

Метод и алгоритмы оптимизации совокупности оснований системы обработки информации АСУ ТП реального времени, функционирующей в модулярной арифметике

Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского «ХАИ»

Введение. Задача синтеза структуры системы обработки информации (СОИ) АСУ ТП реального времени в модулярной арифметике (МА) непосредственно связана с выбором совокупности оснований (модулей) системы остаточных классов (СОК), непосредственно определяющих диапазон обработки информации и косвенно ее аппаратурные затраты. Это, в свою очередь, существенным образом влияет на точность вычислений, надежность (отказоустойчивость) функционирования и производительность обработки информации СОИ реального времени.

Анализ литературных источников и актуальность темы статьи. В существующих литературных источниках [1-3] количественно показана зависимость количества оборудования СОИ в СОК от количества и величины оснований МА. В этом аспекте представляется важным и актуальным вопрос решения задачи оптимизации совокупности модулей в МА.

Известно, что существует четыре принципа реализации арифметических операций в МА: сумматорный принцип (СП) (на базе малоразрядных двоичных сумматоров [1]); табличный принцип (ТП) (на основе использования ПЗУ [1, 3]); прямой логический принцип реализации арифметических операций, основанный на описании модульных операций на уровне систем переключательных функций, посредством которых формируются значения двоичных разрядов результирующих вычетов (в качестве элементной базы для технической реализации данного принципа целесообразно использовать систолические и программируемые логические матрицы, а также ПЛИС [1]); принцип кольцевого сдвига (ПКС), основанный на использовании кольцевых регистров сдвига (КРС) [3-5].

Отсутствие межразрядных связей (отсутствие процесса переноса) между двоичными разрядами в обрабатываемых в СОИ АСУ ТП операндах в процессе решения задач управления технологическим процессом (при реализации алгоритмов управления) на основе ТП или ПКС является одной из главных и наиболее привлекательных особенностей модулярной арифметики. В позиционной системе счисления (ПСС) выполнение арифметической операции предполагает последовательную обработку разрядов операндов по правилам, определяемым содержанием данной операции, и не может быть закончено до тех пор, пока не будут последовательно определены значения всех промежуточных результатов с учетом всех связей между разрядами. Таким образом, ПСС, в которых представляется и обрабатывается информация в современных АСУ ТП, обладают существенным недостатком – наличием межразрядных связей, которые накладывают свой отпечаток на методы реализации арифметических операций, усложняют аппаратуру, снижают достоверность вычислений и ограничивают быстродействие реализации управляющих алгоритмов. Поэтому естественно изыскание возможностей построения такой арифметики, в которой бы

поразрядные связи отсутствовали. В этом плане обращает на себя внимание система счисления в остаточных классах. Модулярная арифметика обладает ценным свойством независимости друг от друга остатков по принятой системе оснований. Эта независимость открывает широкие возможности в построении не только новой машинной арифметики, но и принципиально новой схемной реализации СОИ АСУ ТП, которая в свою очередь заметно расширяет применение машинной арифметики. Во многих литературных источниках [1, 3, 6] отмечается, что одним из практических направлений повышения пользовательской производительности СОИ АСУ ТП реального времени является внедрение нетрадиционных методов представления и обработки информации в числовых системах с параллельной структурой, и в частности, в так называемых модулярных системах счисления, обладающих максимальным уровнем внутреннего параллелизма в организации процесса переработки информации.

Цель статьи – разработать метод и алгоритмы оптимизации оснований МА для каждого из существующих принципов технической реализации арифметических операций.

Основная часть. Для разработки метода оптимизации вначале сформулируем общую задачу минимизации количества оборудования СОИ АСУ ТП при заданных требованиях к системе обработки информации реального времени (для данного диапазона разрядной сетки СОИ) в следующем виде

$$\begin{cases} M = \prod_{i=1}^n m_i = \text{const}, \\ V_{MA}^{(n)} = \sum_{i=1}^n f(m_i) \rightarrow \min, \end{cases} \quad (1)$$

где M - диапазон разрядной сетки СОИ; m_i - i -е основание МА; n - число информационных модулей МА; $f(m_i)$ - функция связи аппаратных затрат для i -го модуля МА; $V_{MA}^{(n)}$ - количество оборудования СОИ

Для сумматорного принципа реализации арифметических операций функция $f(m_i)$ принимает следующий вид $f(m_i) = \lceil \log_2 m_i \rceil$. В этом случае относительное количество V оборудования, приведенное к одному двоичному разряду длины разрядной сетки СОИ, будет равно величине

$$V_{\text{н}} \hat{e} = \sum_{i=1}^n \lceil \log_2 m_i \rceil \approx \log_2 M.$$

Минимальным значением V общих затрат оборудования будет являться величина $V = \log_2 M$ и процесс оптимизации набора модулей СОИ сводится к уменьшению суммы логарифмических дефектов η_i модулей МА (см. (1)). Для принципа кольцевого сдвига имеем следующее равенство $f(m_i) = m_i$.

