

Выбор оптимальной рабочей точки системы стабилизации ракеты-носителя по критерию вероятности устойчивости

Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского «ХАИ»

Постановка проблемы

Проблема устойчивости является основной при проектировании систем стабилизации (СС) носителей космических аппаратов, так как выбор всех параметров СС и некоторых конструктивных параметров ракеты-носителя (РН) целиком подчинен требованиям устойчивости движения.

Методика построения областей устойчивости СС РН в плоскости двух параметров по упрощенным условиям устойчивости описана в работе [1].

В настоящей статье приводятся результаты исследований по определению границ устойчивости СС РН корневым методом, а также методика поиска оптимальной рабочей точки в плоскости двух параметров по критерию вероятности устойчивости.

Объект и цель исследования

Движение статически неустойчивой упругой РН в канале рыскания, устойчивость которой обеспечивается автоматом стабилизации, можно описать следующей системой дифференциальных уравнений [2]:

$$\left\{ \begin{array}{l} \ddot{\psi} = a'_{\psi z} \dot{z} + a'_{\psi \psi} \dot{\psi} + a_{\psi \psi} \psi + a_{\psi \delta} \delta_{\psi} + \sum_{i=1}^4 (a''_{\psi s_{\psi i}} \ddot{s}_{\psi i} + a_{\psi s_{\psi i}} \dot{s}_{\psi i}); \\ \ddot{z} = a'_{zz} \dot{z} + a'_{z\psi} \dot{\psi} + a_{z\psi} \psi + a_{z\delta} \delta_{\psi} + \sum_{i=1}^4 (a''_{zs_{\psi i}} \ddot{s}_{\psi i}); \\ \ddot{s}_{\psi i} + \varepsilon_{s_{\psi i}} \dot{s}_{\psi i} + \omega_{s_{\psi i}}^2 s_{\psi i} = a''_{s_{\psi i} z} \ddot{z} + a''_{s_{\psi i} \psi} \ddot{\psi} + a_{s_{\psi i} \psi} \dot{\psi}; \\ \ddot{q}_j + \varepsilon_{q_j} \dot{q}_j + \omega_{q_j}^2 q_j = a_{q_j \delta_{\psi}} \delta_{\psi}; \\ \psi^{ecn} = \psi + \sum_{j=1}^2 a_{\psi q_j}^{cn} q_j; \\ T_2 \ddot{\delta} + T_1 \dot{\delta} + \delta = K_{\phi} \psi + K_{\dot{\phi}} \dot{\psi} - K_z \dot{z} - K_z z, \end{array} \right. \quad (1)$$

где ψ - отклонение угла рыскания ракеты как твердого тела от программного значения; z - отклонение центра масс от программного значения; δ - угол отклонения управляющих органов; q - координата, характеризующая поперечные упругие колебания корпуса ракеты в месте установки датчика угла рыскания, ψ^{ecn} -

угол рыскания, измеряемый датчиком угла, a_{ij} - коэффициенты; T_1, T_2 - постоянные времени АС; K_ϕ - коэффициент усиления по каналу рыскания, $K_{\dot{\phi}} = T_d K_\phi$; T_d - постоянная времени дифференцирования; $K_{\dot{z}}$ - коэффициент усиления по скорости отклонения центра масс; i – количество тонов упругих колебаний; j - количество баков с топливом. Параметры T_1 , T_2 , K_ϕ , $K_{\dot{\phi}}$, T_d имеют существенные случайные разбросы (превышающие 20%).

Условия устойчивости СС определяются на основании корней системы (1), которые имеют вид:

$$\begin{aligned} z &= x \text{ (вещественные корни);} \\ z &= x + iy, \\ z &= x - iy \text{ (комплексно-сопряженные корни).} \end{aligned} \quad (2)$$

В качестве условий устойчивости принимаются условия

$$R_k < 0, \quad (3)$$

где $R_k = x$ – вещественные корни или действительные части комплексно-сопряженных корней (2).

