

О приближенном решении некоторых задач аэродинамики

При решении многих вопросов практической аэродинамики приходится заменять крыло одним вихревым шнуром. Напряжение этого вихревого шнура обычно определяют через подъемную силу, пользуясь теоремой Н. Е. Жуковского.

Однако применение теоремы Н. Е. Жуковского при замене крыла вихревым шнуром может легко привести к ошибке.

Рассмотрим, например, вопрос о влиянии поверхности земли на крыло в плоско-параллельном потоке*). Беря зеркальное изображение крыла относительно поверхности земли и называя через Γ и $-\Gamma$ напряжения вихря, заменяющего крыло, и вихря, заменяющего зеркальное изображение крыла, легко получить для подъемной силы величину

$$P_z = \rho \Gamma V_0 \left(1 - \frac{\Gamma}{4\pi h V_0}\right),$$

где h — высота крыла (т. е. вихря) над землей, а V_0 — скорость на бесконечности.

Эту величину обычно сравнивают с подъемной силой крыла в безграничном потоке и делают вывод, что подъемная сила у поверхности земли уменьшается на величину

$$\frac{\rho \Gamma^2}{4\pi h}.$$

Совершенно ясно, что этот „вывод“ является сплошным недоразумением, так как нет никаких оснований заменять величину циркуляции Γ в формуле для P_z ее выражением

$$\Gamma = \frac{P}{\rho V_0}$$

через подъемную силу крыла в безграничном потоке.

Но если интенсивность вихря, которым мы заменяем крыло, нельзя определять с помощью теоремы Н. Е. Жуковского, то из какого же условия следует определять ее?

Совершенно ясно, что это условие должно иметь чисто кинематический характер. Оно должно быть аналогичным тому условию, из которого определяется напряжение вихрей, заменяющих тонкий профиль в методе Мунка.

В методе Мунка вихри определяются из требования, чтобы полная скорость в каждой точке скелета профиля была касательной к скелету. Заменяя крыло одним вихрем, мы не можем претендовать на выполнение этого требования.

*) См. например, В. Голубев, Теория крыла в плоско-параллельном потоке, изд. 1, стр. 181.

Мы можем добиться только того, чтобы в одной точке скелета скорость имела определенное направление.

В качестве такой точки естественно принять заднюю угловую точку профиля.

Поэтому мы примем следующий принцип для определения присоединенного вихря: *центр вихря должен лежать в центре образующего круга, а напряжение вихря должно быть таково, чтобы полная скорость в задней угловой точке имела направление первой оси профиля.*

Если профилем является отрезок прямой, то это значит, что в заднем конце отрезка полная скорость должна идти по отрезку, а центр вихря должен лежать в середине отрезка.

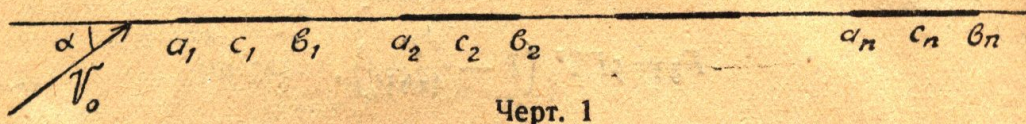
Легко видеть, что при таком определении вихря мы получим для подъемной силы крыла значение, точно совпадающее с тем, которое получается по теории Жуковского Чаплыгина.

Предметом настоящей заметки является приближенное решение ряда задач аэродинамики с помощью приведенного здесь принципа замены.

§ 1

Начнем с рассмотрения плоского разрезного крыла с любым числом перьев. Возьмем на действительной оси отрезки $a_1 b_1, a_2 b_2, \dots, a_n b_n$ и обозначим их середины через c_1, c_2, \dots, c_n .

В этих точках мы помещаем вихри $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_n$. Для определения этих величин мы получаем на основании нашего принципа следующую систему



$$\frac{\Gamma_1}{2\pi(b_1 - c_1)} + \frac{\Gamma_2}{2\pi(b_1 - c_2)} + \dots + \frac{\Gamma_n}{2\pi(b_1 - c_n)} = V_0 \sin \alpha$$

$$\frac{\Gamma_1}{2\pi(b_2 - c_1)} + \frac{\Gamma_2}{2\pi(b_2 - c_2)} + \dots + \frac{\Gamma_n}{2\pi(b_2 - c_n)} = V_0 \sin \alpha$$

.....

$$\frac{\Gamma_1}{2\pi(b_n - c_1)} + \frac{\Gamma_2}{2\pi(b_n - c_2)} + \dots + \frac{\Gamma_n}{2\pi(b_n - c_n)} = V_0 \sin \alpha.$$

Заменяя Γ_k через $2\pi V_0 \sin \alpha \cdot x_k$, перепишем эту систему в виде

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{b_i - c_k} x_k = 1 \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Решая ее найдем, что

$$x_k = \frac{(c_k - b_1)(c_k - b_2) \dots (c_k - b_{n-1})(c_k - b_n)}{(c_k - c_1)(c_k - c_2) \dots (c_k - c_{k-1})(c_k - c_{k+1}) \dots (c_k - c_n)} \quad (k = 1, 2, \dots, n);$$

будем искать полную подъемную силу нашего разрезного крыла, которая равна

$$P = 2\pi V_0^2 \sin \alpha \cdot \rho (x_1 + x_2 + \dots + x_n).$$

Чтобы найти $x_1 + x_2 + \dots + x_n$, положим

$$\omega(x) = (x - c_1)(x - c_2) \dots (x - c_n),$$

$$f(x) = (x - b_1)(x - b_2) \dots (x - b_n).$$

С помощью этих обозначений мы получим, что

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = - \sum_{k=1}^n \frac{f(c_k)}{\omega'(c_k)}.$$

