

## **Оценка вероятности потери технической устойчивости ракеты-носителя методом ускоренного статистического моделирования**

*Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского «ХАИ»*

### ***Постановка проблемы, цель работы***

Важным моментом при оценке управляемости ракеты-носителя (РН) является определение запаса технической устойчивости движения. Для решения этой задачи в работе [1] была разработана эталонная модель. Оценка вероятности технической устойчивости ракеты-носителя (РН) в вышеупомянутой работе произведена методом статистического моделирования. В результате проведенных исследований получен доверительный интервал вероятности потери устойчивости движения РН ( $Q_d \in [3.5 \cdot 10^{-5} \dots 6.1 \cdot 10^{-5}]$  при объеме статистического моделирования  $N=1000000$ ).

Метод оценки вероятности технической устойчивости РН, изложенный в работе [1], рассматривает устойчивость объекта на конечном интервале времени с учетом начальных возмущений и постоянно действующих возмущающих сил и моментов. Этот метод является наиболее подходящим для решения сложных вероятностных задач, т.к. позволяет учесть вероятностные характеристики большого количества параметров, имеющих случайные разбросы, и получить значение вероятности потери технической устойчивости, наиболее близкое к реальному значению, т.е. эталонное значение. Однако этот метод имеет существенный недостаток — большие затраты машинного времени на проведение эксперимента [1]. Эту проблему решает метод ускоренного статистического моделирования (УСМ) путем проведения моделирования с аппроксимирующей моделью исходной критериальной функции (КФ).

Целью данного исследования является определение приемлемости оценки вероятности потери технической устойчивости ракеты-носителя методом УСМ.

### ***Объект исследования***

Динамика ракеты в канале рыскания I ступени полета РН описывается системой дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами. На этом участке ракета проходит максимальные скоростные напоры, и органы управления испытывают максимальную нагрузку. Поскольку основная загрузка органов управления на рассматриваемом этапе связана с парированием возмущающих моментов, то для сокращения времени проведения статистического моделирования в работе [1] рассматривались только уравнения моментов и автомата стабилизации. Для возможности сравнения полученных здесь результатов с эталонными [1] мы сохранили ту же динамическую схему.

$$\begin{aligned} a_{\psi\psi}(t) \cdot \psi + a_{\psi\delta}(t) \cdot \delta &= -M(t); \\ T_1 \cdot \delta' + \delta &= K_{\psi} \cdot \psi + K_{\psi'} \cdot \psi', \end{aligned} \tag{1}$$

где  $\psi$  — координата, характеризующая вращение ракеты вокруг центра масс (угол рыскания);  $\delta$  — угол отклонения управляющих органов;  $a_{ij}(t)$  — функции, выражающие закон изменения параметров ракеты;  $T_1$  — постоянная времени автомата стабилизации (АС);  $K_\psi$  — коэффициент усиления по каналу рыскания,  $K_{\psi'} = T_d K_\psi$ ;  $T_d$  — постоянная времени дифференцирования;  $\bar{M}(t)$  — приведенный возмущающий момент в функции времени;  $\dot{\psi}_g$  — угол рыскания, измеряемый датчиком угла;  $K_z$  — коэффициент усиления по скорости отклонения центра масс. В этой системе  $\bar{M}(t) = a_{\psi z}(t) \cdot W(t)$ , где  $W(t)$  — ветровое воздействие на ракету.

Номинальные значения параметров системы (1) и их разбросы приведены в табл. 1.

Таблица 1

Обозначение параметра	Наименование	Номинальное значение	Разброс, %
$K_\psi$	Коэффициент усиления по каналу рыскания	6	7
$T_d$	Постоянная времени дифференцирования	0,5	25
$T_1$	Постоянная времени АС	0,1108	20
$a_{\psi\psi}$	Функции выражающие закон изменения параметров ракеты	См. рис. 1	25
$a_{\psi\delta}$		См. рис. 2	10

Ветровые воздействия, учитывающие влияние случайных возмущений и начальных условий на устойчивость РН, представляются в виде канонического разложения [2]

$$W(t) = W_0(t) + \sum_i V_i \cdot \varphi_i(t), \quad (2)$$

где  $W_0(t)$  — систематическая составляющая скорости ветра;  $\varphi_i(t)$  — неслучайные функции, называемые координатными;  $V_i$  — стандартные случайные числа, распределенные по нормальному закону. Задавая  $V_i$  и подставляя их в (2) получим реализации профиля ветра с учетом высотной корреляции его значений.