Для контроля правильности полученных результатов используются упрощенные условия устойчивости системы [1]

$$\frac{(K_\phi |a_{z\delta}| + |a_{z\phi}|) K_{\dot{z}} + a_{\phi\phi} K_\phi (T_d - T_1)}{|a_{\phi\delta}| K_\phi^2 (T_d - T_1)} - 1 < 0, \quad (4)$$

$$\frac{a_{q\delta} a_{\delta q} K_\phi T_d^2 T_2}{(|a_{qq}| T_2 T_d - T_d + T_1) T_1} - 1 < 0. \quad (5)$$

Цель данного исследования:

- построить в координатах $K_\psi - T_d$ область устойчивости объекта (найти верхнюю и нижнюю границы устойчивости) по условиям устойчивости системы (3);
- найти в пределах области устойчивости объекта точку с наивысшей вероятностью устойчивости.

Методика исследования

Определение области устойчивости по корням системы (1).

Для получения нижней и верхней границ устойчивости по корням (условие устойчивости (3)) необходимо:

- найти точку внутри области устойчивости (в которой условие (3) выполняется для всех корней системы);
- задать начальное значение K_ψ и увеличивать значение параметра T_d с заданным шагом α_{T_d} для нахождения точки, в которой хотя бы один из корней

принимает положительное значение, с последующим уменьшением шага для получения более точного результата; найденная точка – точка верхней границы устойчивости в данном сечении по K_ψ ;

- аналогичным образом найти точку нижней границы устойчивости в данном сечении по K_ψ путем уменьшения значения параметра T_d с шагом α_{T_d} ;
- найти точки верхней и нижней границ устойчивости для других сечений (пошагово изменяя значение K_ψ шагом α_{K_ψ} и повторяя два предыдущих пункта).

Определение области устойчивости по упрощенным условиям работоспособности.

Для получения уравнения нижней границы устойчивости [1] в выражении (4), описывающем РН как твердое тело, оставляют знак равенства и решают уравнение относительно T_d :

$$T_d = \frac{K_\psi |a_{z\delta}| + |a_{z\psi}|}{|a_{\psi\delta}| K_\psi^2 - a_{\psi\psi} K_\psi} K_z + T_1. \quad (6)$$

Для получения уравнения верхней границы устойчивости [1] в выражении (5), описывающем упругие колебания корпуса РН, оставляют знак равенства и решают уравнение относительно K_ψ :

$$K_\psi = \frac{(|a_{qq}| T_2 T_d - T_d + T_1) T_1}{a_{q\delta} a_{\delta q} T_d^2 T_2}. \quad (7)$$

Определение среднего квадратичного отклонения (с.к.о.) границ устойчивости системы.

Уравнение границы устойчивости в сечении $K_\psi = \text{const}$ имеет вид $T_d = T_d^0 + \sum_{i=1}^n b_i \eta_i$, где n – число параметров; T_d^0 – номинальные значения T_d , т.е. точки на границе, в которых случайные возмущения параметров отсутствуют; b_{ij} – коэффициенты линеаризации; η_{ij} – заданный n -мерный случайный вектор.

Коэффициенты b_{ij} определяют по формуле $b_i = \frac{T_d(\Delta\eta_i) - T_d(-\Delta\eta_i)}{2\Delta\eta_i}$, $i = \overline{1, n}$, где $\Delta\eta_i$ – вариация i -й компоненты вектора η , равная $\Delta\eta_i = 2\sigma_i$; σ_i – с.к.о. i -й компоненты вектора η ; $T_d(\Delta\eta_i)$ либо $T_d(-\Delta\eta_i)$ – значения КФ для вектора η , у которого все компоненты, кроме i -й, равны нулю, а i -я компонента равна $\Delta\eta_i$ либо $-\Delta\eta_i$.

