УДК 517.927.21

В.С. Проценко, Т.В. Денисова

Теоремы сложения гармонических функций в координатах эллиптического цилиндра и сжатого эллипсоида вращения и их приложение к решению контактной задачи о совместном вдавливании в упругое полупространство полосового и кругового штампов

Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского «ХАИ»
Харьковский национальный экономический университет

С помощью теорем сложения гармонических функций в системах координат сжатых сфероидов метод Фурье удалось применить к исследованию контактной задачи о нескольких круговых штампах на упругом полупространстве [1]. Ранее этим методом в системах координат эллиптических цилиндров была решена аналогичная контактная задача для системы полосовых штампов [2]. В настоящей статье получены новые теоремы сложения гармонических функций в системах координат эллиптического цилиндра и сжатого эллипсоида вращения. Рассмотрен случай, когда полоса и круговой диск, в которые вырождаются цилиндр и эллипсоид, лежат в одной плоскости. Эти теоремы дают возможность применить классический метод Фурье к решению нового класса задач теории потенциала в пространстве с включениями в виде эллиптического цилиндра и сжатого эллипсоида вращения. В частности, в работе решена ранее никем не исследованная контактная задача об одновременном вдавливании в упругое полупространство полосового и кругового штампов.

1. Теоремы сложения

Будем рассматривать уравнение Лапласа в двух локальных декартовых одинаково направленных системах координат $\left(x_j, y_j, z_j\right)$, $\left(j=1{,}2\right)$. Эти системы сдвинуты на величину h по оси Ox так, что $x_1 = h + x_2$. С первой системой $\left(x_1, y_1, z_1\right)$ свяжем систему координат эллиптического цилиндра $\left(\xi_1, \theta_1, y_1\right)$:

$$x_1 = a_1 ch\xi_1 \cdot \cos\theta_1, \quad z_1 = a_1 sh\xi_1 \cdot \sin\theta_1, \; 0 \le \xi_1 < \infty, \; -\pi \le \theta_1 \le \pi, \; -\infty < y_1 < +\infty .$$

Со второй системой $\left(x_2, y_2, z_2\right)$ свяжем систему координат сжатого эллипсоида вращения $\left(\xi_2, \theta_2, \varphi_2\right)$:

$$x_2 = a_2\, ch\xi_2 \cdot \sin\theta_2 \cdot \cos\varphi_2, \quad y_2 = a_2\, ch\xi_2 \cdot \sin\theta_2 \cdot \sin\varphi_2, \quad z_2 = a_2\, sh\xi_2 \cdot \cos\theta_2,$$
$$0 \le \xi_2 < \infty, \; 0 \le \theta_2 \le \pi, \; 0 \le \varphi_2 \le 2\pi .$$

В этих формулах a_1 и a_2 – размерные параметры, причем $h > a_1 + a_2$.

Основной результат состоит в том, что получены новые разложения (теоремы сложения) гармонических функций в приведенных выше системах координат. Эти разложения из системы координат (1) к системе координат (2) имеют вид:

$$e^{i\mu y_1} Fek_n(\xi_1,-q_1) ce_n(\theta_1,-q_1) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} H_{m,s}^{(n)}(\mu,1;2)\cdot \varphi_{2s+|m|}^{(m)}(\xi_2,\theta_2,\varphi_2); \quad (1)$$

$$e^{i\mu y_1} Gek_n(\xi_1,-q_1) se_n(\theta_1,-q_1) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} K_{m,s}^{(n)}(\mu,1;2)\cdot \varphi_{2s+|m|+1}^{(m)}(\xi_2,\theta_2,\varphi_2), \quad (2)$$

где $q_1 = \dfrac{a_1^2\mu^2}{4}$, $a_1 \cdot ch\xi_1 + a_2 < h$, $\varphi_n^{(m)}(\xi,\theta,\varphi) = P_n^m(i\, sh\xi)\cdot P_n^m(\cos\theta) e^{im\varphi}$;

$$H_{m,s}^{(n)}(\mu,1;2) = \int_{-\infty}^{\infty} C_n(k) B_{2s+|m|}^{(m)}(k,\mu;a_2)\,dk;$$

$$K_{m,s}^{(n)}(\mu,1;2) = i^{-1}\int_{-\infty}^{\infty} D_n(k) B_{2s+|m|+1}^{(m)}(k,\mu;a_2)\,dk;$$

$P_n^m(z)$ – функция Лежандра первого рода [3].

Интегралы сходятся при условии, что $h > a_1 + a_2$.