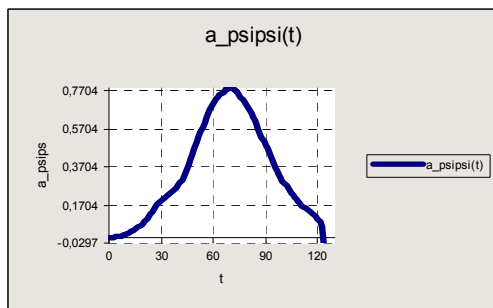


Рис. 1. Номинальное значение коэффициента  $a_{\psi\psi}(t)$

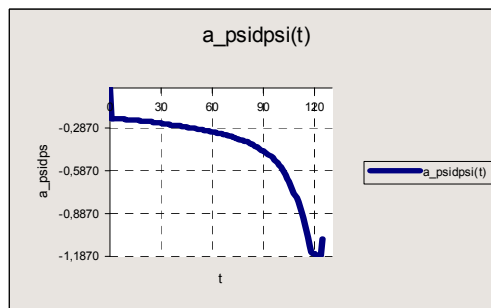


Рис. 2. Номинальное значение коэффициента  $a_{\psi\delta}(t)$

Графики изменения систематической составляющей ветра  $W_0(t)$  и среднего значения функций  $\varphi_i(t)$  показаны на рис. 3 и 4.

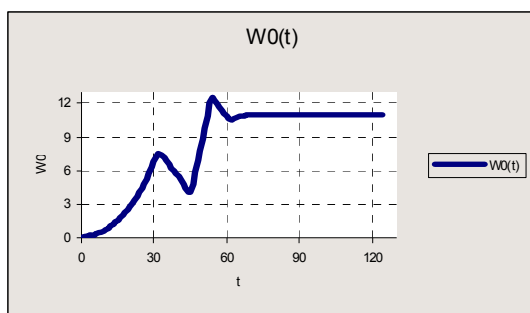


Рис. 3. Систематическая составляющая скорости ветра  $W_0(t)$

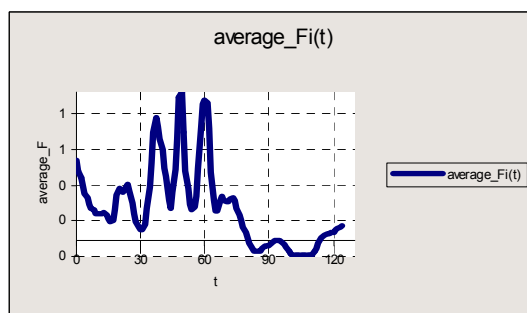


Рис. 4. Среднее значение координатных функций  $\varphi_i(t)$

Вероятность потери технической устойчивости будет определяться вероятностью выхода за допустимый уровень значения отклонения управляющих органов  $\delta(t)$ . В качестве условия технической устойчивости рассмотрим условие

$$|\delta(k, \eta, t)| < \Lambda, \quad (3)$$

где  $\delta$  — угол отклонения управляющих органов РН, эта критериальная функция (КФ) изменяется в зависимости от времени  $t$  и возмущений (параметрических  $\eta$  и внешних  $k$ );  $\Lambda$  — предельно допустимое значение угла отклонения  $\delta$ .

### **Методика исследования. Основные результаты**

Применение метода УСМ позволяет получить вероятность технической устойчивости с заданной точностью и значительно сокращает время моделирования по сравнению с обычным статистическим моделированием.