Согласно неравенству Коши имеем:

$$\left[\prod_{i=1}^n m_i \right]^{\frac{1}{n}} \leq \left[\sum_{i=1}^n m_i \right] / n. \quad (2)$$

Тогда для табличного принципа реализации модульных операций в МА имеем $f(m_i) = m_i^2$. В этом случае очевидно следующее равенство, определяющее условие оптимальности выбора оснований МА

$$\prod_{i=1}^n m_i^2 = \left[\prod_{i=1}^n m_i \right]^2 = M^2 = \min. \quad (3)$$

В модулярной системе счисления необходимо выполнения условия: НОД - $(m_1, m_2, \dots, m_n) = 1$. Для определения оптимального набора оснований МА в ряде простых чисел фиксируется модуль, близкий к значению $\sqrt[n]{M}$, затем справа и слева от него выбираются остальные ближайшие таким образом, чтобы

выполнялось условие $\prod_{i=1}^n m_i \geq M$. Ввиду того, что ряд простых чисел обладает

малой плотностью в последовательности натуральных чисел, непосредственно произвести оптимальный синтез модулей в МА не представляется возможным.

Для разработки метода оптимизации оснований МА вначале введем и определим математический критерий K_n выбора модулей, представленный в виде [7]

$$K_n = \frac{m_n - m_1}{n},$$

где граничным значением будет число ноль, при условии равенства всех оснований. Используя этот критерий, рассмотрим метод уплотнения числового ряда при сохранении взаимной простоты входящих в него натуральных чисел. Например, для восьми простых чисел для значения 256 имеем набор $\{m_i\}$, для которых $m_1 \cdot m_2 \dots m_8 > 2^{64}$ и 239, 241, 251, 251, 257, 263, 269, 271, 277. При этом $K_n \approx 4,7$.

Известно, что любое число P можно представить в каноническом виде т.е.

$$P = p_1^{K_1} \cdot p_2^{K_2} \dots p_i^{K_i} \dots p_k^{K_k},$$

где p_i ($i = \overline{1, k}$) - простые числа. Используем форму канонического представления числа при $i=(1, 2)$ и $K_i=1$ для записи натуральных чисел, близких к числу 256

$89 \cdot 3 = 267$	$83 \cdot 3 = 249$
$53 \cdot 5 = 265$	$47 \cdot 5 = 235$
$37 \cdot 7 = 259$	$31 \cdot 7 = 217$
$29 \cdot 11 = 319$	$23 \cdot 11 = 253$

Сопоставляя данные числа с рядом простых чисел, получим следующее;

$$\underline{241}, \underline{249}, \underline{251}, 253, \underline{257}, 259, \underline{263}, 265, 267 \text{ и } \quad 11 \quad 7 \quad 5 \quad 3,$$

где подчеркнутые числа являются простыми (числа, имеющие только два делителя: себя и единицу), а на других отображены их сомножители. Для выполнения условия взаимной простоты достаточно удалить число 249 и оставшийся ряд будет иметь значение $K_n = 3,2$. Это обстоятельство свидетельствует о существенном "уплотнении" исходного набора взаимно простых чисел, соответствующих составным модулям вида $m_i = m_{i1} \cdot m_{i2}$.

Для всех принципов реализации арифметических операций в МА (кроме ТП), быстродействие выполнения модульных операций определяется величиной наибольшего модуля m_n СОК. Табличный принцип предполагает существенный рост аппаратных затрат СОИ при увеличении модуля m_n . (при увеличении длины l разрядной сетки СОИ). В том случае для обеспечения требований не снижения производительности обработки информации СОИ реального времени необходимо соблюсти неравенства $\sqrt[n]{M} \leq m_n$.

Условия равенства модулей и их взаимной простоты, при сохранении допустимой величины временных затрат на выполнение целочисленных арифметических операций, диктует необходимость возможного перехода к многоуровневой (многоступенчатая СОК) структуре построения СОИ АСУ ТП. Однако данная задача оптимизации требует отдельных серьезных исследований.

