представление соответствующих функций ($F(X)$, $\overline{F(X)}$, $F(\bar{x}_i)$, $\overline{F(\bar{x}_i)}$) в форме множеств позволяет каждому из произведений, определяющих ориентированные частные производные, поставить в соответствие поэлементные пересечения множеств.

Под поэлементным пересечением множеств будем понимать результирующее множество, образованное одноэлементными подмножествами, каждое из которых представляет собой пересечение соответствующих одноэлементных подмножеств, образующих исходные множества.

Поскольку исходные одноэлементные подмножества – это константы $0, 1$, их инверсии ($\bar{0}, \bar{1}$), а также литералы $\tilde{x}_i$ или инверсии этих литералов ($\bar{\tilde{x}}_i$), то в результате поэлементного пересечения соответствующих подмножеств могут иметь место только лишь следующие ситуации: $0 \cap \bar{0} = 0$, $1 \cap \bar{1} = 0$, $0 \cap 0 = 0$, $1 \cap 1 = 1$, $\tilde{x}_i \cap \tilde{x}_i = \tilde{x}_i$, $\bar{\tilde{x}}_i \cap \bar{\tilde{x}}_i = \bar{\tilde{x}}_i$, $\tilde{x}_i \cap \bar{\tilde{x}}_i = 0$.

Представим ориентированные частные производные в виде множеств, образованных поэлементным пересечением соответствующих множеств, т.е.

$$\frac{\partial^1 F(X)}{\partial x_i} = F(X) \cdot \overline{F(\bar{x}_i)} = \{0, 1, x_i\} \cap \{\bar{0}, \bar{1}, x_i\} = \{0, 0, x_i\};$$

$$\frac{\partial^0 F(X)}{\partial x_i} = \overline{F(X)} \cdot F(\bar{x}_i) = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{\tilde{x}}_i\} \cap \{0, 1, \bar{\tilde{x}}_i\} = \{0, 0, \bar{\tilde{x}}_i\}.$$

Сравнивая полученные представления ориентированных частных производных в форме множеств с аналогичным представлением функции $F(X)$, можно сформулировать алгоритм представления этих производных в области определения, сжатой по переменной, по которой находится производная.

Для представления убывающей частной производной функции $F(X)$ по переменной x_i необходимо исходную область определения функции $F(X)$ сжать по переменной x_i. Затем полученные единичные значения в точках сжатой области определения заменить нулевыми, оставляя неизменными нулевые значения и значения литералов.

Для представления возрастающей частной производной функции $F(X)$ по переменной x_i следует исходную область определения функции $F(X)$ сжать по переменной x_i. Затем полученные единичные значения в точках сжатой области определения заменить нулевыми, а значения полученных литералов заменить противоположными, оставляя неизменными нулевые значения.

Неориентированную частную производную можно было бы найти, выполнив операцию логического сложения полученных неориентированных производных с последующим преобразованием этой суммы. Однако задачу можно упростить, если опять подойти к решению с позиций теоретико-множественного представления, поставив в соответствие операции логического сложения операцию поэлементного объединения множеств, соответствующих убывающей и возрастающей частным производным. Под поэлементным объединением множеств будем понимать множество, образованное объединением соответствующих одноэлементных подмножеств, образующих исходные объединяемые множества.

В результате такого объединения получаем

$$\frac{\partial F(X)}{\partial x_i} = \frac{\partial^1 F(X)}{\partial x_i} \vee \frac{\partial^0 F(X)}{\partial x_i} = \{0, 0, \tilde{x}_i\} \bigcup \{0, 0, \bar{\tilde{x}}_i\}.$$

Анализируя приведенное выражение, замечаем, что при выполнении операции поэлементного объединения будут иметь место только две ситуации: $0 \bigcup 0 = 0$ и $\tilde{x}_i \bigcup \bar{\tilde{x}}_i = 1$, следовательно, множества, соответствующие неориентированной частной производной, можно представить следующим образом:

$$\frac{\partial F(X)}{\partial x_i} = \{0, 0, \tilde{x}_i\} \bigcup \{0, 0, \bar{\tilde{x}}_i\} = \{0, 0, 1\}.$$

Сравнивая полученное представление неориентированной частной производной с представлением функции $F(X)$ в области определения, сжатой по переменной x_i, можно также сформулировать алгоритм её представления в этой области.