#### **Порядок оценки технической устойчивости РН методом УСМ:**

- 1) задание объема моделирования  $N$  и  $N_L$  — объема сохраняемых максимальных значений  $\delta(t)$ ;
- 2) генерация нормальных случайных чисел  $v_i$ ;
- 3) задание необходимых параметров системы дифференциальных уравнений (1) с учетом случайных разбросов параметров;
- 4) построение аппроксимирующих моделей КФ для всех моментов времени на исследуемом отрезке;
- 5) нахождение  $N_\Lambda$  максимальных реализаций КФ, вычисленных по аппроксимирующей модели;
- 6) сортировка и сохранение массивов случайных реализаций КФ и разбросов параметров, соответствующих найденным максимальным реализациям КФ;
- 7) решение системы уравнений (1) и сохранение полученного статистического материала;

- 8) сортировка полученного массива реализаций КФ для фиксированного момента времени и определение количества реализаций, превысивших допустимую границу устойчивости РН (см. условие (3));
- 9) определение вероятности потери технической устойчивости РН при заданных условиях:

$$Q = \frac{N_{\Lambda}}{N}, \quad (5)$$

где  $N_{\Lambda}$  — количество значений функции случайного аргумента, превысивших границу  $\Lambda$ ;  $N$  — объем моделирования.

Для оценки технической устойчивости на исследуемом интервале времени построены следующие граничные модели КФ[4]:

- классическая линейная модель (КЛМ);
- компланарная линейная модель (КНЛМ);
- секущая граничная линейная модель (СЛМ);
- квадратичная модель (КМ);
- многомерная аппроксимирующая квадратичная модель (МКМ).

Все линейные модели определены в виде [3,4]

$$\lambda(t) = \delta_0(t) + \sum_{i=1}^k \delta_i(t) \cdot v_i + \lambda_0(t) + \sum_{i=1}^n b_i(t) \cdot \eta_i,$$

где  $\lambda(t)$  — линейная модель КФ;  $\lambda_0(t)$  — значение КФ при нулевых разбросах;  $b_i(t)$  — коэффициенты линейных моделей КФ;  $\eta_i$  — случайные разбросы параметров,  $i = \overline{1, n}$  ( $n$  — количество параметров со случайными разбросами),  $\eta_i = v_i \cdot \sigma_i$ ,  $v_i$  — случайные числа, распределенные по нормальному закону,  $\sigma_i$  — с.к.о. разбросов параметров;  $\delta_0(t)$  — систематическая составляющая ветровых возмущений;  $\delta_i(t)$  — значение КФ при действии возмущения  $i$ -й функции  $\varphi_i(t)$ .

Квадратичная модель определена в виде

$$\lambda(t) = \delta_0(t) + \sum_{i=1}^k \delta_i(t) \cdot v_i + \lambda_0(t) + \sum_{i=1}^n b_i(t) \cdot \eta_i + \sum_{i=1}^n c_i(t) \cdot \eta_i^2,$$

где  $b_i(t)$  и  $c_i(t)$  — коэффициенты квадратичной модели КФ.

Модель многомерной аппроксимации КФ определена в виде

$$\lambda(t) = \delta_0(t) + \sum_{i=1}^k \delta_i(t) \cdot v_i + \lambda_0(t) + \sum_{i=1}^n b_i(t) \cdot \eta_i + \sum_{i=1}^n c_i(t) \cdot \eta_i^2 + \sum_{i < j} d_{ij}(t) \cdot \eta_i \cdot \eta_j,$$

где  $b_i(t)$ ,  $c_i(t)$  и  $d_{ij}(t)$  — коэффициенты модели КФ.

Полученные значения некоторых коэффициентов для линейных и квадратичных моделей представлены в виде графиков на рис. 5 - 14.