По интерполяционной формуле Лагранжа

$$\sum_{k=1}^n \frac{f(c_k)}{(x - c_k)\omega'(c_k)} = \sum_{k=1}^n \frac{f(c_k) - \omega(c_k)}{(x - c_k)\omega'(c_k)} = \frac{f(x) - \omega(x)}{\omega(x)}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + \dots + x_n &= - \lim_{x \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{x f(c_k)}{(x - c_k)\omega'(c_k)} = \\ &= - \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x[f(x) - \omega(x)]}{\omega(x)}. \end{aligned}$$

Но

$$f(x) - \omega(x) = \sum_{k=1}^n (c_k - b_k) \cdot x^{n-1} + Ax^{n-2} + \dots$$

Поэтому

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = \sum_{k=1}^n (b_k - c_k),$$

и мы получаем формулу

$$P = \pi \cdot \sin \alpha \cdot \rho V_0^2 \cdot 2 \sum_{k=1}^n (b_k - c_k),$$

которая совпадает с результатом точной теории С. Чаплыгина, так как

$$2 \sum_{k=1}^n (b_k - c_k)$$

есть сумма хорд всех перьев крыла.

§ 2

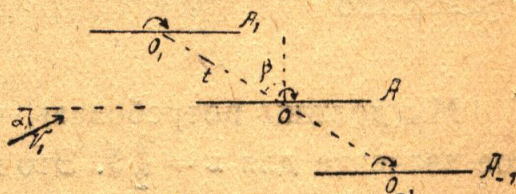
Рассмотрим бесконечную решетку с плоскими перьями. Обозначим через b хорду пера, через t — расстояние между серединами хорд двух соседних перьев и через β угол между перпендикуляром к хорде и прямой, соединяющей середины хорд (см. черт. 2).

Построим плоско-параллельное течение, налагая на равномерный поток с комплексной скоростью $V_0 e^{-i\alpha}$ поток от вихрей одинаковой интенсивности Γ , расположенных в серединах хорд.

Комплексная скорость от вихря в точке O_k , очевидно равна

$$-\frac{\Gamma}{2\pi i} \frac{1}{z - k t e^{i(\beta + \frac{\pi}{2})}}$$

Поэтому комплексная скорость рассматриваемого нами течения представится в виде



Черт. 2

$$\begin{aligned} \omega &= u - iv = V_0 e^{-i\alpha} - \frac{\Gamma}{2\pi i} \left\{ \frac{1}{z} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{1}{z - k t e^{i\beta}} + \frac{1}{z + k t e^{i\beta}} \right] \right\} = \\ &= V_0 e^{-i\alpha} - \frac{\Gamma}{2\pi i} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{z}{z^2 + k^2 t^2 e^{2i\beta}} = V_0 e^{-i\alpha} - \frac{\Gamma e^{-i\beta}}{2t} \operatorname{ctg} \frac{\pi i z e^{-i\beta}}{t}. \end{aligned} \quad (1)$$

Называя осью решетки прямую, соединяющую середины хорд, найдем, к каким пределам стремится комплексная скорость при удалении на бесконечность влево и вправо вдоль перпендикуляра к оси решетки. Эти пределы назовем комплексными скоростями на бесконечности перед и за решеткой и обозначим соответственно через $\omega_1 = V_1 e^{-i\alpha_1}$ и $\omega_2 = V_2 e^{-i\alpha_2}$.

Чтобы найти указанные величины, положим в формуле (1)

$$z = r e^{i\beta}$$

и будем приближать r к $-\infty$, чтобы найти ω_1 , и к $+\infty$, чтобы найти ω_2 . Таким путем мы получаем, что

$$\begin{aligned} \omega_1 &= V_0 e^{-i\alpha} - \frac{\Gamma e^{-i\beta}}{2t} \lim_{r \rightarrow -\infty} \operatorname{ctg} \frac{\pi r i}{t} = V_0 e^{-i\alpha} - \frac{\Gamma i e^{-i\beta}}{2t} \lim_{r \rightarrow -\infty} \frac{e^{-\frac{\pi r}{t}} + e^{\frac{\pi r}{t}}}{e^{-\frac{\pi r}{t}} - e^{\frac{\pi r}{t}}} = \\ &= V_0 e^{-i\alpha} - \frac{\Gamma i e^{-i\beta}}{2t}; \quad \omega_2 = V_0 e^{-i\alpha} + \frac{\Gamma i e^{-i\beta}}{2t}. \end{aligned} \quad (2)$$

Мы видим таким образом, что

$$V_0 e^{-i\alpha} = \frac{1}{2} (V_1 e^{-i\alpha_1} + V_2 e^{-i\alpha_2}).$$

Из формул (2) вытекает, что

$$\begin{aligned} V_1^2 &= \left(V_0 \cos \alpha - \frac{\Gamma}{2t} \sin \beta \right)^2 + \left(V_0 \sin \alpha + \frac{\Gamma}{2t} \cos \beta \right)^2 = \\ &= V_0^2 - \frac{V_0 \Gamma}{t} \sin (\beta - \alpha) + \frac{\Gamma^2}{4t^2}, \end{aligned} \quad (3)$$

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{V_0 \sin \alpha + \frac{\Gamma}{2t} \cos \beta}{V_0 \cos \alpha - \frac{\Gamma}{2t} \sin \beta}. \quad (4)$$

