/УДК 517.94 Т.В. Денисова, В.С. Проценко

Об интегральном уравнении обобщённого потенциала

Харьковский национальный экономический университет
Национальный аэрокосмический университет им. Н. Е. Жуковского «ХАИ»

Получены новые решения интегрального уравнения обобщённого потенциала, встречающегося в теории упругости неоднородных сред [1–3], теории ползучести и пластичности материалов со степенным упрочнением [4,5], в теории газовой динамики [6]. Для решения этого уравнения в работах [1,2, 7–9,14] развит метод ортогональных функций. Предлагаемый в настоящей статье метод основан на открытой авторами обобщённой теореме Кельвина[10].

Вводная часть.

1. Обобщённым потенциалом называют функцию

$$u(x,y,z)=\iint\limits_{(S)} p(\xi,\eta)\left[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+z^2\right]^{-\frac{1}{2}(1+m)}ds,\ \ 0\le m<1, \qquad (1.1)$$

где (S) - область в плоскости $z=0$; $p(x,y)$ – плотность источников поля.

В работе [11] показано, что функция (1.1) везде вне области (S) удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}+\frac{m}{z}\frac{\partial u}{\partial z}=0. \qquad (1.2)$$

В работе [10] доказана теорема о том, что преобразование Кельвина (преобразование обратных радиусов) преобразует функцию (1.1) в функцию

$$u^*(x,y,z)=\frac{1}{R^{1+m}}u\left(\frac{x}{R^2},\frac{y}{R^2},\frac{z}{R^2}\right), \qquad R^2=x^2+y^2+z^2 \quad ,$$

удовлетворяющую вне (S_1) тому же уравнению (1.2). Здесь (S_1) - образ области (S) при преобразовании Кельвина. В работе [10] теорема приведена для случая n–мерного пространства.

Использование этой теоремы даёт ключ к решению основного интегрального уравнения теории обобщённого потенциала

$$\iint\limits_{(S)} p(\xi,\eta)\left[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2\right]^{-\frac{1}{2}(1+m)}ds=w(x,y),\ \ (x,y)\in(S) \qquad (1.3)$$

для некоторых плоских областей.

Отметим, что в случае, когда $p(x,y)=p(x)$, основное интегральное уравнение (1.3) преобразуется к виду

$$\int\limits_{(l)} p(\xi)|x-\xi|^{-m}d\xi=w(x), \quad (x\in(l)), \quad 0<\mathrm{m}<1. \qquad (1.4)$$

Приведём необходимые для дальнейшего исследования формулы.

<u>Решение уравнения (1.4)</u>. Рассмотрим случай, когда $l = (-a, a)$, $w(x) \in C_1[-a, a]$, $p(x) \in L_1(-a, a)$. Для этого случая имеем решение [12]

$$p(x) = -\frac{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\cos\frac{m\pi}{2}}{\Gamma\left(\frac{1+m}{2}\right)\cdot \pi^{3/2}}\left[x^{-1}\frac{d}{dx}\int_x^a \frac{t^{2-m}dt}{\left(t^2 - x^2\right)^{\frac{1}{2}(1-m)}}\frac{d}{dt}\int_0^t \frac{f_1(s)ds}{\left(t^2 - s^2\right)^{\frac{1}{2}(1-m)}} + \right.$$

$$\left. + \frac{d}{dx}\int_x^a \frac{t^{-m}dt}{\left(t^2 - x^2\right)^{\frac{1}{2}(1-m)}}\frac{d}{dt}\int_0^t \frac{f_2(s)sds}{\left(t^2 - s^2\right)^{\frac{1}{2}(1-m)}}\right], \tag{1.5}$$

где $f_1(x)$ и $f_2(x)$- соответственно чётная и нечётная части функции $w(x)$.