Для представления неориентированной частной производной функции $F(X)$ по переменной x_i необходимо исходную область определения заданной функции $F(X)$ сжать по переменной x_i. Затем полученные единичные значения в точках сжатой области определения заменить нулевыми, а значения литералов заменить единичными значениями, оставляя нулевые значения неизменными.

При выполнении операции сжатия области определения заданной функции предпочтение следует отдать версии алгоритма сжатия, основанной на представлении заданной функции в декомпозиционной карте, как наиболее простой и наглядной с позиций теоретико-множественного представления.

В целях обеспечения возможности представления в точках сжатой области определения не только значений заданной функции, но и всех её частных производных, предлагается модифицированная декомпозиционная карта, отличающаяся от ранее рассмотренных наличием дополнительных строк для представления значений: $F(X)$, $\frac{\partial^1 F(X)}{\partial x_i}$, $\frac{\partial^0 F(X)}{\partial x_i}$, $\frac{\partial F(X)}{\partial x_i}$.

В общем случае собственно декомпозиционная карта, как и ранее рассмотренные, представляет собой таблицу, состоящую из двух информационных строк, окрашенных интервалами значений переменной x_i, и 2^{n-1} столбцов, окрашенных интервалами значений переменных подмножества $X_2 = X \setminus x_i$.

Вдобавок к двум информационным строкам вводим пять вспомогательных строк для представления: номеров точек сжатой области (от 0 до $2^{n-1}-1$); значений функции $F(X)$ в точках сжатой области определения; значений убывающей частной производной; значений возрастающей частной производной и строки для представления неориентированной частной производной.

При такой организации декомпозиционной карты номер столбца i, определяемый значениями переменных подмножества X_2, даёт номер точки сжатой области определения. Значения заданной функции, представленные в каждом таком столбце, определяют её значения в точках сжатой области в виде нуля, единицы, $\overline{x}_i$ или x_i. Анализ полученных значений функции позволяет найти соответствующие значения производных в соответствии со сформулированным выше алгоритмом.

Анализ предложенного алгоритма проведём на примере нахождения ориентированных и неориентированных частных производных некоторой функции от пяти переменных, заданной номерами единичных наборов:

$F(X)$: {2,4,5,6,9,10,13,15,16,17,18,19,22,23,24,28,31}.

Анализ методики нахождения ориентированных и неориентированной частных производных проведём только по одной из переменных .

Модифицированная декомпозиционная карта для варианта нахождения производных по переменной x_0 показана на рис. 1 (аналогичным образом может быть представлена карта при нахождении производных по любым другим переменным).

x_4
x_3
x_2
x_1

x_0																	
	0 (0)	1 (2)	1 (4)	1 (6)	0 (8)	1 (10)	0 (12)	0 (14)	1 (16)	1 (18)	0 (20)	1 (22)	1 (24)	0 (26)	1 (28)	0 (30)	0
	0 (1)	0 (3)	1 (5)	0 (7)	1 (9)	0 (11)	1 (13)	1 (15)	1 (17)	1 (19)	0 (21)	1 (23)	0 (25)	0 (27)	0 (29)	1 (31)	1
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	j / i
	0	$\overline{x}_0$	1	$\overline{x}_0$	x_0	$\overline{x}_0$	x_0	x_0	1	1	0	1	$\overline{x}_0$	0	$\overline{x}_0$	x_0	$F(X)$
	0	$\overline{x}_0$	0	$\overline{x}_0$	x_0	$\overline{x}_0$	x_0	x_0	0	0	0	0	$\overline{x}_0$	0	$\overline{x}_0$	x_0	$\frac{\partial' F(X)}{\partial x_0}$
	0	x_0	0	x_0	$\overline{x}_0$	x_0	$\overline{x}_0$	$\overline{x}_0$	0	0	0	0	x_0	0	x_0	$\overline{x}_0$	$\frac{\partial^0 F(X)}{\partial x_0}$
	0	1	0	1	1	1	1	1	0	0	0	0	1	0	1	1	$\frac{\partial F(X)}{\partial x_0}$