Определим теперь Γ с помощью принятого во введении принципа. При этом будем помнить, что при $\beta = 90^\circ$ необходимо должно иметь место неравенство

$$b < t.$$

Мы должны потребовать, чтобы величина (1) принимала вещественное значение для $z = \frac{1}{2} b$. Это приводит к следующему уравнению для нахождения Γ :

$$-V_0 \sin \alpha - \frac{\Gamma}{2t} \operatorname{Jm} \left\{ e^{-i\beta} \operatorname{ctg} \frac{\pi b i e^{-i\beta}}{2t} \right\} = 0.$$

После простых преобразований написанное уравнение принимает вид

$$-V_0 \sin \alpha - \frac{\Gamma}{2t} \operatorname{Jm} \frac{e^{-i\beta} \left[\sin_i \frac{\pi b \sin \beta}{t} - i \operatorname{sh} \frac{\pi b \cos \beta}{t} \right]}{\operatorname{ch} \frac{\pi b \cos \beta}{t} - \cos \frac{\pi b \sin \beta}{t}} = 0.$$

Полагая для краткости

$$\frac{b}{t} = \lambda,$$

получим:

$$\Gamma = 2\pi b V_0 \sin \alpha \frac{\operatorname{ch}(\pi \lambda \cos \beta) - \cos(\pi \lambda \sin \beta)}{\pi \lambda \cos \beta \cdot \operatorname{sh}(\pi \lambda \cos \beta) + \pi \lambda \sin \beta \cdot \sin(\pi \lambda \sin \beta)}.$$

Отсюда подъемная сила одного пера, выраженная через среднюю скорость, равна

$$P = \pi b \cdot \sin \alpha \cdot \rho V_0^2 \frac{2 [\operatorname{ch}(\pi \lambda \cos \beta) - \cos(\pi \lambda \sin \beta)]}{\pi \lambda \cos \beta \cdot \operatorname{sh}(\pi \lambda \cos \beta) + \pi \lambda \sin \beta \cdot \sin(\pi \lambda \sin \beta)}. \quad (5)$$

Пользуясь формулами (3), (4), легко выразить P через скорость на бесконечности перед решеткой.

Формула (5) является, конечно, приближенной, однако замечательно, что при $\beta = 0$ и при $\beta = 90^\circ$ она оказывается тождественной с формулой точной теории Граммеля.

Действительно, при $\beta = 0$ формула (5) принимает вид:

$$P = 2t \cdot \sin \alpha \cdot \rho \cdot V_0^2 \cdot \operatorname{th} \frac{\pi \lambda}{2}, \quad (5')$$

а при $\beta = 90^\circ$ (в этом случае $\lambda < 1$):

$$P = 2t \cdot \sin \alpha \cdot \rho \cdot V_0^2 \cdot \operatorname{tg} \frac{\pi \lambda}{2}. \quad (5'')$$

В общем случае ($\beta \neq 0$, $\beta \neq 90^\circ$) формула (5) дает удовлетворительные результаты, если

$$\lambda \sin \beta < 1$$

или если $\operatorname{sh}(\pi \lambda \cos \beta)$ значительно превосходит $\operatorname{tg} \beta$.

Если $\beta \leq 45^\circ$, то формулой (5) можно пользоваться для всех λ . Если же, например, $\beta = 60^\circ$, то удовлетворительных результатов можно ожидать только для $\lambda \geq 2$ и $\lambda < 1,1$.

Отметим, что для больших значений λ (при $\beta < 90^\circ$) формула (5) может быть заменена приближенной формулой

$$P \cong \rho V_0^2 \cdot t \cdot \sin \alpha \cdot \frac{2}{\cos \beta}.$$

На практике величину P обычно сравнивают с подъемной силой P_1 изолированного пера при комплексной скорости на бесконечности, равной w_1 . Эта величина равна

$$P_1 = \pi b \rho V_1^2 \sin \alpha_1.$$

Так как углы атаки предполагаются малыми, то формула (4) с достаточной точностью может быть заменена формулой

$$\sin \alpha_1 = \sin \alpha \frac{1 + \frac{\pi}{2} \lambda K \cos \beta}{1 - \sin \alpha \cdot \frac{\pi}{2} \lambda K \sin \beta},$$

где

$$K = \frac{2 [\operatorname{ch}(\pi \lambda \cos \beta) - \cos(\pi \lambda \sin \beta)]}{\pi \lambda \cos \beta \cdot \operatorname{sh}(\pi \lambda \cos \beta) + \pi \lambda \sin \beta \cdot \sin(\pi \lambda \sin \beta)}.$$

Отсюда

$$\sin \alpha = \frac{\sin \alpha_1}{1 + \frac{\pi}{2} \lambda K \cos(\beta - \alpha_1)}.$$

Далее

$$\frac{V_1^2}{V_0^2} = 1 - \pi \lambda K \cdot \sin \alpha \cdot \sin(\beta - \alpha) + \frac{\pi^2}{4} \lambda^2 K^2 \cdot \sin^2 \alpha$$

$$\cong \left[\frac{1 + \frac{\pi}{2} \lambda \cos \beta \cdot K}{1 + \frac{\pi}{2} \lambda \cos (\beta - \alpha_1) K} \right]^2.$$

Поэтому

$$R = \frac{P}{P_1} = \frac{K \left[1 + \frac{\pi}{2} \lambda \cos (\beta - \alpha_1) K \right]}{\left[1 + \frac{\pi}{2} \lambda \cos \beta K \right]^2} \quad (6)$$

$$\cong \frac{K}{1 + \frac{\pi}{2} \lambda \cos \beta K} + \sin \alpha_1 \cdot \frac{\pi}{2} \lambda \sin \beta \left[\frac{K}{1 + \frac{\pi}{2} \lambda \cos \beta K} \right]^2.$$

В таблице I приведено несколько значений величины R , и для сравнения даны точные значения этой величины, которые мы взяли из книги акад. Г. Ф. Проскура *).