<u>Решение уравнения</u> (1.3). В случае, когда (S)- круг $x^2 + y^2 < a^2$, решение уравнения (1.3) в полярной системе координат имеет вид [13]:

$$p(y, \psi) = \frac{\cos\frac{m\pi}{2}}{2\pi^3}\int_0^{2\pi}\left\{\frac{f(0, \varphi) + \Phi(a, y, \varphi, \psi)}{\left(a^2 - y^2\right)^{\frac{1}{2}(1-m)}} - \right.$$

$$\left. - \int_y^a \frac{dr}{\left(r^2 - y^2\right)^{\frac{1}{2}(1-m)}}\frac{d}{dr}\Phi(r, y, \varphi, \psi)\right\}d\varphi; \tag{1.6}$$

$$\Phi(r, y, \varphi, \psi) = r^{1-m}\int_0^r \frac{d\rho}{\left(r^2 - \rho^2\right)^{\frac{1}{2}(1-m)}}\frac{d}{d\rho}\left\{\left[\left(1 - \frac{y\rho}{r^2}e^{i(\varphi-\psi)}\right)^{-1} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \left(1 - \frac{y\rho}{r^2}e^{-i(\varphi-\psi)}\right)^{-1} - 1\right]\cdot f(\rho, \varphi)\right\}, \quad f(\rho, \psi) = w(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi). \tag{1.7}$$

Функция $w(x, y)$ предполагается дифференцируемой и $p(x, y) \in L_1(s)$.

<u>Основной результат.</u> Он состоит в том, что получены точные решения в замкнутом виде уравнений (1.3), (1.4) без привлечения специальных функций.

2. Рассмотрим интегральное уравнение

$$\left(\int_{-\infty}^a + \int_a^\infty\right)\frac{p(\xi)d\xi}{|x - \xi|^m} = f(x), \quad |x| > a \tag{2.1}$$

Применим преобразование Кельвина, которое в одномерном случае выражается формулами $x_1 = x^{-1}$, $\xi_1 = \xi^{-1}$. В результате область интегрирования перейдёт в отрезок $\left(-a^{-1}, a^{-1}\right)$, а уравнение (2.1) – в уравнение

$$\int_{-a_1}^{a_1}\frac{p_1(\xi_1)d\xi_1}{|x_1 - \xi_1|^m} = f_0(x_1), \quad |x_1| < a_1, \quad a_1 = a^{-1}, \tag{2.2}$$

где обозначено $p_1(x_1) = p\left(x_1^{-1}\right)\cdot|x_1|^{m-2}$, $f_0(x_1) = f\left(x_1^{-1}\right)\cdot|x_1|^{-m}$.

Решение $p_1(x_1)$уравнения (2.2) получим по формуле (1.5), в которой следует положить

$$f_1(s)= f_ч\left(s^{-1}\right)\cdot|s|^{-m},\ f_2(s)= f_н\left(s^{-1}\right)\cdot|s|^{-m}, \qquad (2.3)$$

где $f_ч(x)$ и $f_н(x)$ - четная и нечетная части функции $f(x)$.

После возвращения к старым переменным x и $p(x)$ находим $p(x)= p_ч(x)+ p_н(x)$,

где $p_ч(x)=k(m)x^{m+1}\dfrac{d}{dx}\left[x^{1-m}\displaystyle\int_a^x \frac{\tau^{-1}d\tau}{\left(x^2-\tau^2\right)^{\frac{1}{2}(1-m)}}\frac{d}{d\tau}\cdot\left(\tau^{1-m}\int_\tau^\infty \frac{f_ч(y)y^{-1}dy}{\left(y^2-\tau^2\right)^{\frac{1}{2}(1-m)}}\right)\right]$,

$$p_н(x)=k(m)x^{m}\frac{d}{dx}\left[x^{1-m}\int_a^x \frac{\tau d\tau}{\left(x^2-\tau^2\right)^{\frac{1}{2}(1-m)}}\frac{d}{d\tau}\left(\tau^{1-m}\int_\tau^\infty \frac{f_н(y)y^{-2}dy}{\left(y^2-\tau^2\right)^{\frac{1}{2}(1-m)}}\right)\right] \qquad (2.4)$$

$$k(m)=\Gamma(m/2)\cos(m\pi/2)\cdot\pi^{-3/2}\Gamma^{-1}((1+m)/2).$$

Решение уравнения на полубесконечном интервале

$$\int_0^\infty p(\xi)|x-\xi|^{-m}d\xi= f(x), \qquad x>0 \qquad (2.5)$$

можно свести к решению уравнения на отрезке (-1,1) после трёх последовательных преобразований: первое - сдвиг $x_1=x+1/2$, $\xi_1=\xi+1/2$; второе – преобразование Кельвина $x_1=x_2^{-1}, \xi_1=\xi_2^{-1}$; третье – сдвиг $x_2=x_3+1, \xi_2=\xi_3+1$. В результате этих преобразований придём к уравнению

$$\int_{-1}^1 \frac{p_3(\xi_3)d\xi_3}{|x_3-\xi_3|^m}= f_3(x_3),\ |x_3|<1 \qquad (2.6)$$