Выражения для $C_n(k)$ и $D_n(k)$ получены в статье [4] и представлены формулами

$$C_{2k} = \frac{ce_{2k}(0,-q_1)\cdot ce_{2k}(0,q_1)}{2\pi\, A_0^{(2k)}(q_1)} Ce_{2k}(t,-q_1),$$

$$C_{2k+1} = \frac{ce_{2k+1}(0,-q_1)\cdot se'_{2k+1}(0,q_1)}{2\pi\sqrt{q_1}\cdot B_1^{(2k+1)}(q_1)} Ce_{2k+1}(t,-q_1),$$

$$D_{2n+1} = \frac{se'_{2n+1}(0,-q_1)\cdot ce_{2n+1}(0,q_1)}{2\pi\sqrt{q_1}\cdot A_1^{(2n+1)}(q_1)} Se_{2n+1}(t,-q_1),$$

$$D_{2n+2} = \frac{se'_{2n+2}(0,-q_1)\cdot se'_{2n+2}(0,q_1)}{2\pi\, q_1\cdot B_2^{(2n+2)}(q_1)} Se_{2n+2}(t,-q_1), \quad t = Arsh\left(\frac{k}{|\mu|}\right).$$

Функции $B_n^{(m)}(k,\mu;a)$ приведены в справочнике [5]. Они имеют вид

$$B_n^{(m)}(k,\mu;a) = i^m \frac{(2n+1)(n-m)!}{(n+m)!}\left(\frac{\mu-\gamma}{k}\right)^m \cdot g_n(ak),$$

$$\gamma = \sqrt{\mu^2+k^2}, \quad g_n(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}}\cdot I_{n+1/2}(x),$$

где a – параметр сфероидальной системы координат; $I_k(x)$ – функция Беселя мнимого аргумента [5]; $Fek_n(\xi,-q)$, $Ce_n(\xi,-q)$ и т.д. – функции Матье [6].

Теоремы сложения из системы координат (2) в систему координат (1) представим равенством

$$Q_n^m(i\,sh\xi_2)\cdot P_n^m(\cos\theta_2)e^{im\varphi_2} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\mu y_1}\left[\sum_{k=0}^{\infty} E_{k,n}^{(m)}(2;1,\mu)\cdot Ce_k(\xi_1,-q_1)\times\right.$$

$$\left.\times ce_k(\theta_1,-q_1)+\sum_{n=1}^{\infty} F_{k,n}^{(m)}(2;1,\mu)\cdot Se_k(\xi_1,-q_1)\cdot se_k(\theta_1,-q_1)\right]d\mu, \quad (3)$$

где $a_2\cdot ch\xi_2+a_1<h$, $Q_n^{(m)}(z)$ – функция Лежандра второго рода [5];

$$E_{k,n}^{(m)}(2;1,\mu)=\omega_k^{(m)}\int_{-\infty}^{\infty} Ce_k(t,-q_1)\cdot h_n^{(m)}(k,\mu)dk;$$

$$F_{k,n}^{(m)}(2;1,\mu)=\gamma_k^{(m)}\int_{-\infty}^{\infty} Se_k(t,-q_1)\cdot h_n^{(m)}(k,\mu)dk; \quad (4)$$

$$h_n^{(m)}(k,\mu)=\frac{e^{-\gamma h}}{\gamma}\left(\frac{\mu-\gamma}{k}\right)^m\cdot g_n(a_2k),\quad k=|\mu|sht.$$

Сходимость интегралов имеет место при условии $h>a_1+a_2$.

Коэффициенты $\omega_k^{(m)}$, $\gamma_k^{(m)}$ вычисляются по формулам [4]:

$$\omega_n^{(m)}=a_2\frac{(-1)^{n+1}(n+m)!}{\pi(n-m)!}i^{m+1}\alpha_n,\quad \gamma_n^{(m)}=a_2\frac{(-1)^{n+1}(n+m)!}{\pi(n-m)!}i^m\beta_n;$$

$$\alpha_{2n}=\frac{A_0^{(2n)}(q_1)}{ce_{2n}(0,q_1)\cdot ce_{2n}(0,-q_1)},\quad \alpha_{2n+1}=\frac{\sqrt{q_1}\;B_1^{(2n+1)}(q_1)}{se'_{2n+1}(0,q_1)\cdot ce_{2n+1}(0,-q_1)}:$$

$$\beta_{2n-1}=\frac{\sqrt{q_1}\;A_1^{(2n-1)}(q_1)}{ce_{2n-1}(0,q_1)\cdot se'_{2n-1}(0,-q_1)},\quad \beta_{2n}=\frac{q_1\;B_2^{(2n)}(q_1)}{se'_{2n}(0,q_1)\cdot se'_{2n}(0,-q_1)}.$$

Разложения (1), (2), (3) получены из соответствующих разложений работы [4] с использованием разложений (81.1.5), (325.5.1) из справочника [5].