Таблица I

		Приближенные значения величины R				Точные значения величины R		
$\beta = 75^\circ$	λ	0,25	0,50	0,75	1,00	0,50	0,75	1,00
	α°							
	0°	0,94	0,97	1,13	1,57	0,97	1,08	1,13
	2°,5	0,95	1,00	1,19	1,74	0,98	1,13	1,23
	5°	0,97	1,03	1,25	1,91	1,03	1,20	1,32
$\lambda \sin \beta = 1$	λ_β	1,41	1,16	1,06		1,41	1,16	1,06
	α°	45°	60°	70°		45°	60°	70°
	0°	0,33	0,63	1,16		0,32	0,55	0,84
	2°,5	0,34	0,66	1,25		0,33	0,57	0,91
	5°	0,35	0,69	1,34		0,35	0,60	0,95

§ 3

Обратимся теперь к простейшему случаю биплана в плоскопараллельном потоке. Пусть крылья биплана суть равные и параллельные пластинки, расположенные одна над другой.

Хорду обозначим через $2a$, высоту — через h . Вихри Γ_1 и Γ_2 должны быть найдены из условий, относящихся к точкам A_1 и A_2 . Мы получаем уравнения

$$V_0 \sin \alpha = \frac{\Gamma_1}{2\pi a} + \frac{\Gamma_2}{2\pi} \frac{a}{a^2 + h^2}$$

и

$$V_0 \sin \alpha = \frac{\Gamma_2}{2\pi a} + \frac{\Gamma_1}{2\pi} \frac{a}{a^2 + h^2}.$$

*) Гидродинамика турбомашин, 1934 (стр. 126).

Решая эти уравнения, находим, что

$$\Gamma_1 = \Gamma_2 = 2\pi a \cdot V_0 \sin \alpha \cdot \frac{1 + 4\Delta^2}{2 + 4\Delta^2},$$

где

$$\Delta = \frac{h}{2a}.$$

Поэтому подъемная сила бипланной коробки равна

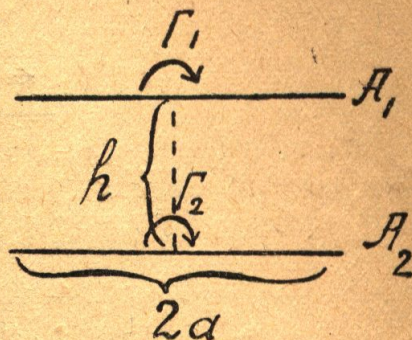
$$P = 2\pi \rho \cdot a \cdot V_0^2 \cdot \sin \alpha \cdot \frac{1 + 4\Delta^2}{1 + 2\Delta^2}.$$

Отсюда

$$C_y = \frac{P}{4a} \frac{1}{\rho V_0^2} = \frac{\pi}{2} \sin \alpha \frac{1 + 4\Delta^2}{1 + 2\Delta^2} = B\pi \cdot \sin \alpha,$$

где, стало быть, коэффициент влияния B равен

$$B = \frac{1 + 4\Delta^2}{2 + 4\Delta^2}.$$



Черт. 3

Сравним найденное нами приближенное значение коэффициента влияния B с его точным значением, которое может быть найдено с помощью эллиптических функций *).

Мы видим, что ошибка составляет 8,6% в самом невыгодном случае, когда $\Delta = 0,50$; при $\Delta = 1,50$ ошибка равна всего 1,2%.

Таблица II

Δ	Точное значение B	Прибл. значение B
0,50	0,730	0,667
0,75	0,800	0,765
1,00	0,855	0,833
1,25	0,895	0,879
1,50	0,920	0,909

§ 4

Прежде чем перейти к общему случаю биплана, рассмотрим вопрос о влиянии земли на подъемную силу крыла в плоскопараллельном потоке. Пусть на крыло, наклоненное к плоскости горизонта под углом α , набегает горизонтальный поток. Хорда крыла равна $b = 2a$.

Присоединяя симметричный вихрь, определим Γ из условия, чтобы в точке B скорость потока шла вдоль AB .

Имеем уравнение

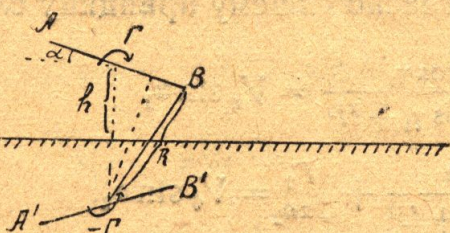
$$V_0 \sin \alpha = \frac{\Gamma}{2\pi a} - \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{a - 2h \sin \alpha}{R^2}$$

причем

$$R^2 = a^2 - 4ah \sin \alpha + 4h^2.$$

Поэтому

$$V_0 \sin \alpha = \frac{\Gamma}{2\pi a} \frac{2h(2h - a \sin \alpha)}{4h^2 - 4ah \sin \alpha + a^2}.$$



Черт. 4

Таким образом

$$\Gamma = \pi a V_0 \sin \alpha \frac{4h^2 - 4ah \sin \alpha + a^2}{h(2h - a \sin \alpha)}.$$

Пользуясь формулой Чаплыгина-Блязиуса, получаем для подъемной силы крыла величину

$$P = \rho \Gamma V_0 \left(1 - \frac{\Gamma}{4\pi h V_0}\right),$$

* См., например, Глауэрт, Основы теории крыла и пропеллера.