В уравнении (2.6)

$$f_3(x_3)=\left(x+\frac{1}{2}\right)^m f(x), \quad p_3(x_3)=\left(x+\frac{1}{2}\right)^{2-m} p(x), \quad x_3=\frac{1-2x}{1+2x}.$$

Функцию $f_3(x_3)$ следует представить в виде суммы чётной и нечётной частей и воспользоваться формулами (1.5).

<u>Приведём пример.</u> Пусть $f(x)=(x+1/2)^{-1-m}$, тогда $f_3(x_3)=(x+1/2)^{-1}=x_3+1$. В этом случае $f_{3ч}(x_3)=1,\ f_{3н}(x_3)=x_3$ и по (1.5) найдём

$$p_3(x_3)=\frac{\cos(m\pi/2)}{\pi}\left(\frac{2+m}{m}x_3+\frac{1}{2+m}\right)\left(1-x_3^2\right)^{\frac{1}{2}(m-1)}.$$

Переходим к переменным x и $p(x)$:

$$p(x)=\frac{\sqrt{2^{3-m}}\cdot\cos(m\pi/2)}{\pi m(m+2)(1+2x)^2}(A-Bx)x^{\frac{1}{2}(m-1)}, \qquad (2.7)$$

где $A=m+(2+m)^2;\ B=2\left(m^2+3m+4\right)$.

Отметим, что в работе [8] интегральное уравнение (2.1) решено с помощью преобразования Мелера-Фока, ядром преобразования которого есть функция Лежандра $P_\nu(x)$, $\nu = -1/2 + i\tau$. В работе того же автора [7] решение интегрального уравнения (2.5) получено в виде интегрального преобразования Ханкеля. Наш подход не использует специальные функции, и в этом, по нашему мнению, его преимущество перед методом собственных функций.

3. Будем рассматривать уравнение (1.3), когда (S) есть внешность круга радиуса a. В полярных координатах оно имеет вид

$$\int_a^\infty \int_0^{2\pi} \frac{p(\rho,\varphi)\rho d\rho d\varphi}{R_0^{1+m}(\rho,r,\varphi,\psi)} = f(r,\psi),\ R_0^2 = \rho^2 + r^2 - 2r\rho\cos(\varphi-\psi),\ r > a. \quad (3.1)$$

Преобразование Кельвина в рассматриваемом случае таково: $\rho = \rho_1^{-1}, r = r_1^{-1}$. Уравнение (3.1) преобразуется в уравнение

$$\int_a^\infty \int_0^{2\pi} \frac{F(\rho_1,\varphi)\rho_1 d\rho_1 d\varphi}{R_0^{1+m}(\rho_1,r_1,\varphi,\psi)} = f_1(r_1,\psi),\ r_1 < a_1 = a^{-1}. \quad (3.2)$$

В этом уравнении $f_1(r_1,\psi) = f_1(r_1^{-1},\psi)r_1^{-m-1}, F(\rho_1,\varphi) = p(\rho_1^{-1},\varphi)\rho_1^{m-3}$.

Решение уравнения (3.2) представлено формулами (1.6), (1.7).