Рис. 1. Декомпозиционная карта функции и её производных по переменной x_0

Полученное представление значений ориентированных производных в клетках соответствующих строк декомпозиционной карты по сути является представлением их сжатой области определения, координаты точек которой (номера столбцов) определяются значениями переменных подмножества $X_2 = \{x_4x_3x_2x_1\}$, а значения производных в этих точках равны нулю или одному из литералов переменной x_0. Последующее их представление возможно в любой другой форме в соответствии с рассмотренными в [7] правилами представления и преобразования обобщённых логических функций с параметрами, зависящими от одной переменной.

Неориентированная частная производная функции $F(X)$ по переменной x_0 от этой переменной не зависит, и её можно рассматривать как обычную логическую функцию, представленную в точках сжатой области определения значениями 0 и 1.

В случае, если возникает необходимость в аналитическом представлении производных в минимальных ДНФ, то при ручных способах наиболее удобным является алгоритм нахождения, основанный на представлении производных в сжатых картах с соседним кодированием по переменным подмножества $X_2 = \{x_4x_3x_2x_1\}$.

При этом следует заметить, что необходимости в представлении возрастающей производной в отдельной карте нет, поскольку её отличие от убывающей будет заключаться в инверсном значении литералов переменной x_0. Поэтому представим в картах только лишь убывающую частную производную и неориентированную производную, которые показаны на рис. 2.

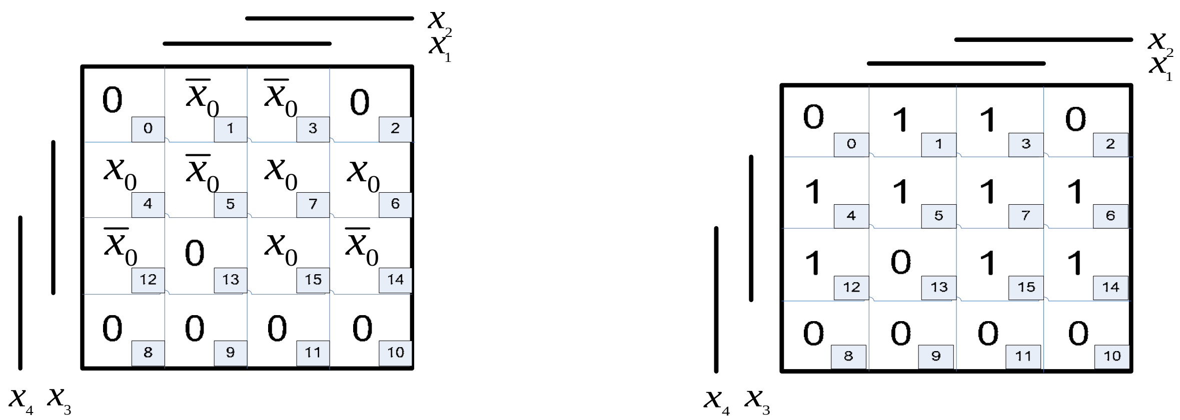

Рис. 2. Сжатые карты убывающей и неориентированной производных

Опуская комментарий к процедуре выделения правильных конфигураций, запишем номера точек, образующих эти конфигурации, и соответствующие им простые импликанты.