На основании центральной предельной теоремы T_d имеет нормальный закон распределения;

На основании теорем о числовых характеристиках ФСА математическое

ожидание T_d равно $M[T_d] = T_d^0$, дисперсия - $D[T_d] = \sum_{i=1}^n b_i^2 D_i$, с.к.о. –

$$\sigma_{T_d} = \sqrt{D_{T_d}} = \sqrt{\sum_{i=1}^n b_i^2 \sigma_{ij}^2}. \quad (8)$$

Определение оптимальной рабочей точки – точки с наивысшей вероятностью устойчивости.

Для нахождения данной точки сближают огибающие с.к.о. верхней и нижней границ устойчивости одновременно по всем сечениям K_ψ до их пересечения. Точка, в которой огибающие пересеклись в последнюю очередь, является искомой точкой с наивысшей вероятностью устойчивости.

Алгоритм построения области устойчивости

1. Определение верхней и нижней границ области устойчивости по корням системы (1):

1.1. Нахождение невозмущенных значений КФ: формирование матрицы Коши на основании системы дифференциальных уравнений (1); вычисление корней системы в виде $z = x$, $z = x + iy$, $z = x - iy$, отбор действительных частей полученных корней.

1.2. Выбор сечения по K_ψ , задание шага изменения параметра K_ψ ($\alpha_{K_\psi} = 1$).

1.3. Нахождение точки внутри области устойчивости: проверка выполнения условия (3). В случае выполнения происходит переход к следующему шагу. В обратном случае выполняются изменение параметра T_d с заданным шагом ($\alpha_{T_d} = 0,01$), поиск невозмущенных значений КФ и проверка условия (3) до его выполнения (итерационный процесс).

1.4. Нахождение точек верхней и нижней границ устойчивости для данного сечения:

- увеличение (для верхней границы) либо уменьшение (для нижней границы) значения параметра T_d с заданным шагом α_{T_d} ;
- нахождение невозмущенных значений КФ;
- проверка условия (3) до тех пор, пока хотя бы один из корней не примет положительное значение;
- уменьшение шага α_{T_d} ;
- повторное выполнение предыдущих пунктов до выполнения условия $\alpha_{T_d} < \alpha_{T_d \text{ dop}}$ ($\alpha_{T_d \text{ dop}} = 0.0005$).

1.5. Переход к следующему сечению (изменение значения параметра K_ψ с заданным шагом α_{K_ψ}) и выполнение пунктов 1.3 - 1.5 для каждого сечения.

Примечание. Для определения области устойчивости по упрощенным КФ (4 - 5) верхнюю и нижнюю границы строят по уравнениям (7) и (6) соответственно.

2. Определение среднего квадратичного отклонения границ устойчивости системы:

2.1. Выбор сечения по K_ψ , задание шага изменения K_ψ ($\alpha_{K_\psi}=1$).

2.2. Изменение значения i -го параметра: $a_i = a_i^0 + \sigma_i$ (где a_i^0 - номинальное значение i -го параметра; σ_i - с.к.о. i -го параметра, $i=1 \div n$, n - число параметров) и вычисление соответствующих ему точек на верхней и нижней границах устойчивости - $T_{dH}(\Delta\eta_i)$ и $T_{dL}(\Delta\eta_i)$ для данного сечения.

2.3. Изменение значения i -го параметра: $a_i = a_i^0 - \sigma_i$ и вычисление соответствующих ему точек на верхней и нижней границах устойчивости - $T_{dH}(-\Delta\eta_i)$ и $T_{dL}(-\Delta\eta_i)$ для данного сечения.

2.4. Вычисление коэффициентов b_{iH} и b_{iL} для верхней и нижней границ соответственно: $b_{iH} = \frac{T_{dH}(\Delta\eta_i) - T_{dH}(-\Delta\eta_i)}{4\sigma_i}$, $b_{iL} = \frac{T_{dL}(\Delta\eta_i) - T_{dL}(-\Delta\eta_i)}{4\sigma_i}$, ($\Delta\eta_i = 2\sigma_i$).

