УДК 517.958:519.6

В.Б. Минтюк

Способ построения базиса для решения краевых задач в обыкновенных производных вариационными методами

Национальный аэрокосмический университет им. Н. Е. Жуковского «ХАИ»

Введение

На фоне большого многообразия силовых конструкций и их элементов количество полученных в замкнутом виде решений краевых задач, имеющиеся сегодня в арсенале инженера-расчетчика, очень мало. Достоинства этих решений бесспорны, но они не могут удовлетворить современные требования к точности расчетов конструкций и их элементов ввиду значительности погрешностей, которые вносятся гипотезами, позволяющими получить само точное решение. С другой стороны, даже несущественное усложнение задачи ведет к тому, что решение в замкнутом виде или слишком громоздко, или невозможно вовсе.

Для получения приближенных решений используются численные методы, среди которых самым распространенным на сегодня является метод конечного элемента (МКЭ). Широкое распространение МКЭ стало возможным благодаря его достоинствам: универсальность, алгоритмичность и, как следствие, наиболее развитое математическое обеспечение. Достоинства, как, впрочем, и недостатки, являются следствием использования в МКЭ как в вариационном методе Рэлея-Ритца дискретного (финитного) базиса. Финитные функции не являются в самом общем случае наилучшей аппроксимацией точного решения, они явно уступают по точности и сходимости хорошо подобранным аналитическим функциям. Сложность использования последних связана с тем, что вид и набор этих функций зависят от многих факторов: вида дифференциального оператора задачи, формы границы области, типа граничных условий и др.

Способы построения базисных систем основываются на ряде рассуждений, которые трудно свести к единому алгоритму. Ниже рассматривается универсальный способ, позволяющий построить базисную систему на основе последовательности функций, не удовлетворяющих некоторым граничным условиям. На примере показано, что предлагаемый способ построения базиса ведет к тому же результату, что и известные: умножение каждой функции базиса на некоторую специально подобранную функцию и метод множителей Лагранжа.

1. Постановка задачи

Пусть на интервале $-1 \le x \le 1$ краевая задача описывается дифференциальным оператором A порядка $2n$

$$Au = f \tag{1}$$

и набором краевых условий:

$$\begin{aligned} &B_i^- u = g_i^- \text{ при } x = -1; \\ &B_i^+ u = g_i^+ \text{ при } x = 1, \quad i = 1,2,\ldots,n. \end{aligned} \tag{2}$$

Здесь u – искомая функция, f и $g_i^{\mp}$ – известные, $B_i^{\mp}$ – дифференциальные операторы порядка не выше $2n$–1.

Пусть свойства дифференциальных операторов A, $B_i^{\mp}$ и функций f, $g_i^{\mp}$ такие, что краевая задача (1), (2) эквивалентна отысканию в энергетическом (оно гильбертово) пространстве H_A элемента, доставляющего стационарное значение функционалу [1,2] энергии

$$Fu \tag{3}$$

с дополнительными условиями (здесь порядок операторов $B_i^{\mp}$ не превышает n–1):

$$\begin{aligned} &B_i^{-}u = 0 \text{ при } x = -1; \\ &B_i^{+}u = 0 \text{ при } x = 1, \quad i = 1,2,\ldots,n. \end{aligned} \tag{4}$$

Тогда конечномерное подпространство, в котором ищется стационарная точка функционала (3), должны образовывать функции, удовлетворяющие трем требованиям [3] (базисные функции):

а) функции должны принадлежать H_A;

б) функции должны быть линейно независимы;

в) система, составленная из этих функций, должна быть полна в H_A.

Заметим, что первое требование кроме необходимой гладкости подразумевает удовлетворение каждой функцией в отдельности дополнительным условиям (4).

2. Построение базиса

Пусть имеется некоторая последовательность функций, удовлетворяющих всем требованиям, предъявляемым к базису, за исключением условий (4):

$$\varphi_0, \varphi_1, \ldots \tag{5}$$

Более того, среди этих функций найдутся такие k функции, что выполнение для них условий (4) приведет к матрице ранга не ниже k, где $k \le 2n$ – количество главных условий (4). Для сокращения записи примем в качестве этих функций первые $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_{(k-1)}$.