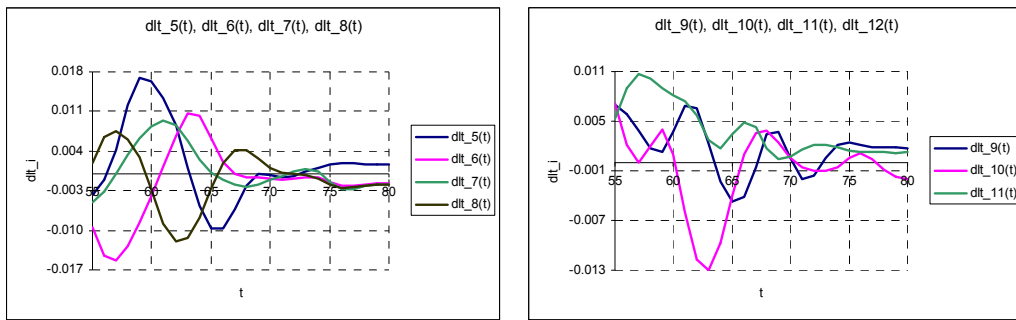


Рис. 5. Значения КФ при действии возмущения  $i$ -той  $\varphi_i(t)$  функции ( $\delta_i(t)$ ,  $i=1..11$ )

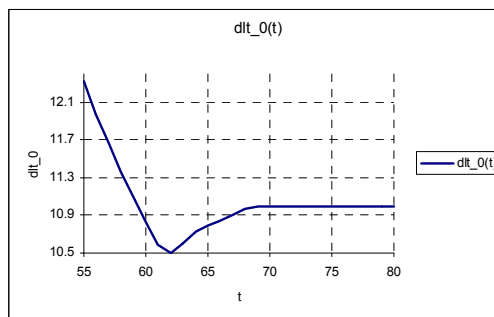


Рис. 6. Значение КФ при действии систематической составляющей ветровых возмущений  $\delta_0(t)$