Воспользовавшись этими формулами и возвращаясь к старым переменным, получим решение уравнения (3.1) в виде

$$p(r,\psi) = \frac{\cos\frac{m\pi}{2}}{2\pi^3 r^2} \int_0^{2\pi} \left\{ \frac{a^{1-m}[A(\varphi) + M(a,r,\varphi,\psi)]}{(r^2-a^2)^{\frac{1}{2}(1-m)}} + \int_a^r \frac{\tau^{1-m} d\tau}{(r^2-\tau^2)^{\frac{1}{2}(1-m)}} \times \right.$$

$$\left. \times \frac{d}{d\tau} M(\tau,r,\varphi,\psi) \right\} d\varphi,\quad A(\varphi) = \lim_{r\to 0}\left[r^{-m-1}\cdot f(r^{-1},\varphi)\right], \quad (3.3)$$

где $$M(\tau,r,\varphi,\psi) = -\int_\tau^\infty \frac{t^{1-m}dt}{(t^2-\tau^2)^{\frac{1}{2}(1-m)}} \frac{d}{dt}\left\{ \left[\frac{1-\varepsilon^2(t)}{1-2\varepsilon(t)\cos(\varphi-\psi)+\varepsilon^2} \right] f(t,\varphi) t^{m+1} \right\}, \quad (3.4)$$

$\varepsilon(t) = \tau^2 r^{-1} t^{-1}$. Для сравнения заметим, что в работе [14] решение уравнения (3.1) дано в виде интегрального преобразования и выражено через гипергеометрические функции.

Пример. Пусть $f(r,\psi) = r^{-m-1}\cdot\cos n\psi,\ n \ge 0$. Вычисления по формулам (3.3), (3.4) дают $A(\varphi) = \cos n\varphi$,

$$p(r,\psi) = \frac{\cos\frac{m\pi}{2}}{\pi^2 r^2} \left(\frac{a}{r}\right)^n k_n(m)\cos n\psi \left[\left(\frac{r^2}{a^2} - 1\right)^{\frac{1}{2}(m-1)} + n\int_1^{r/a} t^{n-m}\left(\frac{r^2}{a^2} - t^2\right)^{\frac{1}{2}(m-1)} \right],$$

$k_n(m) = \Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)\Gamma\left(\frac{1+m}{2}\right)\cdot\Gamma^{-1}\left(\frac{n+m+1}{2}\right)$, n - целое число.

4. В случае, когда (S) - полуплоскость $x>a$, интегральное уравнение (1.3) имеет вид

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\eta \int_{a}^{\infty} \frac{p(\xi,\eta)d\xi}{\left[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2\right]^{\frac{1}{2}(1+m)}} = f(x,y), x>a, \quad |y|<\infty . \qquad (4.1)$$

Совершим преобразование Кельвина на плоскости

$$\xi=\frac{\xi_1}{\rho_1^2},\ \eta=\frac{\eta_1}{\rho_1^2},\ \rho_1^2=\xi_1^2+\eta_1^2;\ x=\frac{x_1}{r_1^2},\ y=\frac{y_1}{r_1^2},\ r_1^2=x_1^2+y_1^2 .$$

Полуплоскость $x>a$ преобразуется в круг $(x_1-a_1)^2+y_1^2<a_1^2,\ a_1=\dfrac{1}{2a}$.

Преобразование $x_2=x_1-a_1,\ y_2=y;\quad \xi_2=\xi_1-a_1,\ \eta_2=\eta_1$ переводит круг с центром в точке $x_1=a_1$ в круг $x_2^2+y_2^2<a_1^2$. Уравнение (4.1) в полярных координатах на плоскости (ξ_2,η_2) преобразуется в уравнение

$$\int_0^{2\pi} d\varphi_2 \int_0^{a_1} \frac{p_1(\rho_2,\varphi_2)\rho_2 d\rho_2}{R_0^{1+m}(\rho_2,r_2,\varphi_2,\psi_2)} = f_1(r_2,\psi_2),\quad r_2<a_1 , \qquad (4.2)$$

где $p_1(\rho_2,\varphi_2)=p\left(\dfrac{\xi_2+a_1}{\rho_1^{*2}},\dfrac{\eta_2}{\rho_1^{*2}}\right)\cdot\rho_1^{*(m-3)},\quad \rho_1^{*2}=(\xi_2+a_1)^2+\eta_1^2;$

$$f_1(r_2,\psi_2)=f\left(\frac{x_2+a_1}{r_1^{*2}},\frac{y_2}{r_1^{*2}}\right)\cdot r_1^{*(-1-m)},\quad r_1^{*2}=(x_2+a_1)^2+y_2^2;$$

$$\xi_2=\rho_2\cos\varphi_2,\ \eta_2=\rho_2\sin\varphi_2;\quad x_2=r_2\cos\psi_2,\ y_2=r_2\sin\psi_2 .$$