Исходя из исследований, проведенных в [4] и основываясь на свойствах МА сформулируем в общем виде алгоритм оптимизации оснований системы остаточных классов:

- задается ряд натуральных чисел 2,3,4,...;
- с целью обеспечения взаимно однозначного соответствия между

операндами в СОК и в ПСС в числовом диапазоне $\left[0, M = \prod_{i=1}^n m_i\right)$ производится

выбор совокупности оснований, которые удовлетворяют условию $M = \prod_{i=1}^n m_i \geq 2^l$;

- любая пара оснований СОК должна удовлетворять условию взаимной простоты, т.е. $\text{НОД}(m_i, m_j) = 1$ для $i, j = \overline{1, n}$ ($i \neq j$);

– с целью простоты реализации арифметических операций в отрицательном числовом диапазоне одно из оснований СОК должно быть четным, т.е. $M \equiv 0 \pmod{2}$;

– критерий оптимизации оснований СОК – минимальное количество оборудования операционного устройства СОИ; в формализованном виде данный критерий представляется по-разному – в зависимости от принципа реализации арифметических операций. Так, для принципа кольцевого сдвига (на основе использования кольцевых регистров сдвига) критерий оптимизации может быть представлен в зависимости от метода реализации ПКС. Для метода двоичного позиционно-остаточного кодирования критерий оптимизации представляется в виде

$$\sum_{i=1}^n \left(\left\lceil \log_2(m_{i-1}) \right\rceil + 1 \right) = \min,$$

а для метода унитарного позиционно-остаточного кодирования – $\sum_{i=1}^n m_i = \min$.

В качестве примера представим результаты оптимизации набора оснований МА для табличного принципа реализации арифметических операций (табл. 1). В данной таблице для соответствующего значения длины l разрядной сетки СОИ представлены (первая строка) совокупность оснований МА, а также (вторая строка) значения количества двоичных разрядов, необходимых для представления данных модулей. В соответствии с результатами первой фундаментальной теоремы Гаусса выполнение рациональных операций над наименьшими комплексными вычетами можно однозначно и единственным способом заменить выполнением тех же операций над соответствующими им

вещественными вычетами по вещественному модулю, равному норме комплексного модуля. Данное обстоятельство позволяет использовать предложенные алгоритмы оптимизации для гиперкомплексных числовых структур.

Табл. 1

Совокупность оптимальных оснований МА

l	a_i	Основания МА															
		m_1	m_2	m_3	m_4	m_5	m_6	m_7	m_8	m_9	m_{10}	m_{11}	m_{12}	m_{13}	m_{14}	m_{15}	m_{16}
1		3	4	5	7	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–
		2	2	3	3	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–
2		2	5	7	9	11	13	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–
		1	3	3	4	4	4	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–
3		3	4	5	11	13	17	19	–	–	–	–	–	–	–	–	–
		2	2	3	4	4	5	5	–	–	–	–	–	–	–	–	–
4		2	3	5	7	11	13	17	19	23	29	–	–	–	–	–	–
		1	2	3	3	4	4	5	5	5	5	–	–	–	–	–	–
8		2	3	5	7	11	13	17	19	23	29	31	37	41	43	47	53

Выводы

В данной статье представлен метод оптимизации оснований МА. На основе этого метода и в зависимости от принципа реализации арифметических операций разработаны конкретные алгоритмы оптимизации оснований МА. Использование оптимизационной совокупности оснований будет способствовать решению задачи оптимизации СОИ АСУ ТП.

Список литературы

1. Акушкин И.Я., Юдицкий Д.И. Машинная арифметика в остаточных классах. Сов. радио, 1968. – 440 с.
2. Жихарев В.Я., Юнес Эль Хандасси, Краснобаев В.А. Пути повышения производительности и отказоустойчивости ЭВМ // Открытые информационные и компьютерные интегрированные технологии. – Х.: НАКУ (ХАИ). – 2003. Вып. 19. – С. 269 – 282.
3. Жихарев В.Я., Юнес Эль Хандасси, Краснобаев В.А. Методы и алгоритмы реализации арифметических операций в классе вычетов // Открытые информационные и компьютерные интегрированные технологии. – Х.: НАКУ (ХАИ). – 2003. Вып. 20. – С. 84 – 101.
4. Ілюшко В.М., Мохаммед Джасим Мохаммед, Краснобаев В.А. Концепция проектирования отказоустойчивых систем обработки информации реального времени // Збірник наукових праць. Системи обробки інформації. - Харків: НАНУ ПАНМ, ХВУ. 2005. – Вип. 4. (44). – С. 52 - 56.
5. Ілюшко В.М., Мохаммед Джасим Мохаммед, Краснобаев В.А. Исследование влияния свойств модулярной арифметики на структуру и принципы функционирования систем обработки информации реального времени // Радіоелектронні і комп'ютерні системи. – 2005. - № 2(10).-С. 132 - 139.
6. Основи надійності цифрових систем / В.С. Харченко, В.Я. Жихарев, В.М. Ілюшко, В.А. Краснобаєв, П.М. Куліков, І.В. Лисенко, М.В. Нечипорук, Г.М. Тимонькін. – Підручник. – Харків: Нац. аерокосм. ун-т «Харк. авіа. ін-т», 2004. – 542 с.
7. Ирхин В.П. Проектирование непозиционных специализированных процессоров. Воронеж: Изд. во Воронеж. гос. ун та, 1999. – 136.