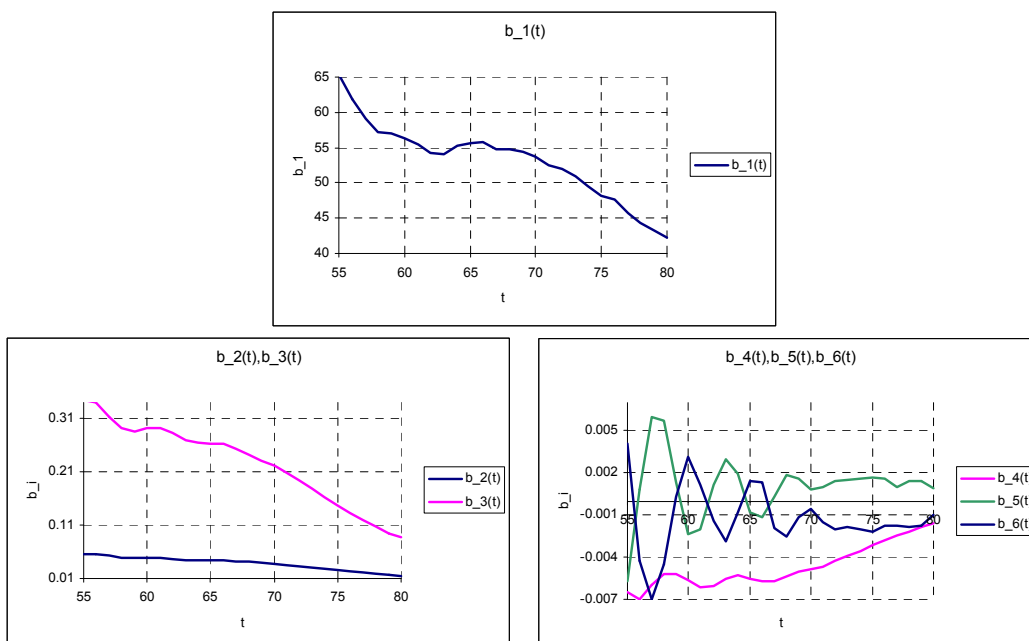


Рис. 7. Коэффициенты линейных моделей КФ  $b_i(t)$  для КЛМ и КНЛМ

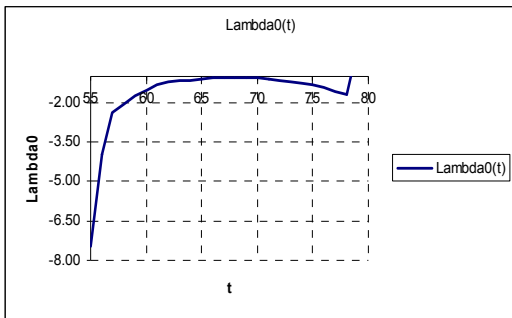


Рис. 8. Значение КФ при нулевых разбросах ( $\lambda_0(t)$ ) для КНЛМ

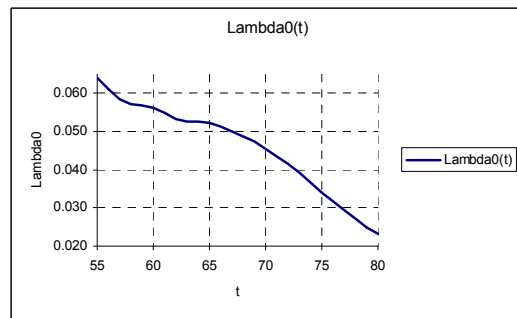


Рис. 9. Значение КФ при нулевых разбросах ( $\lambda_0(t)$ ) для КЛМ и СЛМ