которая после подстановки значения циркуляции принимает вид

$$P = 2\pi a \rho V_0^2 Z \sin \alpha,$$

где

$$Z = \frac{(4h^2 - 4ah \sin \alpha + a^2)(8h^3 - 8ah^2 \sin \alpha + 4a^2h \sin^2 \alpha - a^3 \sin \alpha)}{8h^3 (2h - a \sin \alpha)^2}$$

Таблица III
Значения коэффициента Z

$\sin \alpha \backslash \frac{2a}{h}$	4	2	1
0	2	1,25	1,06
0,1	1,60	1,13	1,01
0,2	1,20	1,03	0,96
0,3	0,80	0,93	0,89

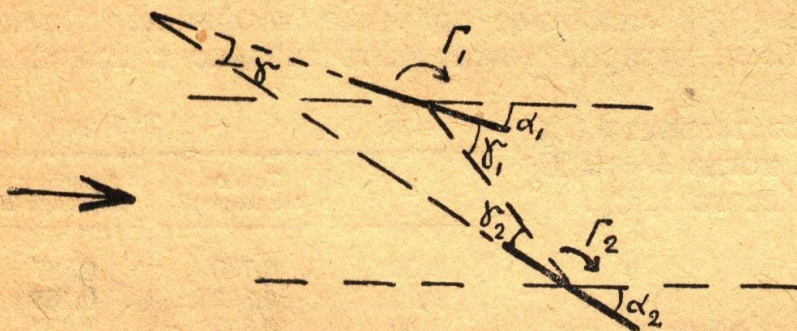
§ 5

Рассмотрим общий случай*) биплана в плоско-параллельном потоке. Обозначим через H расстояние между серединами хорд, через α_1 и α_2

углы атаки, через γ деградацию и введем еще углы γ_1, γ_2 (см. чертеж 5), так что

$$\gamma_1 - \gamma_2 = \gamma, \quad \alpha_2 - \alpha_1 = \gamma.$$

Скорость потока на бесконечности будем считать направленной в положительную сторону оси x -ов.



Черт. 5

Хорды попережнему обозначим через $b_1 = 2a_1, b_2 = 2a_2$. Заменяя крылья вихревыми шнурами Γ_1, Γ_2 , мы получаем течение с комплексной скоростью

$$W = V_0 - \frac{\Gamma_1}{2\pi iz} - \frac{\Gamma_2}{2\pi i(z - He^{-i(\alpha_1 + \gamma_1)})}.$$

Для определения Γ_1, Γ_2 мы находим согласно нашему принципу следующую систему

$$\frac{\Gamma_1}{2\pi a_1} + \frac{\Gamma_2}{2\pi} \frac{a_1 - H \cos \gamma_1}{a_1^2 - 2a_1 H \cos \gamma_1 + H^2} = V_0 \sin \alpha_1$$

$$\frac{\Gamma_1}{2\pi} \frac{a_2 + H \cos(\gamma - \gamma_1)}{a_2^2 + 2a_2 H \cos(\gamma - \gamma_1) + H^2} + \frac{\Gamma_2}{2\pi a_2} = V_0 \sin \alpha_2.$$

Вводя для краткости функцию

$$\omega(r, \theta) = \frac{1 - r^2}{2(1 - 2r \cos \theta + r^2)},$$

мы сможем полученную нами систему переписать в виде

$$\Gamma_1 + \Gamma_2 \left(\frac{1}{2} - \omega_1 \right) = V_0 \sin \alpha_1 \cdot 2\pi a_1 \quad (1)$$

$$\Gamma_1 \left(\frac{1}{2} - \omega_2 \right) + \Gamma_2 = V_0 \sin \alpha_2 \cdot 2\pi a_2,$$

*) В смысле расположения и величины крыльев; сами же крылья попережнему являются плоскими пластинками.

где

$$\omega_1 = \omega\left(\frac{a_1}{H}, \gamma_1\right)$$

$$\omega_2 = \omega\left(\frac{a_2}{H}, \pi - \gamma + \gamma_1\right).$$

На практике удобно пользоваться таблицей значений функции $\omega(r, \theta)$, которую достаточно иметь для $0 < r < 1$, так как $\omega\left(\frac{1}{r}, \theta\right) = -\omega(r, \theta)$

Таблица значений функции $\omega(r, \theta)$

$r \backslash \theta$	60°	70°	80°	90°	100°	110°	120°
0,10	0,544	0,525	0,507	0,490	0,473	0,459	0,446
0,20	0,571	0,5 1	0,490	0,461	0,432	0,407	0,387
0,25	0,576	0,526	0,480	0,440	0,407	0,379	0,357
0,30	0,576	0,514	0,461	0,418	0,381	0,351	0,327
0,35	0,569	0,497	0,439	0,391	0,353	0,322	0,298
0,40	0,552	0,474	0,426	0,362	0,323	0,293	0,269
0,45	0 5 0	0,445	0,381	0,331	0,293	0,264	0,241
0,50	0,500	0,413	0,345	0,300	0,263	0,236	0,214
0,55	0,464	0,376	0,314	0,268	0,234	0,208	0,188
0,60	0,4 1	0,337	0,278	0,236	0,204	0,181	0,163
0,65	0,374	0,295	0,241	0,203	0,175	0,155	0,139
0,70	0,323	0,252	0,204	0,171	0,147	0,129	0,116
0,75	0,270	0,209	0,168	0,140	0,120	0,106	0,095
0,80	0,213	0,164	0,132	0,109	0,0 4 3	0,082	0,073
0,85	0,159	0,121	0,096	0,080	0,068	0,060	0,053
0,90	0,105	0,080	0,064	0,053	0,045	0,039	0,035
0,95	0,052	0,039	0,031	0,0 2 6	0,022	0,0 1 9	0,017
1,00	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000