Таким образом, задача о решении уравнения (4.1) для полуплоскости сведена к интегральному уравнению (1.3) для круга. Решение последнего дается формулами (1.6), (1.7), в которых следует положить $f_1(\rho,\varphi)$ вместо $f(\rho,\varphi)$, параметр a заменить на $(2a)^{-1}$, переменные y и ψ заменить соответственно на r_2 и ψ_2.

После вычисления функции $p_1(r_2,\psi_2)$ решение уравнения (4.1) находим по формуле $p(x,y)=r^{m-3}\cdot p_1(r_2,\psi_2)$.

<u>Пример.</u> Рассмотрим случай $f(x,y)=x(x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}(3+m)}$, тогда $f_1(\rho_2,\varphi_2)=\rho_2\cos\varphi_2+\dfrac{1}{2a}$. Вычисления по формулам (1.6), (1.7) приводят к результату

$$p(x,y)=\frac{\cos\frac{m\pi}{2}}{2a\pi^2(x^2+y^2)}\left(\frac{x}{a}-1\right)^{\frac{1}{2}(m-1)}\left[1+\frac{2(2ax-r^2)}{(m+1)(x^2+y^2)}\right], \qquad (4.3)$$

где $r^2=x^2+y^2$.

5. В работах [1, 2, 7] интегральное уравнение

$$\int_0^{\infty} K_{\frac{m}{2}}(|\xi - x|)|\xi - x|^{-\frac{m}{2}} \cdot \varphi(\xi)d\xi = f(x), \quad x > 0, \quad 0 \le m < 1, \tag{5.1}$$

где $K_{\nu}(x)$ - функция Макдональда, решено методом ортогональных многочленов. Изложим другой метод решения этого уравнения, не использующий спектральное соотношение для многочленов Лагерра.

Будем исходить из более общего уравнения

$$\int_0^{\infty} p(\xi,\lambda) K_{\frac{m}{2}}(|\lambda(x-\xi)|)|\xi - x|^{-\frac{m}{2}} d\xi = f(x,\lambda), \quad x > 0, \quad -\infty < \lambda < +\infty. \tag{5.2}$$

Применим к обеим частям этого уравнения, предварительно умноженного на $|\lambda|^{m/2}$, преобразование Фурье по λ с ядром $e^{-i\lambda y}$. В результате получим новое уравнение

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^{\infty} \frac{\varphi(\xi,\eta)d\xi d\eta}{\left[(x-\xi)^2 + (y-\eta)\right]^{\frac{1+m}{2}}} = f_0(x,y), \quad x > 0, \tag{5.3}$$

где обозначено

$$\varphi(x,y) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} p(x,\lambda)e^{-i\lambda y}d\lambda,$$

$$f_0(x,y) = \frac{2^{-\frac{m}{2}}}{\sqrt{\pi}\cdot \Gamma((1+m)/2)}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,\lambda)|\lambda|^{\frac{m}{2}} \cdot e^{-i\lambda y}d\lambda \tag{5.4}$$

В уравнении (5.3) сделаем замену $x_1 = x + a_1,\ \xi_1 = \xi + a,\ a > 0,$ $y_1 = y,\ \eta_1 = \eta$, в результате чего оно преобразуется к виду (4.1):

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\eta_1 \int_a^{\infty} \frac{\varphi_1(\xi_1,\eta_1)d\xi_1}{\left[(x_1-\xi_1)^2 + (y_1-\eta_1)^2\right]^{\frac{1}{2}(1+m)}} = f_1(x_{1,}y_1),\ x_1 > a, \tag{5.5}$$

где $\varphi_1(\xi_1,\eta_1) = \varphi(\xi_1 - a,\eta_1); \quad f_1(x_1,y_1) = f_0(x_1 - a, y_1)$.

Интегральное уравнение (5.5) решаем методом, изложенным в п. 4. В результате находим функцию $\varphi_1(x_1,y_1)$, а значит, и функцию $\varphi(x,y) = \varphi_1(x+a,y)$.