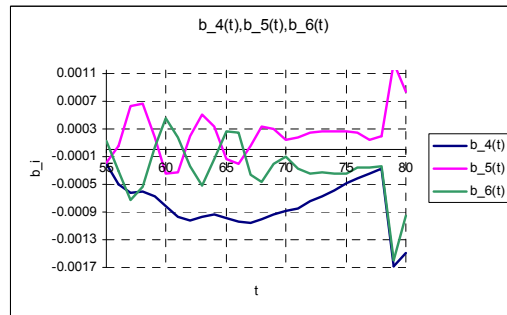
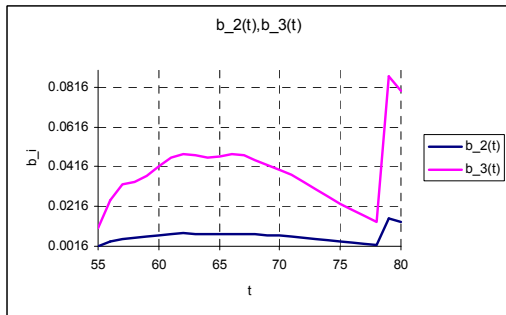


Рис. 10. Коэффициенты линейных моделей КФ  $b_i(t)$  для СЛМ

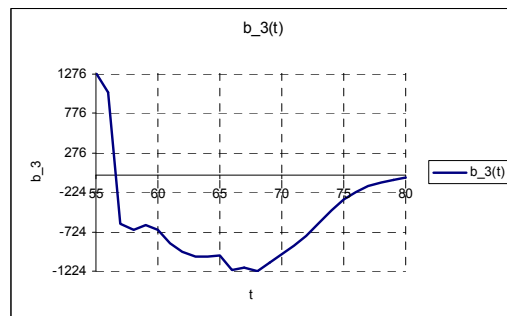
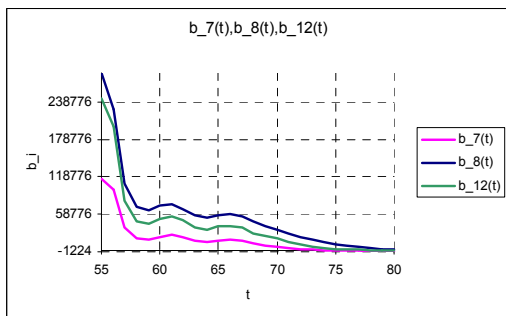
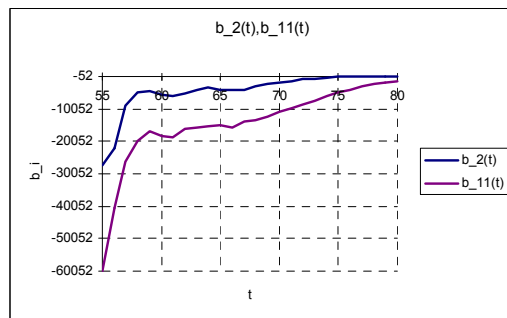
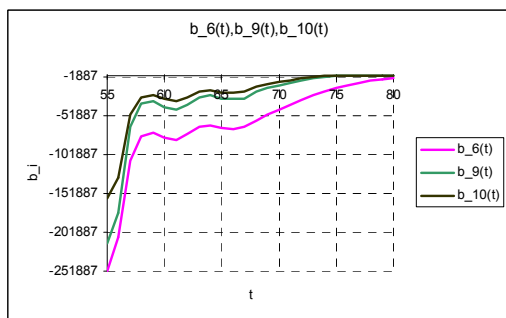
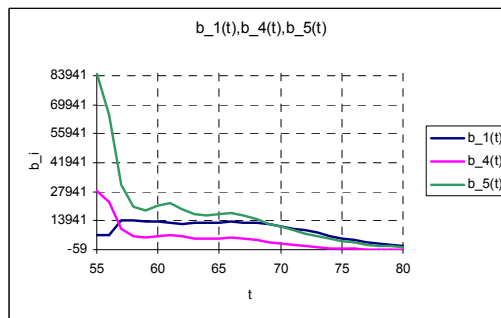