2.5. Вычисление с.к.о. для верхней и нижней границ устойчивости соответственно: $\sigma_{T_{dH}} = \sqrt{\sum_{i=1}^n b_{iH}^2 \sigma_i^2}$ и $\sigma_{T_{dL}} = \sqrt{\sum_{i=1}^n b_{iL}^2 \sigma_i^2}$.

2.6. Переход к следующему сечению по K_ψ и выполнение пунктов 2.2 - 2.5 для каждого сечения.

3. Определение оптимальной рабочей точки в плоскости $K_\psi - T_d$:

3.1. Построение областей с.к.о. верхней и нижней границ устойчивости для всех рассматриваемых сечений: $T_{dH_j} = T_{dH_j}^0 - \sigma_{T_{dH_j}}$ и $T_{dL_j} = T_{dL_j}^0 - \sigma_{T_{dL_j}}$ (где $T_{dH_j}^0, T_{dL_j}^0$ - номинальные значения T_d верхней и нижней границах устойчивости соответственно; $\sigma_{T_{dH_j}}$ и $\sigma_{T_{dL_j}}$ - с.к.о. верхней и нижней границ устойчивости, $j=1 \div m$, m - число сечений).

3.2. Сближение огибающих с.к.о. границ устойчивости по всем сечениям одновременно с заданным шагом α : $T_{dL_j} = T_{dL_j} + \alpha\sigma_{T_{dL_j}}$ и $T_{dH_j} = T_{dH_j} - \alpha\sigma_{T_{dH_j}}$, ($\alpha_{нач}=0,01$).

3.3. Подсчет количества точек (сечений) k , в которых области с.к.о. не пересеклись, т.е. в которых выполняется условие $T_{dH_j} - T_{dL_j} > 0$.

3.4. Сохранение координат точки, если $k=1$; повторение пунктов 3.2 - 3.3, если $k>1$; возврат на 1 шаг назад, уменьшение величины шага α и повторение пунктов 3.2. - 3.3., если $k<1$.

Результаты исследования

Номинальные значения и случайные разбросы параметров, соответствующие времени полета $t=70$ с первой ступени РН «Циклон-3», представленные научно-производственным предприятием «Хартрон-Аркус», приведены в табл. 1.

Таблица 1

Параметр	Разброс, %	Значение	Параметр	Разброс, %	Значение
a'_{zz}	25	-0,0169	ε_{s1}	5	0,228
$a'_{z\psi}$	5	-0,715	ε_{s2}	5	0,0497
$a_{z\psi}$	5	-36,09	ε_{s3}	5	0,0546
$a_{z\delta}$	5	-1,441	ε_{s4}	5	0,7493
$a'_{\psi z}$	4	0,0027	$a_{\psi\delta 1}$	10	-0,0066
$a'_{\psi\psi}$	10	-0,0616	$a_{\psi\delta 2}$	10	-0,0121
$a_{\psi\psi}$	30	1,8113	$a_{\psi\delta 3}$	10	-0,0043
$a_{\psi\delta}$	10	-0,295	$a_{\psi\delta 4}$	10	-0,0041
ε_{q1}	15	0,2511	$a_{s\psi 1}$	10	-26,0652
ε_{q2}	20	0,4005	$a_{s\psi 2}$	10	-26,9907
ω_{q1}^2	35	247,8232	$a_{s\psi 3}$	10	-32,5062
ω_{q2}^2	45	630,5364	$a_{s\psi 4}$	10	-44,212
$a_{q\delta 1}$	10	-2,4192	T_1	40	0,1108
$a_{q\delta 2}$	10	-1,7115	T_2	40	0,002
ω_{s1}^2	10	26,0652	T_d	20	0,5
ω_{s2}^2	10	26,9907	K_z	50	0,009
ω_{s3}^2	10	32,5062	K'_z	40	0,009
ω_{s4}^2	10	44,212	K_ψ	30	10
a_{qq}	40	-233,7707	$a_{\delta q}$	20	-0,1444

Закон распределения случайных разбросов всех коэффициентов – нормальный.