При определении приближенного решения задачи (1), (2) в виде

$$u_M = \sum_{m=0}^{M} a_m \varphi_m , \tag{6}$$

где a_m – неизвестные постоянные, потребуем выполнения условий (4). Это приведет к системе линейных алгебраических уравнений (СЛАУ):

$$\begin{aligned} &B_i^{-} \sum_{m=0}^{M} a_m \varphi_m \bigg|_{x=-1} = 0; \\ &B_i^{+} \sum_{m=0}^{M} a_m \varphi_m \bigg|_{x=1} = 0; \ i \le n. \end{aligned} \tag{7}$$

Выбрав в качестве неизвестных постоянные a_m при оговоренных выше функциях, получим связь k постоянных с остальными постоянными суммы (6). С учетом этой зависимости сумма (6) преобразуется в виду

$$u_M = \sum_{m=k}^{M} a_m \psi_m , \tag{8}$$

где ψ_m представляют собой линейную комбинацию функций φ_m:

$$\psi_m = \varphi_m + \sum_{j=0}^{k-1} b_j \varphi_j, \quad m = k, k+1, \ldots, M, \tag{9}$$

здесь b_j – постоянные, определенные в результате решений системы (7).

С учетом свойств исходной системы функций (5) и проведенной процедуры система функций (9) удовлетворяет всем обязательным требованиям, предъявляемым к базису.

3. Пример

Рассмотрим краевую задачу (изгиб балки постоянного сечения распределенной по полуволне синусоиды нагрузки и изгибающим моментом при *x*=1):

$$\begin{aligned} & u^{IV} = 2\sin\left(\frac{\pi}{2}(x-1)\right); \\ & u\big|_{x=-1} = 0; \quad u'\big|_{x=-1} = 0; \quad u\big|_{x=1} = 0; \quad u''\big|_{x=1} = -1. \end{aligned} \tag{10}$$

Здесь штрих обозначает дифференцирование по *x*.

Точное решение этой задачи имеет вид

$$u(x) = \frac{\left(x^2-1\right)}{8\pi}\left(\left(16-\pi^3\right)x - 48 - \pi^3\right) - \frac{32}{\pi^4}\cos\frac{\pi x}{2}. \tag{11}$$

Краевая задача (10) эквивалентна определению элемента, на котором достигает минимума функционал

$$\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} u''^2 dx - 2\int_{-1}^{1} \sin\frac{\pi(1-x)}{2} u dx + u'\big|_{x=1} \tag{12}$$

с дополнительными условиями

$$u(-1) = u'(-1) = u(1) = 0. \tag{13}$$

Пространство H_A состоит из функций, которые на отрезке $-1 \le x \le 1$:

1) абсолютно непрерывны;

2) имеют вторые производные, суммируемые с квадратом;

3) при $x = 1$ обращаются в нуль, а при $x = -1$ обращаются в нуль вместе с первыми производными.

Скалярное произведение и норма определяются формулами

$$(u,v)_A = \int_{-1}^{1} u''v''dx, \quad \|u\|_A^2 = \int_{-1}^{1} u''^2 dx. \tag{14}$$

Рассмотрим конечную последовательность функций $\varphi_k(x) \equiv x^k, k = 0,1,\ldots$. Эти функции удовлетворяют всем требованиям, предъявляемым к базису, за исключением требования а), т.е. $\varphi_k(x) \notin H_A$, причем они удовлетворяют требованиям гладкости (требования 1), 2)), но не выполняют условия (13) (требование 3)). Предполагая искать приближенное решение в виде (6), потребуем выполнения условий (13), ограничившись первыми семью функциями, что приводит к СЛАУ:

$$\begin{cases} \sum_{i=0}^{6} (-1)^i a_i = 0; \\ \sum_{i=1}^{6} (-1)^i i a_i = 0; \\ \sum_{i=0}^{6} a_i = 0. \end{cases} \qquad (15)$$

Выберем в качестве неизвестных, например, a_0, a_2, a_5. Решив относительно этих неизвестных систему трех линейных алгебраических уравнений (15) получим:

$$a_0 = 2a_1 + a_3 + a_4 + 2a_6; \quad a_2 = -2a_1 - a_3 - 2a_4 - 3a_6; \quad a_5 = -a_1 - a_3.$$

Эти зависимости приводят к новому базису:

$$\psi_1 = 2 + x - 2x^2 - x^5; \psi_3 = 1 - x^2 + x^3 - x^5; \quad \psi_4 = 1 - 2x^2 + x^4; \quad \psi_6 = 2 - 3x^2 + x^6. \quad (16)$$

Нетрудно убедиться, что каждая из функций (16) теперь удовлетворяет условиям (13), т.е. $\psi_k(x) \in H_A$.