Решение уравнения (5.2) найдём, используя обращение преобразования Фурье (5.4) функции $\varphi(x,y)$: $p(x,\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x,y)e^{i\lambda y}dy$.

<u>Пример.</u> Пусть правая часть уравнения (5.2) задаётся формулой

$$f(x,\lambda) = \frac{|\lambda|}{(x+1)^{\frac{m}{2}}} K_{1+\frac{m}{2}}(|\lambda|(x+1)).$$

Вычисления, проведенные при $a=1$ по формулам п. 4, 5 приводят к решению

$$p(x,\lambda)=\frac{\cos\frac{m\pi}{2}}{2\pi}\cdot\frac{x^{-\frac{1}{2}(1-m)}}{(1+x)}\left(m-1+2|\lambda|+\frac{2}{x+1}\right)\cdot e^{-|\lambda|(x+1)}. \qquad (5.6)$$

Список литературы

1. Попов Г. Я. Концентрация упругих напряжений возле штампов, разрезов, тонких включений и подкреплений/ Г. Я. Попов. – М.: Наука, 1982. – 324 с.

2. Попов Г. Я. Контактные задачи для линейно – деформируемого основания/ Г. Я. Попов – К.-Одесса: Вища шк., 1982. – 167 с.

3. Рвачев В. Л. Контактные задачи теории упругости для неклассических областей/ В. Л. Рвачев, В. С. Проценко. – К.: Наук. думка, 1977. – 235 с.

4. Арутюнян Н. Х. Плоская контактная задача теории ползучести/ Н. Х. Арутюнян. // ПММ. – 1959. – Т. 23. - Вып. 5. – С. 901-924.

5. Арутюнян Н. Х. Плоская контактная задача теории пластичности со степенным упрочнением материала/ Н. Х. Арутюнян. // Изв. АН Арм. ССР. Сер. физ. – мат. наук – 1959. – Т. 12. - №2. – С. 77 – 105.

6. Берс Л. Математические вопросы дозвуковой и околозвуковой газовой динамики/ Л. Берс – М.: Изд-во иностр. лит., 1961. – 208 с.

7. Мхитарян С.М. О двух спектральных соотношениях для интегральных операторов на полубесконечном интервале и их приложение к смешанным задачам/ С.М. Мхитарян. // Изв. АН СССР, МТТ. – 1983. - №1. – С. 63 – 72.

8. Мхитарян С.М. О некоторых спектральных соотношениях, связанных с интегральным уравнением Карлемана, и их приложениях к контактным задачам/ С.М. Мхитарян. // ПММ. – 1983. – Т. 47. - Вып. 2. – С. 219 - 227.

9. Мхитарян С.М. Об одном спектральном соотношении в сфероидальных волновых функциях и его приложении к контактным задачам/ С.М. Мхитарян. // ПММ. – 1984. – Т. 48.- Вып. 5. – С. 845 - 853.

10. Проценко В.С. Обобщённая теорема Кельвина и некоторые её приложения/ В.С. Проценко, Т.В. Денисова. // Докл. НАН Украины. – 2000. - №10. – С. 23 – 26.

11. Раков А.Х. Контактная задача теории упругости для полупространства, модуль упругости которого есть степенная функция глубины/ А.Х. Раков, В.Л. Рвачев. // Докл. АН УССР. – 1961. - №3. – С. 286 – 290.

12. Проценко В.С. Контактная задача для линейно - деформируемого основания/ В.С. Проценко. // Диф. уравнения. – 1967. – Т. 3. - №2. – С. 1999 – 2002.

13. Фабрикант В.И. Замкнутое решение одного двумерного интегрального уравнения/ В.И. Фабрикант. // Изв. вузов. Сер. Математика. – 1971. - №2. – С.102 – 104.

14. Мхитарян С.М. О спектральных соотношениях для интегральных операторов, порождённых ядром в виде интеграла Вебера – Сонина, и их приложениях к контактным задачам/ С.М. Мхитарян. // ПММ. – 1984. – Т. 48. - Вып. 1. – С. 105 - 113.