Силы, действующие на крылья, получаются по формуле Чаплыгина-Блязиуса

$$P + iQ = -\frac{\rho}{2} \oint \omega^2 dz.$$

Таким путем мы находим, что

$$P_1 + iQ_1 = \rho\pi i \left\{ \frac{V_0\Gamma_1}{\pi i} - \frac{\Gamma_1\Gamma_2}{2\pi^2} \frac{e^{i(\alpha_1 + \gamma_1)}}{H} \right\}$$

$$P_2 + iQ_2 = \rho\pi i \left\{ \frac{V_0\Gamma_2}{\pi i} + \frac{\Gamma_1\Gamma_2}{2\pi^2} \frac{e^{i(\alpha_1 + \gamma_1)}}{H} \right\}.$$

Отсюда

$$P_1 = \rho V_0 \Gamma_1 + \frac{1}{2\pi H} \rho \Gamma_1 \Gamma_2 \sin(\alpha_1 + \gamma_1), \quad Q_1 = -\frac{1}{2\pi H} \rho \Gamma_1 \Gamma_2 \cos(\alpha_1 + \gamma_1)$$

$$P_2 = \rho V_0 \Gamma_2 - \frac{1}{2\pi H} \rho \Gamma_1 \Gamma_2 \sin(\alpha_1 + \gamma_1), \quad Q_2 = \frac{1}{2\pi H} \rho \Gamma_1 \Gamma_2 \cos(\alpha_1 + \gamma_1)$$

и

$$P = P_1 + P_2 = \rho V_0 (\Gamma_1 + \Gamma_2)$$

$$Q = Q_1 + Q_2 = 0.$$

§ 6

С помощью результатов предыдущего § можно рассчитывать также и бипланы конечного размаха, если оба крыла имеют одинаковую длину, которую мы обозначим через l .

При этом мы не будем предполагать, что в плане крылья имеют форму прямоугольника, а, какова бы ни была форма крыльев в плане, положим

$$2a_1 = \frac{S_1}{l}, \quad 2a_2 = \frac{S_2}{l}$$

где S_1 и S_2 — площади крыльев. Введем также обозначения

$$\lambda_1 = \frac{l^2}{S_1}, \quad \lambda_2 = \frac{l^2}{S_2}, \quad \lambda = \frac{2\lambda_1\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2}.$$

Заменяя каждое крыло подковообразным вихрем, мы будем в соответствии с теорией индуктивного сопротивления монопланного крыла считать, что расстояние между свободными вихрями равно $1,04l$.

Вычисляя индуцированную свободными вихрями среднюю скорость на верхнем и нижнем крыле, получим, что

$$\begin{aligned} v_{1m} &= \frac{2}{\pi l} \Gamma_1 + \frac{\Gamma_2}{2\pi l} \ln \frac{\sqrt{H^2 + l^2} + H \cos(\alpha_1 + \gamma_1)}{H + H \cos(\alpha_1 + \gamma_1)} \\ v_{2m} &= \frac{2}{\pi l} \Gamma_2 + \frac{\Gamma_1}{2\pi l} \ln \frac{\sqrt{H^2 + l^2} - H \cos(\alpha_1 + \gamma_1)}{H - H \cos(\alpha_1 + \gamma_1)}. \end{aligned} \quad (1)$$

Таблица значений функции $\psi(s, \theta)$

	60°	70°	80°	90°	100°	110°	120°
1	0,24	0,27	0,30	0,35	0,40	0,48	0,64
2	0,60	0,65	0,72	0,80	0,91	1,07	1,29
3	0,89	0,96	1,04	1,15	1,28	1,41	1,71
4	1,13	1,20	1,29	1,42	1,56	1,74	2,02
5	1,32	1,40	1,50	1,63	1,78	1,97	2,26
6	1,48	1,57	1,67	1,80	1,94	2,16	2,45
7	1, 2	1,71	1,82	1,95	2,12	2,32	3,62
8	1,74	1,83	1,95	2,08	2,25	2,45	2,76
9	1,85	1,95	2,06	2,20	2,37	2,57	2,88

Вывод этих формул мы можем опустить.

Для удобства введем функцию

$$\psi(s, \theta) = \ln \frac{\sqrt{1 + s^2 + \cos \theta}}{1 + \cos \theta}.$$

Так как угол α_1 обычно мал, то заменим в уравнениях (1) $\alpha_1 + \gamma_1$ на γ_1 и напишем вытекающие из этих уравнений формулы для скосов потока в виде

$$\Delta\alpha_1 = \frac{2}{\pi l} \frac{\Gamma_1}{V_0} + \frac{\Gamma_2}{2\pi l V_0} \psi_1$$

$$\Delta\alpha_2 = \frac{2}{\pi l} \frac{\Gamma_2}{V_0} + \frac{\Gamma_1}{2\pi l V_0} \psi_2$$

где

$$\psi_1 = \psi\left(\frac{l}{H}, \gamma_1\right), \quad \psi_2 = \psi\left(\frac{l}{H}, \pi - \gamma_1\right).$$

Возьмем теперь уравнения (1) § 5. Эти уравнения после замены $\sin \alpha_1$ и $\sin \alpha_2$ на α_1 и α_2 принимают вид

$$\Gamma_1 + \left(\frac{1}{2} - \omega_1\right) \Gamma_2 = 2\pi a_1 V_0 \alpha_1$$

$$\left(\frac{1}{2} - \omega_2\right) \Gamma_1 + \Gamma_2 = 2\pi a_2 V_0 \alpha_2.$$

Рассматривая биплан конечного размаха, мы должны в правых частях заменить α_1 и α_2 на $\alpha_1 - \Delta\alpha_1$ и $\alpha_2 - \Delta\alpha_2$.