Математическим ожиданием каждого коэффициента m_{ij} является значение этого коэффициента при нулевых разбросах, среднеквадратичное отклонение σ_{ij}

для каждого коэффициента a_{ij} находят по формуле $\sigma_{ij} = \frac{\Delta_{ij}}{3}$.

Результаты определения области устойчивости по корням системы (3) приведены в табл. 2, полученная область устойчивости изображена на рис. 1.

Таблица 2

K_ψ	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
$T_{d\text{ верхн}}$	0,6	0,555	0,520	0,490	0,465	0,445	0,425	0,410	0,395	0,385	0,370	0,36
$T_{d\text{ нижн}}$	0,22	0,170	0,150	0,135	0,130	0,125	0,120	0,115	0,115	0,115	0,115	0,11

Для сравнения полученных результатов в табл. 3 и на рис. 2 приведена область устойчивости, построенная по упрощенным условиям устойчивости (4 - 5).

Таблица 3

K_{ψ}	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
$T_{d \text{ нижн}}$	0,169	0,150	0,140	0,134	0,130	0,126	0,124	0,122	0,120	0,119	0,118	0,118
$T_{d \text{ верхн}}$	0,203	0,203	0,203	0,202	0,202	0,202	0,201	0,201	0,200	0,200	0,199	0,199

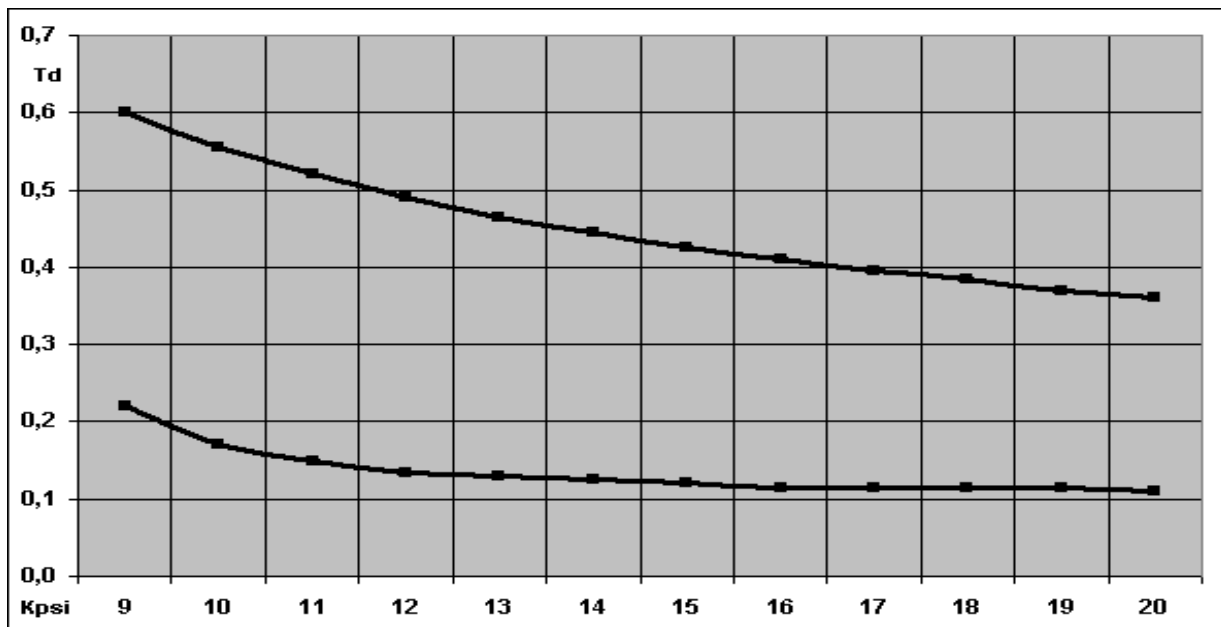


Рис. 1. Область устойчивости по корням системы (3)