Рис. 11. Коэффициенты линейных моделей КФ  $b_i(t)$  для КМ

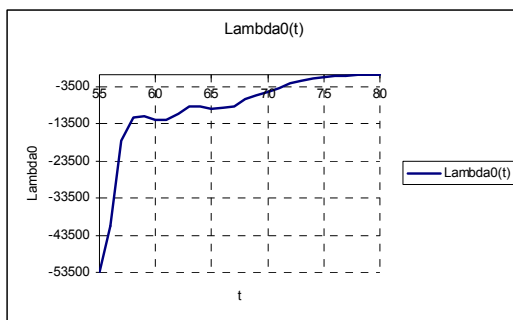


Рис. 12. Значение КФ при нулевых разбросах ( $\lambda_0(t)$ ) для КМ

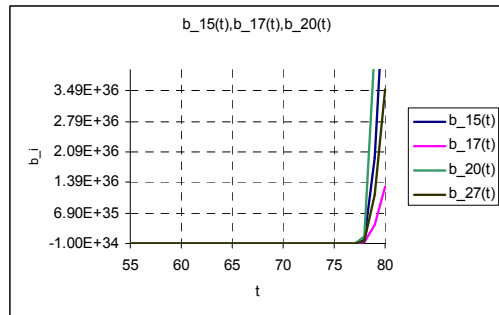
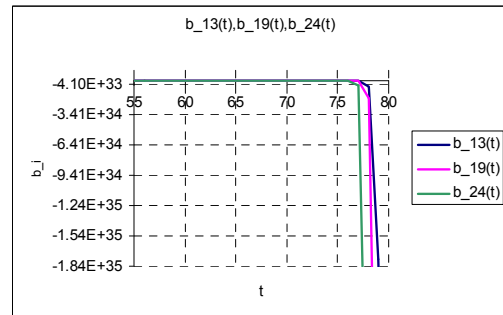
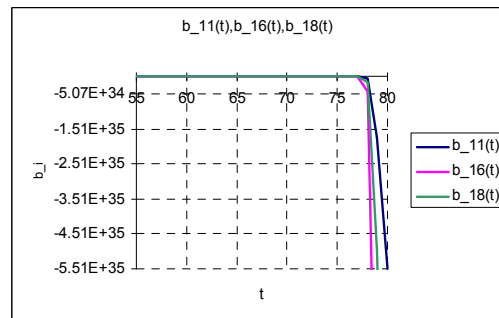
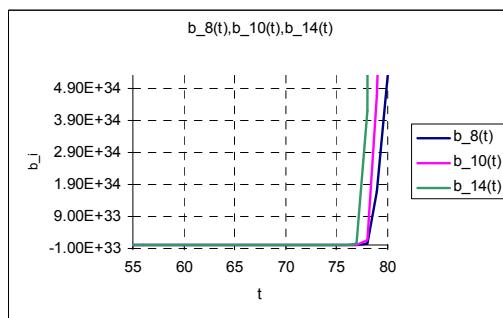
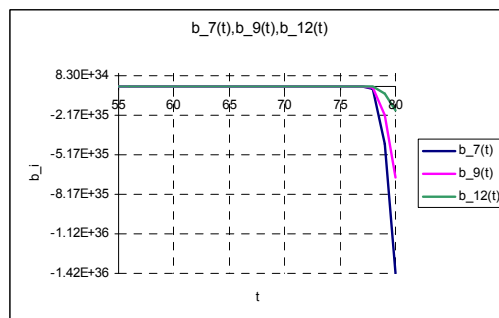
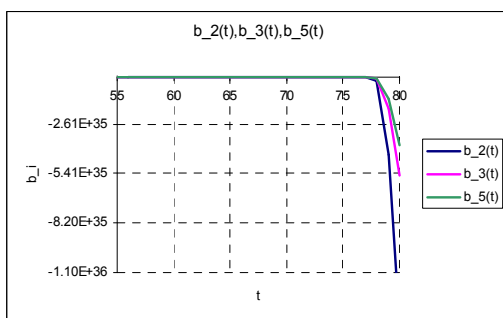
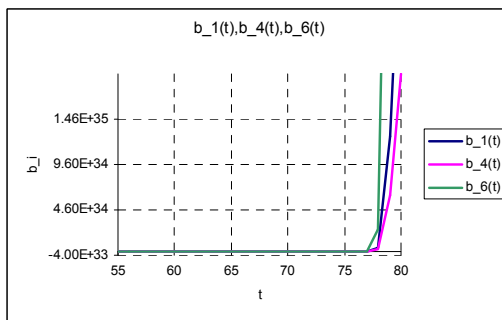


Рис. 13. Коэффициенты линейных моделей КФ  $b_i(t)$  для МКМ

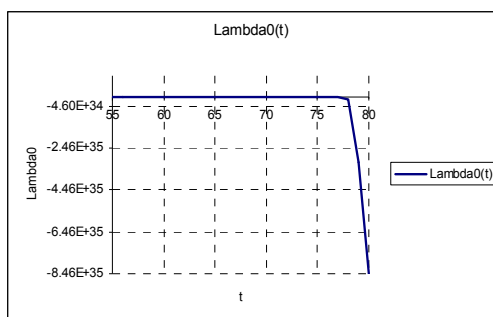


Рис. 14. Значение КФ при нулевых разбросах ( $\lambda_0(t)$ ) для МКМ

Как отмечалось выше, для оценки технической устойчивости исследуемого объекта построены граничные модели и проведено УСМ [5,6] на интервале времени  $t \in [30..85]$ . Моделирование осуществлялось в объеме  $N=1000000$ . В качестве предельно допустимого значения угла отклонения управляющих органов принято значение  $\Lambda=0,3$ . По полученному статистическому материалу определена вероятность потери технической устойчивости  $Q$  (5). Замеры затрат машинного времени показали, что для одинакового объема статистического материала УСМ заняло 30 минут, в то время как обычное статистическое моделирование проводилось примерно 240 часов.

В табл. 2 приведены полученные результаты.

Таблица 2

Способ моделирования	$N_\Lambda$	$Q$
КЛМ	2	2,0E-06
КНЛМ	2	2,0E-06
СЛМ	2	2,0E-06
КМ	30	3,0E-05
МКМ	72	7,2E-05

Анализ результатов, приведенных в табл. 2, показывает, что использование граничных линейных моделей при исследовании технической устойчивости методом УСМ является неприемлемым, т.к. приводит к большой погрешности конечного результата (отличие от эталонного результата на порядок). Модели КМ и МКМ позволяют получить весьма приемлемый по точности результат.