Для убывающей частной производной: $<3,1> - \overline{x}_4\overline{x}_3x_1\overline{x}_0$; $<5,1> - \overline{x}_4\overline{x}_2x_1x_0$; $<12,4> - x_4x_3\overline{x}_1\overline{x}_0$; $<15,7> - x_3x_2x_1x_0$.

Для неориентированной частной производной: $<1,3,5,7> - \overline{x}_4x_1$; $<4,5,6,7> - \overline{x}_4x_3$; $<4,6,12,14> - x_3\overline{x}_1$; $<14,15,6,7> - x_3x_2$.

Для возрастающей частной производной запишем простые импликанты, инвертируя значения литералов $\tilde{x}_0$: $\overline{x}_4\overline{x}_3x_1x_0$; $\overline{x}_4\overline{x}_2x_1\overline{x}_0$; $\overline{x}_4x_3\overline{x}_1\overline{x}_0$; $x_4x_3\overline{x}_1x_0$; $x_3x_2x_1\overline{x}_0$.

Для представления минимальной ДНФ каждой из производных достаточно объединить по ИЛИ простые импликанты, полученные для каждой из них:

$$\frac{\partial^1 F(X)}{\partial x_0} = \bar{x}_4\bar{x}_3x_1\bar{x}_0 \vee \bar{x}_4\bar{x}_2x_1x_0 \vee x_3x_2x_1x_0 \vee x_4x_3\bar{x}_1\bar{x}_0;$$

$$\frac{\partial^0 F(X)}{\partial x_0} = \bar{x}_4\bar{x}_3x_1x_0 \vee \bar{x}_4\bar{x}_2x_1\bar{x}_0 \vee x_3x_2x_1\bar{x}_0 \vee x_4x_3\bar{x}_1x_0; \qquad \frac{\partial F(X)}{\partial x_0} = \bar{x}_4x_1 \vee \bar{x}_4x_3 \vee x_3\bar{x}_1 \vee x_3x_2.$$

Аналогичным образом могут быть найдены производные по любой другой переменной.

Выводы

1. Проведен анализ известных способов нахождения булевых производных, отмечены их недостатки.

2. Предложен способ, основанный на использовании модифицированных декомпозиционных карт, что позволило упростить алгоритм нахождения производных в целом.

3. Анализ предложенного способа проведен на примере нахождения булевых производных функции от пяти переменных. В результате анализа была подтверждена эффективность рассмотренного способа.

4. Одним из дальнейших направлений исследования является разработка машинного алгоритма и программы нахождения производных.

Список литературы

1. Бохманн Д., Постхоф Х. Двоичные динамические системы. – М.: Энергоатомиздат, 1986. – 400 с.
2. Бондаренко М.Ф., Кривуля Г.Ф., Рябцев В.Г. и др. Проектирование и диагностика компьютерных систем и сетей. – К.: НМЦВО, 2000. – 300 с.
3. Хаханов В.Н. Техническая диагностика элементов и узлов персональных компьютеров. – К.: ІЗМН, 1998. – 308 с.
4. Sellers F., Hsido M., Bearnson L. Analyzing errors with the Boolean difference // IEEE Trans. Comp. – 1968. – Vol. 17. – P. 676 - 688.
5. Коробкова Е. Н. О применении метода сжатия области определения логических функций к нахождению булевых производных // Открытые информационные и компьютерные интегрированные технологии: Сб. науч. тр. – Х.: НАКУ «ХАИ». – 2003. – Вып. 18. – С. 177-186.
6. Рубанов В.Г., Коробкова Е.Н. Разработка алгоритма сжатия области логических функций // Труды современного гуманитарного университета. Белгородский филиал. – Белгород: БФ СГУ. – 2000. – Вып. 18. – С. 105 - 112.
7. Рубанов В.Г., Коробкова Е.Н. Графоаналитический метод нахождения минимальных дизъюнктивных нормальных форм обобщённых логических функций // Системи обробки інформації. – Х.: НАНУ, ПАНМ, ХВУ. – 2002. – Вип. 3(19). – С. 46 - 53.