Делая при этом замену

$$\Gamma_1 = lV_0 I_1, \quad \Gamma_2 = lV_0 I_2,$$

получим следующую систему

$$I_1 + \left(\frac{1}{2} - \omega_1\right) I_2 = \frac{1}{\lambda_1} \left\{ \pi \alpha_1 - 2I_1 - \frac{1}{2} \psi_1 I_2 \right\}$$

$$\left(\frac{1}{2} - \omega_2\right) I_1 + I_2 = \frac{1}{\lambda_2} \left\{ \pi \alpha_2 - 2I_2 - \frac{1}{2} \psi_2 I_1 \right\}.$$

Величины $\pi\alpha_1$, $\pi\alpha_2$ представляют коэффициенты подъемной силы крыльев бесконечного размаха. На практике удобнее пользоваться коэффициентами подъемной силы крыльев биплана C_{y1} и C_{y2} , рассматриваемых как монопланы (с удлинениями λ_1 и λ_2). Если кривые $C_{y1} = f_1(x)$, $C_{y2} = f_2(x)$ имеют

наклоны m_1, m_2 , а соответствующие наклоны кривых, пересчитанных на бесконечный размах, суть k_1 и k_2 , то в написанных уравнениях можно заменить $\pi\alpha_1$ на $\frac{k_1}{m_1} C_{y1}(\alpha_1)$ и $\pi\alpha_2$ на $\frac{k_2}{m_2} C_{y2}(\alpha_2)$. В таком виде система весьма удобна для расчета. Она может быть записана следующим образом*):

$$\begin{aligned} (\lambda_1 + 2) I_1 + \left(\frac{\lambda_1}{2} - \lambda_1 \omega_1 + \frac{1}{2} \psi_1 \right) I_2 &= \frac{k_1}{m_1} C_{y1} \\ \left(\frac{\lambda_2}{2} - \lambda_2 \omega_2 + \frac{1}{2} \psi_2 \right) I_1 + (\lambda_2 + 2) I_2 &= \frac{k_2}{m_2} C_{y2}. \end{aligned} \quad (I)$$

Найдя I_1, I_2 , мы уже сможем определить подъемную силу бипланной коробки, а также каждого из ее крыльев. Удобнее перейти к аэродинамическим коэффициентам. Мы получим, что

$$\begin{aligned} C_y &= \frac{P}{(S_1 + S_2) \rho V_0^2} = \frac{\lambda}{2} (I_1 + I_2) \quad \left(\lambda = \frac{2\lambda_1\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} \right) \\ C_{y1} &= \lambda_1 I_1 + \frac{l}{2\pi H} \lambda_1 I_1 I_2 \sin(\alpha_1 + \gamma_1) \cong \lambda_1 I_1 \\ C_{yII} &= \lambda_2 I_2 - \frac{l}{2\pi H} \lambda_2 I_1 I_2 \sin(\alpha_1 + \gamma_1) \cong \lambda_2 I_2. \end{aligned} \quad (II)$$

Далее для коэффициента индуктивного сопротивления бипланной коробки мы получаем выражение

$$C_{xi} = \frac{S_1 \Delta\alpha_1 C_{y1} + S_2 \Delta\alpha_2 C_{yII}}{S_1 + S_2} \cong \frac{\lambda}{\pi} \left\{ I_1^2 + \frac{\psi_1 + \psi_2}{4} I_1 I_2 + I_2^2 \right\}. \quad (III)$$

Сравним последнее выражение с известной формулой Прандтля. (III) можно представить в виде

$$C_{xi} \cong \frac{\lambda}{\pi} \left\{ \frac{C_{y1}^2}{\lambda_1^2} + \frac{\psi_1 + \psi_2}{4} \frac{C_{y1} C_{yII}}{\lambda_1 \lambda_2} + \frac{C_{yII}^2}{\lambda_2^2} \right\},$$

а формула Прандтля для биплана без выноса при $l_1 = l_2$ пишется следующим образом

$$C_{xi} = \frac{\lambda}{\pi} \left\{ \frac{C_{y1}^2}{\lambda_1^2} + 2\sigma \frac{C_{y1} C_{yII}}{\lambda_1 \lambda_2} + \frac{C_{yII}^2}{\lambda_2^2} \right\}.$$

В случае отсутствия выноса $\gamma_1 = 90^\circ$, и поэтому по нашей таблице величина $\frac{1}{4} \psi_1 = \frac{1}{4} \psi_2 = \sigma'$ имеет следующие значения:

$\frac{l}{H} = 1$	2	3	4	5	6	7	8	9	
σ'	0,086	0,201	0,287	0,324	0,376	0,419	0,455	0,487	0,515

*) Величины m_1, m_2 находятся из продувок крыльев, образующих бипланную коробку. Соответствующие значения k_1, k_2 находятся на основании теории индуктивного сопротивления. Например, если верхнее крыло прямоугольное, то

$$\frac{k_1}{m_1} = \frac{1,04}{1 - 0,66 \frac{m_1}{\lambda_1}};$$

для эллиптического крыла

$$\frac{k_1}{m_1} = \frac{1}{1 - \frac{2}{\pi} \frac{m_1}{\lambda_1}}.$$

С другой стороны по Прандтлю

$\frac{l}{H}=1$	2	3	4	5	6	7	8	9
0,071	0,230	0,341	0,427	0,485	0,546	0,567	0,608	0,645

Известно, что способ Прандтля позволяет при отсутствии выноса достаточно точно построить кривую $C_{xi}=f(C_y)$ для биплана. Однако кривая для $C_y=F(x)$ по способу Прандтля не получается. Поэтому даже при отсутствии выноса изложенный нами способ может иметь преимущество перед способом Прандтля. Правда, мы предполагали, что $l_1=l_2$.