Поэтому для моделей КМ и МКМ определим объем моделирования с целью получения конечного результата с заданными точностью и доверительной вероятностью. Зададим точность конечного результата (вероятности потери технической устойчивости), равную 30% при доверительной вероятности  $P_d=0,95$  (традиционная для аэрокосмической техники доверительная вероятность).

Объем статистического моделирования вычислим по формуле [3]

$$N = \frac{U_d^2}{\beta^2 \cdot Q}, \quad (6)$$



где  $U_d$  — безразмерный аргумент функции Гаусса, соответствующий доверительной вероятности;  $Q$  — вероятность потери технической устойчивости РН;  $\beta$  — относительная погрешность  $Q$ . Для заданной точности 30% относительная погрешность  $\beta = 0.3$ .

Для заданной доверительной вероятности  $P_d = 0.95$  получаем:

$$U_d = \arg \Phi\left(\frac{1+P_d}{2}\right), \Phi — \text{функция Гаусса};$$

$$U_d = \arg \Phi\left(\frac{1+0.95}{2}\right) = 1.96.$$

По формуле (3) вычислим объемы моделирования:

- для КМ

$$N_{KM} = \frac{1.96^2}{0.3^2 \cdot 3 \cdot 10^{-5}} = 1.42 \cdot 10^6;$$

- для МКМ

$$N_{MKM} = \frac{1.96^2}{0.3^2 \cdot 7.2 \cdot 10^{-5}} = 5.93 \cdot 10^5.$$

В результате УСМ, проведенного для вычисленных объемов, получены следующие значения вероятности потери технической устойчивости:

- для КМ

$$Q_{KM} = 3.5 \cdot 10^{-5};$$

- для МКМ

$$Q_{MKM} = 5.2 \cdot 10^{-5}.$$

Таким образом, обе оценки вероятности потери технической устойчивости попадают в доверительный интервал, полученный для эталонной модели.

### **Выводы**

1. Для оценки вероятности потери технической устойчивости РН применение УСМ позволяет значительно сократить время моделирования. Для рассмотренного здесь примера выигрыш составил около 500 раз.
2. Использование квадратичных моделей и многомерных аппроксимирующих квадратичных моделей при проведении УСМ для оценки вероятности

потери технической устойчивости РН позволяет получить результат с заданной точностью при заданной доверительной вероятности.

3. Результаты УСМ, полученные с использованием линейных граничных моделей, могут быть использованы лишь на начальных этапах проектирования РН.

### Список литературы

1. Никифорова М.И. Эталонная модель для оценки вероятности потери технической устойчивости ракеты-носителя // Открытые информационные и компьютерные интегрированные технологии. - Х.: НАКУ «ХАИ». – 2007. – Вып. 35. - С. 30 - 36.
2. Игдалов И.М., Кучма Л.Д., Поляков Н.В., Шептун Ю.Д. Ракета как объект управления: Учебник /Под ред. акад. С.Н. Конюхова. – Днепропетровск: АРТ-ПРЕСС, 2004. –544 с.
3. Лежнина М.В., Сухоробрый В.Г. Проектная оценка вероятности достижения объектами аэрокосмической техники предельных состояний. – Х.: НАКУ «ХАИ», 2005. – 184 с.
4. Лежнина М.В., Сухоробрый В.Г. Алгоритмы построения граничных линейных моделей критериальных функций для оценки вероятности работоспособности объектов аэрокосмической техники// Открытые информационные и компьютерные интегрированные технологии. - Х.: НАКУ «ХАИ». – 2002. – Вып. 12. - С. 63 - 74.
5. Сухоробрый В.Г. Оценка вероятности работоспособности технических объектов с помощью ускоренного статистического моделирования// Авиационно-космическая техника и технология. - Х.: ХАИ. – 2000. – Вып. 19. - С. 215 - 218.
6. Сухоробрый В.Г., Айзенберг Е.Я. Ускоренное статистическое моделирование для оценки вероятности устойчивости динамических систем со случайными параметрами // Математическое моделирование динамических процессов в системах с жидкостью. – К.: ИМ АН УССР. – 1988. – С. 128 – 136