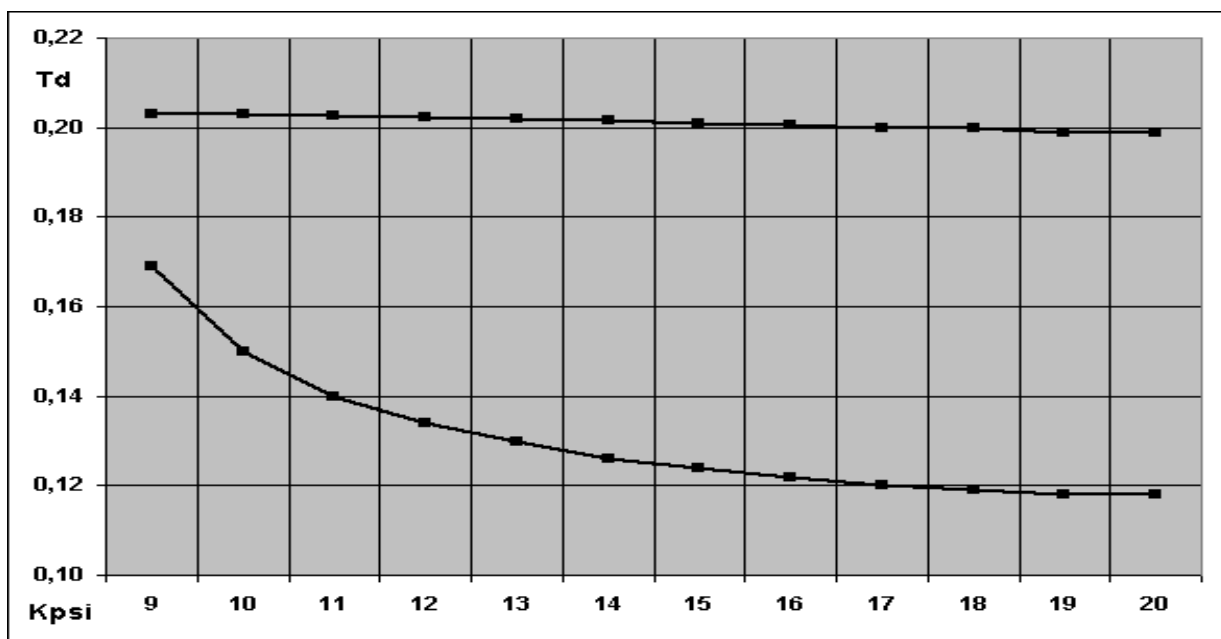


Рис. 2. Область устойчивости по упрощенным КФ (4) – (5)

Результаты построения областей с.к.о границ устойчивости по корням системы и нахождения точки с наивысшей вероятностью устойчивости приведены в табл. 4 и изображены на рис. 3. Искомая точка – [15, 0.1654].

Таблица 4

K_{ψ}	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
$T_{d \text{ верхн}}$	0,555	0,520	0,490	0,465	0,445	0,425	0,410	0,395	0,385	0,370
$T_{d \text{ нижн}}$	0,170	0,150	0,135	0,130	0,125	0,120	0,115	0,115	0,115	0,115
$\sigma_{T_e \text{ нижн}}$	0,076	0,039	0,031	0,026	0,026	0,025	0,025	0,025	0,024	0,024
$\sigma_{T_d \text{ верхн}}$	0,172	0,161	0,150	0,140	0,133	0,124	0,120	0,115	0,110	0,107