Равномерная сходимость найденных разложений в указанных областях следует из свойств разлагаемых функций [3] и теорем о равносходимости [7] рядов по собственным и присоединенным функциям.

2. Контактная задача теории упругости

Рассмотрим задачу о вдавливании в упругое полупространство двух штампов – полосового и кругового. Трением в области контакта будем пренебрегать, а область вне штампов будем считать свободной от усилий. Расстояние между осью симметрии полосы, т.е. осью y_1, и центром круга (S_2) принимаем равным h. В такой постановке задача сводится к нахождению гармонической функции Φ в полупространстве по краевым условиям:

$$\Phi(x,y,0)=w_j(x,y), \qquad \text{когда } (x,y)\in(S_j), \quad (j=1,2), \tag{5}$$

$$\Phi'_z(x,y,0)=0, \qquad \text{когда } (x,y)\notin(S_j), \tag{6}$$

где $w_j(x,y)$ – осадка под j-м штампом после вдавливания.

Здесь (S_2) – круг радиусом a_2, (S_1) – полоса ($|y_1|<\infty$, $|x_1|\le a_1$) на плоскости $z=0$. Кроме того, будем предполагать, что $grad\,\Phi(M)\to 0$, когда $M\to\infty$.

Функцию $\Phi(M)$ представим в виде суммы гармонических функций

$$\Phi(M)=\Phi_1(M)+\Phi_2(M).$$

Здесь $\Phi_1(M)$ и $\Phi_2(M)$ можно записать в локальных координатах эллиптического цилиндра и сжатого эллипсоида вращения (см. п. 1):

$$\Phi_1(\xi_1,\theta_1,y_1)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\mu y_1}\sum_{k=0}^{\infty} a_k(\mu)\cdot Fek_k(\xi_1,-q_1)\cdot ce_k(\theta_1,-q_1)\,d\mu; \tag{8}$$

$$\Phi_2(\xi_2,\theta_2,\varphi_2)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} b_{nm}\cdot Q^m_{2n+|m|}(i\,sh\xi_2)\cdot P^m_{2n+|m|}(\cos\theta_2)e^{im\varphi_2}, \tag{9}$$

где $a_k(\mu)$ и b_{nm} – неизвестные, подлежащие определению из краевых условий.

Следует отметить, что функции (7), (8) выбраны удовлетворяющими условию (6).

При достаточно общих условиях на функции $w_j(x,y)$ их можно разложить в сходящиеся ряды соответственно в полосе (S_1) и в круге (S_2):

$$w_1=\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\mu y_1}\sum_{k=0}^{\infty} h_k(\mu)\cdot ce_k(\theta_1,-q_1)\,d\mu, \quad q_1=\frac{a_1^2\mu^2}{4}; \tag{10}$$

$$w_2=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} l_{nm}\cdot P^m_{2n+|m|}(\cos\theta_2)e^{im\varphi_2}, \tag{11}$$

где $h_k(\mu)$ и l_{nm} – известные коэффициенты.

Реализуем краевое условие (5) в области (S_1). Для этого воспользуемся формулой разложения (3) для записи функции Φ_2 в системе координат (ξ_1,θ_1,y_1) и положим в (7) $\xi_1=0$. В результате приравнивания коэффициентов при $e^{i\mu y_1}\cdot ce_k(\theta_1,-q_1)$ получим равенство

$$a_k(\mu)\cdot Fek_k(0,-q_1)+\sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} b_{nm}\cdot E^{(m)}_{k,2n+|m|}(\mu;2,1)\cdot Ce_k(0,-q_1)=h_k(\mu), \tag{12}$$

$$k=0,1,2,\ldots.$$

Второе уравнение, связывающее $a_k(\mu)$ и b_{nm}, найдем из второго условия (5). Для этого функцию Φ_1 запишем с помощью разложения (1) в координатах $(\xi_2, \theta_2, \varphi_2)$ и положим в (7) $\xi_2 = 0$.

Приравниваем в полученном равенстве коэффициенты при гармониках $P_n^m(\cos\theta_2)\cdot e^{im\varphi_2}$, в результате чего найдем

$$b_{nm}\cdot Q^m_{2n+|m|}(i0) + \int\limits_{-\infty}^{\infty} d\mu \sum_{k=0}^{\infty} a_k(\mu)\cdot H^{(k)}_{m,n}(\mu;1,2)\cdot P^m_{2n+|m|}(i0) = l_{nm}, \qquad (13)$$
$$|m| = 0,1,2,\ldots;\quad n = 0,1,2,\ldots.$$

Введем обозначения

$$b_{nm}\cdot Q^m_{2n+|m|}(i0) = x_{nm},\quad a_k(\mu)\cdot Fek_k(0,-q_1) = y_k(\mu)$$