Ограничимся одним примером. Желая сравнить результаты подсчета с экспериментальными данными и результатами просчета по Прандтлю, возьмем биплан без выноса с профилем № 389 G.

Относящиеся к нему данные берем из второго выпуска Геттингенской аэродинамической лаборатории (стр. 39). Эти данные таковы:

$$l_1=l_2=96, b_1=b_2=16, H=12,8, \gamma_1=90^\circ, \gamma=0^\circ,$$

причем в плане крылья прямоугольны.

Значения C_y и C_x для отдельно взятого крыла рассматриваемой бипланной коробки даются таблицей IV.

Таблица IV

α°	C_y	C_x	C_{xi}	C_p
— 8,9	—0,152	0,0400	0,0025	0,0375
— 6	—0,032	0,0091	0,0001	0,0090
— 4,5	0,019	0,001	0,0000	0,0071
— 3,0	0,073	0,0065	0,0006	0,0059
— 1,6	0,130	0,0073	0,0018	0,0055
— 0,1	0,181	0,0085	0,0035	0,0050
1,4	0,236	0,0104	0,0039	0,0045
2,8	0,293	0,0117	0,0091	0,0046
4,3	0,349	0,0182	0,0130	0,0052
5,8	0,401	0,0234	0,0171	0,0063
8,7	0,493	0,0352	0,0257	0,0095
11,7	0,541	0,0505	0,0311	0,0194
14,7	0,540	0,0730	0,0315	0,0415

Таблица V

α°	C_y	C_x
— 8,9	—0,102	0,0322
— 6	—0,018	0,0088
— 4,5	0,022	0,0072
— 3,0	0,059	0,0071
— 1,6	0,101	0,0078
— 0,1	0,144	0,0090
1,4	0,187	0,0108
2,8	0,229	0,0139
4,3	0,269	0,0176
5,8	0,308	0,0219
8,7	0,345	0,0459
11,7	0,457	0,0459

Результат продувки рассматриваемого биплана дается таблицей V. Теперь просчитаем биплан по нашему приближенному методу.

Имеем

$$\lambda_1=\lambda_2=\lambda=6, \frac{a}{H}=0,625, \frac{l}{H}=7,5.$$

По таблицам находим, что

$$\omega_1=\omega_2=0,22$$

$$\psi_1=\psi_2=2,02.$$

Далее из таблицы IV определяем $m_1=m_2$:

$$m_1=m_2=2,14.$$

По формуле

$$\frac{k}{m} = \frac{1,04}{1 - 0,66 \frac{m}{\lambda}}$$

находим, что

$$\frac{k}{m} = 1,36.$$

Поэтому система (I) принимает вид

$$I_1 = I_2 = I$$

$$(8 + 3 - 6 \cdot 0,22 + \frac{1}{2} \cdot 2,02) I = 1,36 C_{y1},$$

откуда

$$I = 0,127 C_{y1}.$$

Следовательно, по формулам (II) и (III)

$$C_y = 0,762 C_{y1}$$

$$C_{xi} = 0,16 C_{y1}^2$$

В таблице VI приведены вычисленные по этим формулам значения C_y и C_x и для сравнения приведены эти величины, найденные по способу Прандтля.

Мы видим, что если зависимость C_x от C_y по нашему приближенному способу получается почти такая же, как и по способу Прандтля, то зависимость C_x и C_y от угла атаки по способу Прандтля получается значительно хуже, а наш приближенный метод дает эту зависимость с точностью удовлетворительной. Причина этого явления совершенно ясна, так как в рассматриваемом случае*) формула Прандтля (IV) принимает вид

$$C_{xi} = 0,169 C_y^2,$$

тогда как у нас

$$C_{xi} = 0,16 C_y^2.$$

С другой стороны связь этих величин с углом атаки по Прандтлю не может получиться правильной, поскольку он берет

$$C_y = C_{y1},$$

совершенно не учитывая в этом пункте влияния одного крыла на другое.

Таблица VI

α°	Прибл. мет.		Способ Прандтля	
	C_y	C_x	C_y	C_x
- 8,9	- 0,116	0,0396	- 0,152	0,0420
- 6	- 0,024	0,0091	- 0,032	0,0108
- 4,5	0,014	0,0070	0,019	0,0071
- 3,0	0,056	0,0064	0,073	0,0070
- 1,6	0,099	0,0071	0,130	0,0080
- 0,1	0,138	0,0081	0,181	0,0107
1,4	0,180	0,0096	0,236	0,0142
2,8	0,224	0,0126	0,293	0,0195
4,3	0,266	0,0166	0,349	0,0263
5,8	0,306	0,0214	0,401	0,0341
8,7	0,376	0,0322	0,413	0,0511
11,7	0,413	0,0468	0,541	0,0700

*) $\sigma = 0,593$, $C_y = C_{y1} = C_{yII} = C_{y1} = C_{y2}$.