Процедура минимизации функционала (12) в пространстве, натянутом на линейную оболочку $u_6 = a_1\psi_1 + a_3\psi_3 + a_4\psi_4 + a_6\psi_6$, приводит к решению

$$a_1 = a_3 = \frac{\pi^3 - 16}{8\pi^3}; \quad a_4 = \frac{35}{\pi^7}\left(228\pi^2 - \pi^4 - 2160\right); \quad a_6 = \frac{21}{\pi^7}\left(\pi^4 - 180\pi^2 + 1680\right).$$

Окончательно приближенное решение имеет вид

$$u_6(x) = 10^{-2}(0{,}6121x^6 - 8{,}273x^4 - 6{,}050x^3 + 8{,}661x^2 + 6{,}050x - 0{,}9994). \quad (17)$$

Другой общепринятый прием снятия ограничений – это умножение каждой функции в (6) на некоторую положительную функцию. Она должна быть подобрана таким образом, чтобы выполнялись условия (13). Нетрудно убедиться, что в качестве такой может служить $\omega(x) = (1+x)^2(1-x)$. Минимизация функционала (12) на функции $u_4(x) = \omega \sum_{m=0}^{4} a_m x^m$ приводит к значению коэффициентов

$$a_0 = \frac{\pi^7 + 40\pi^4 + 3360\pi^2 - 40320}{8\pi^7}; \quad a_1 = \frac{7(720 + 60\pi^2 - \pi^4)}{\pi^7}; \quad a_2 = a_3 = \frac{21(1680 - 180\pi^2 + \pi^4)}{\pi^7}.$$

Приближенное решение в точности совпадает с решением (17).

Дополнительные ограничения (13) можно снять с помощью универсального метода множителей Лагранжа. В этом случае расширенный функционал принимает вид

$$\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} u''^2 dx - 2\int_{-1}^{1} \sin\frac{\pi(1-x)}{2} u dx + u'\big|_{x=1} + \lambda_1 u\big|_{x=-1} + \lambda_2 u'\big|_{x=-1} + \lambda_3 u\big|_{x=1},$$

где λ_1, λ_2, λ_3 – множители Лагранжа.

Условие стационарности этого функционала на функции $u_6(x) = \sum_{m=0}^{6} a_m x^m$ уже без всяких дополнительных требований, приводит к точному значению коэффициентов a_i:

$$a_0 = \frac{\left(\pi^7 + 40\pi^4 + 3360\pi^2 - 40320\right)}{8\pi^7}; \quad a_1 = a_3 = \frac{\pi^3 - 16}{8\pi^3}; a_5 = 0;$$

$$a_2 = \frac{\left(\pi^7 - 72\pi^4 + 36960\pi^2 - 362880\right)}{8\pi^7}; \; a_4 = \frac{35}{\pi^7}\left(228\pi^2 - \pi^4 - 2160\right);$$

$$a_6 = \frac{21}{\pi^7}\left(\pi^4 - 180\pi^2 + 1680\right)$$

и приближенному решению (17).

Представляется интересным оценить точность полученного приближения. В данном случае известно точное решение, поэтому близость к нему приближенного решения можно оценить, составив энергетическую разность (14) $\left\|u - u_6\right\|_A^2 = 8{,}70 \cdot 10^{-8}$, что составляет $\frac{\left\|u - u_6\right\|_A}{\left\|u\right\|_A} 100\% = \frac{2{,}950 \cdot 10^{-4}}{0{,}4915} 100\% = 0{,}060\%$.

Из формулы (14) и неравенства Буняковского следует равномерная оценка погрешности [3]:

$$\left|u - u_6\right| \le \left\|u - u_6\right\|_A; \qquad \left|u - u_6\right| \le 0{,}2950 \cdot 10^{-4}.$$

На самом деле погрешность значительно меньше. Точное значение функции (11), ее первой, второй и третьей производных совпадают с соответствующими приближенными значениями (17) с точностью до толщины линии в выбранном масштабе (рис.1).