и перепишем систему уравнений (12), (13) в виде

$$\begin{cases} y_k(\mu) + \sum\limits_{m=-\infty}^{\infty}\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_{nm}\cdot R^{(m)}_{k,n}(\mu;2,1) = h_k(\mu), \\ x_{nm} + \int\limits_{-\infty}^{\infty} d\mu \sum\limits_{k=0}^{\infty} y_k(\mu)\cdot S^{(k)}_{n,m}(\mu;1,2) = l_{nm}, \end{cases} \qquad (14)$$

где

$$R^{(m)}_{k,n}(\mu;2,1) = E^{(m)}_{k,2n+|m|}(\mu;2,1)\,\frac{Ce_k(0,-q_1)}{Q^m_{2n+|m|}(i0)},$$
$$S^{(k)}_{n,m}(\mu;1,2) = H^{(k)}_{m,n}(\mu;1,2)\,\frac{P^m_{2n+|m|}(i0)}{Fek_k(0,-q_1)}. \qquad (15)$$

Из системы (14) можно исключить неизвестные x_{nm}. В результате придем к интегро - сумматорной системе уравнений относительно функций $y_k(\mu)$:

$$y_k(\mu) - \int\limits_{-\infty}^{\infty} d\lambda \sum_{r=0}^{\infty} y_r(\lambda)\cdot T^{(r)}_k(\lambda,\mu) = h_k(\mu) - \sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} l_{nm}\cdot R^{(m)}_{k,n}(\mu;2,1), \qquad (16)$$

где $k = 0,1,2,\ldots;\ -\infty < \mu < +\infty$;

$$T^{(r)}_k(\lambda,\mu) = \sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} R^{(m)}_{k,n}(\mu;2,1)\cdot S^{(r)}_{n,m}(\lambda;1,2). \qquad (17)$$

Можно поступить по-другому: из системы (14) исключим неизвестные $y_k(\mu)$ и придем к двумерной бесконечной системе линейных уравнений относительно неизвестных x_{nm}:

$$x_{nm} - \sum_{s=-\infty}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} x_{ps} \cdot M_{nm}^{ps} = l_{nm} - \int_{-\infty}^{\infty} d\mu \sum_{k=0}^{\infty} h_k(\mu) \cdot S_{n,m}^{(k)}(\mu;1,2), \tag{18}$$

где $n = 0,1,2,\ldots;\quad |m| = 0,1,2,\ldots;$

$$M_{nm}^{ps} = \int_{-\infty}^{\infty} d\mu \sum_{k=0}^{\infty} S_{n,m}^{(k)}(\mu;1,2)\, R_{k,n}^{(m)}(\mu;2,1). \tag{19}$$

Нам представляется, что система (18) более удобна для численной реализации и удовлетворяет тем достаточным условиям, которые гарантируют возможность применения к ней метода редукции [8]. Доказательство этого факта проводить не будем, а лишь укажем, что оно опирается на равенства Парсеваля, которые вытекают из теорем сложения, использующихся при решении краевой задачи.

В заключение следует отметить, что предложенный метод решения контактной задачи остается пригодным и в случае, когда в упругое полупространство вдавливаются несколько штампов-полос и несколько круговых штампов. Для этого необходимо дополнительно к изложенному воспользоваться теоремами сложения, которые приведены в работах [1, 2].

Список литературы

1. Проценко В.С., Денисова Т.В., Гребеникова Е.В. Внешние гармонические задачи Дирихле и Неймана для системы сжатых сфероидов и их применение к задачам теории упругости // Теоретическая и прикладная механика. – 2003. - Вып. 38. – С. 3 – 8.

2. Рвачев В.Л., Проценко В.С. Контактные задачи теории упругости для неклассических областей. – К.: Наук. думка, 1977. – 236 с.

3. Гобсон Е.В. Теория сферических и эллипсоидальных функций. – М.: Изд-во иностр. лит., 1952. – 476 с.

4. Проценко В.С., Бузько Я.П., Денисова Т.В. Теоремы сложения для решений уравнения Гельмгольца в декартовой системе координат и системе координат эллиптического цилиндра // Открытые информационные и компьютерные интегрированные технологии. – Х.: НАКУ „ХАИ”. - 2005. – Вып. 29. – С. 39 – 45.

5. Ерофеенко В.Т. Теоремы сложения. – Минск: Наука и техника, 1989. – 256 с.

6. Мак-Лахлан Н.В. Теория и приложения функций Матье. – М.: Изд-во иностр. лит., 1953. – 458 с.

7. Марченко В.А. Спектральная теория операторов Штурма - Лиувилля. – К.: Наук. думка, 1972. – 220 с.

8. Канторович Л.В., Крылов В.И. Приближенные методы высшего анализа. – М.–Л., Физматгиз, 1962. – 608 с.