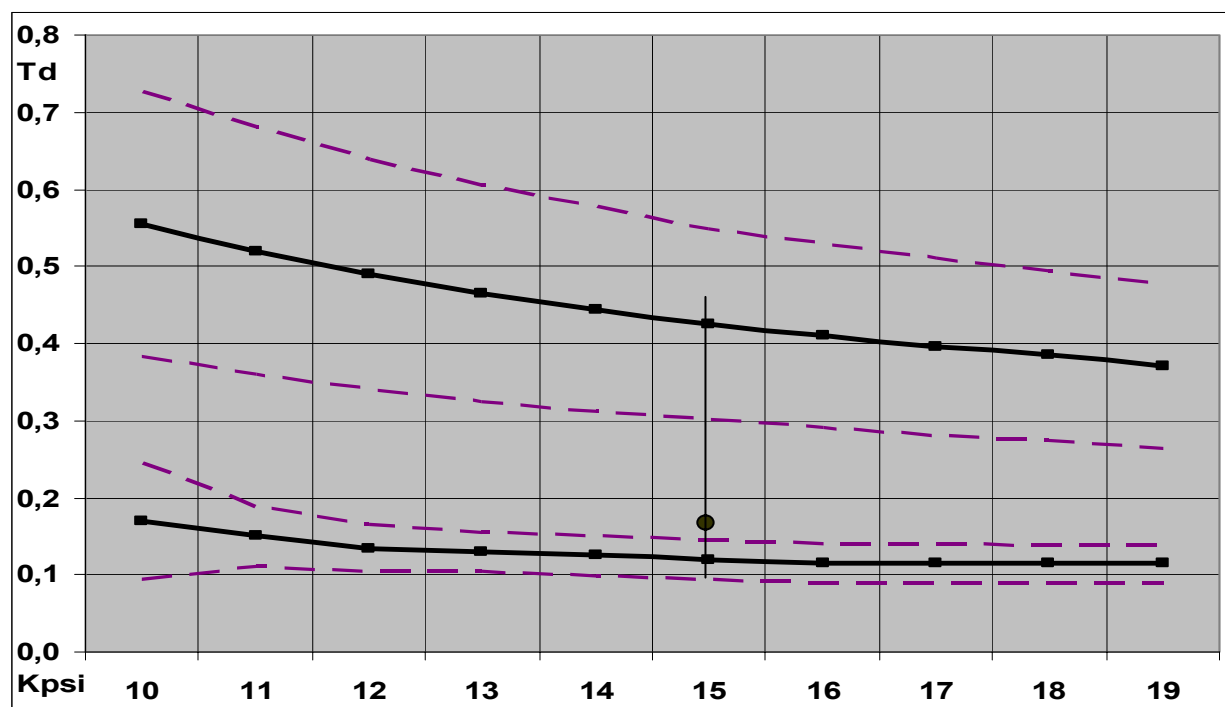


Рис. 3. Области с.к.о. границ устойчивости и оптимальная рабочая точка (границы устойчивости – сплошная линия; области с.к.о. – штриховая линия)

Выводы

Разработана методика построения областей устойчивости объекта корневым методом и оптимизации рабочей точки в плоскости двух параметров по критерию вероятности устойчивости.

Список литературы

1. Айзенберг Я.Е., Сухоребрый В.Г. Проектирование систем стабилизации носителей космических аппаратов. – М.: Машиностроение, 1986. – 220 с
2. Игдалов И.М., Кучма Л.Д., Поляков Н.В., Шептун Ю.Д. Ракета как объект управления: Учебник /Под ред. акад. С.Н. Конюхова. – Днепропетровск: АРТ-ПРЕСС, 2004.– 544 с.
3. Сухоребрый В.Г. Вероятностные методы проектирования технических объектов. – Х.: ХАИ, 1990. – 103 с.
4. Ермаков С.М., Михайлов Г.А. Курс статистического моделирования.– М.: Наука, 1976.– 319 с.