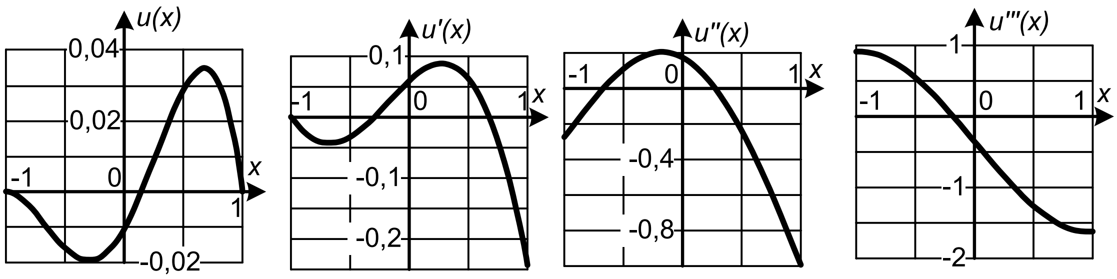

Рис.1. Значение функции, ее первой, второй и третей производных

Погрешность приближенного решения

Метрика	Расстояние	Погрешность, %	Точка области
$\rho_{C^0}\left(u - u_6\right)$	$8{,}470 \cdot 10^{-6}$	0,024	0,0
$\rho_{C^1}\left(u - u_6\right)$	$5{,}195 \cdot 10^{-5}$	0,021	±0,23
$\rho_{C^2}\left(u - u_6\right)$	$1{,}064 \cdot 10^{-3}$	0,11	±1
$\rho_{C^3}\left(u - u_6\right)$	0,02215	1,35	±1
$\rho_{C^4}\left(u - u_6\right)$	0,2179	10,9	±1

В таблице приведены расстояния между функциями, определенные по формуле

$$\rho_{C^j}\left(u, v\right) = \max_{-1 \le x \le 1} \left| \frac{\partial^j u}{\partial x^j} - \frac{\partial^j v}{\partial x^j} \right|;$$

абсолютное значение этого расстояния; погрешность по отношению к максимальному значению функции на рассматриваемом интервале и точка интервала, в которой реализуется максимальное различие значений функций.

Различие точного значения четвертой производной (правой части уравнения краевой задачи (10)) и четвертой производной приближенного решения (17) (невязка) существенна на границах (рис.2, таблица).

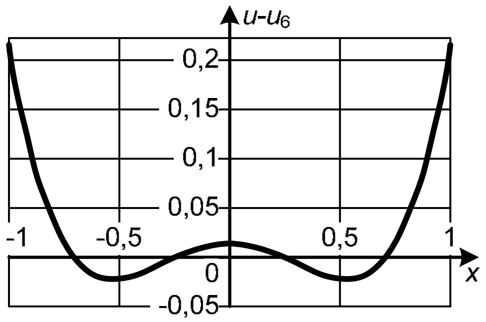

Рис.2. Невязка приближенного решения

Заключение

1. Предложен способ построения базиса на основе некоторой последовательности функций, которые не удовлетворяют главным граничным условиям краевой задачи.

2. На иллюстративном примере краевой задачи, имеющей точное решение, показано, что предлагаемый способ ведет к тому же результату, что и известные: способ умножения каждой базисной функции на специально подобранную и метод множителей Лагранжа. В данном примере при удержании первых семи степенных функций достигнута достаточно высокая точность. Порядок разрешающих матриц в первых двух подходах составил 4, при использовании метода множителей Лагранжа – 10. Это говорит о хорошем приближении при использовании аналитического базиса.

3. При построении базиса предложенным способом имеется некоторый произвол при выборе функций и коэффициентов, с помощью которых выполняется удовлетворение краевым условиям. Этот произвол можно использовать на повышение качества базиса (ортогональность, почти ортогональность, сильная минимальность). Решение приведенного примера выполнялось без округлений, поэтому проблема численной устойчивости здесь была снята. Для практического использования численных методов на базис накладывается ряд дополнительных требований, без выполнения которых получение численного результата невозможно.

4. Выкладки приведены для одномерных областей. Распространение предложенного подхода на области большей размерности, по крайней мере, на области, топологически эквивалентные прямоугольнику, не представляет принципиальных трудностей.

В заключение автор считает своим долгом поблагодарить Халилова С.А. за ценные замечания и помощь в подготовке статьи.

Список литературы

1. Михлин С.Г. Вариационные методы в математической физике.– М.: Гостехиздат, 1957.– 478 с.

2. Ректорис К. Вариационные методы в математической теории упругости М.:"Наука". – 1983. – 458 с.

3. Михлин С.Г. Численная реализация вариационных методов.– М.: Наука, – 1966.– 432 с.