УДК 62-501.72:519.6 С.В. Левин

Оптимальное управление линейными MISO-объектами с применением методов линейного программирования

Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского «ХАИ»

Введение

В практике создания систем обработки информации, в частности, автоматизированных систем управления технологическими процессами, важнейшей является задача синтеза оптимальных законов управления в условиях неопределенности в реальном масштабе времени. Для реализации этих законов на микропроцессорной технике целесообразно применять простые линейные модели, позволяющие минимизировать необходимую память вычислителя и эффективно использовать его быстродействие.

Существенной особенностью многих задач управления является наличие ограничений типа равенств и неравенств на управляющие переменные. Эти ограничения часто меняются во времени вследствие изменений в управляемом процессе (что приводит к необходимости модификации моделей), смены целей или стратегии управления.

Задачи оптимального управления при наличии ограничений на каждом такте управления можно сформулировать в виде задач математического программирования, однако применение такой постановки для управления в реальном масштабе времени часто невозможно из-за ограничений такта управления и неопределенного количества шагов вычислительных алгоритмов решения таких задач.

Постановка задачи

Автором в свое время [1] было предложено решать задачу управления линейным MISO-объектом (с одним выходом и произвольным количеством входов) на каждом такте управления в виде следующей задачи минимизации суммы взвешенных модулей (номер такта для упрощения записи опущен):

$$Z = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \left| \Delta x_i \right| \to min,$$

$$\begin{cases} A_i \le \Delta x_i \le B_i, i = \overline{1,n}, \\ \Delta y = \sum_{i=1}^{n} a_i \Delta x_i, \end{cases}$$

где n - количество управляющих переменных;

ξ_i - весовые коэффициенты управляющих переменных;

Δx_i - элементы вектора управляющих переменных;

A_i, B_i - нижние и верхние пределы изменения управляющих переменных;

Δy - рассогласование между спрогнозированным и желаемым значениями выхода объекта управления на следующем такте;

a_i - параметры текущей линейной модели объекта управления (задача идентификации объекта управления и адаптивного уточнения параметров этой модели не является предметом рассмотрения в данной статье).

Сведение задачи управления к задаче линейного программирования

Полученную задачу минимизации суммы взвешенных модулей на каждом такте управления можно свести к задаче линейного программирования (ЛП-задаче) с помощью следующей теоремы.

Теорема об ограничениях

Пусть имеется линейное уравнение

$$U = \sum_{i=1}^{n} c_i v_i, \ U \neq 0, \forall c_i \neq 0 \qquad (1)$$

и $V = \{v^j = (v_1^j, ..., v_n^j)\}$ - множество решений уравнения (1).

Тогда для того, чтобы

$$Z(v^*) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i |v_i^*| = \min_j \sum_{i=1}^{n} \xi_i |v_i^j|, \qquad (2)$$

Необходимо выполнение следующих условий:

$$\begin{cases} v_i^* \geq 0, \text{ если } sign(c_i) = sign(U), \\ v_i^* \leq 0, \text{ если } sign(c_i) = -sign(U). \end{cases} \qquad (3)$$

Доказательство этой теоремы [1] было довольно громоздким и требовало предварительного доказательства леммы. В данной работе предлагается доказательство, лишенное указанных недостатков.

Доказательство

1. $U > 0$.

Предположим, что имеется такое $v' \in V$, для которого

$$Z(v') = \sum_{i=1}^{n} \xi_i |v_i'| = \min_j \sum_{i=1}^{n} \xi_i |v_i^j|, \qquad (4)$$

причем условие (3), переписанное для этого случая:

$$\begin{cases} v_i' \geq 0, c_i > 0 \\ v_i' \leq 0, c_i < 0 \end{cases} \qquad (5)$$

не выполняется.

Тогда (перенумеровав и сгруппировав элементы) получим $k<n$, такое, что (5) для v' выполняется при $i = \overline{1,k}$ и не выполняется при $i = \overline{k+1,n}$.

Покажем, что найдется такой вектор $\tilde{v} \neq v', \tilde{v} \in V$, удовлетворяющий условиям (5), для которого $Z(\tilde{v}) < Z(v')$.

Распишем выражение (1) для $\boldsymbol{v'}$:

$$\boldsymbol{U} = \sum_{i=1}^{k} \boldsymbol{c}_i \boldsymbol{v}'_i + \sum_{i=k+1}^{n} \boldsymbol{c}_i \boldsymbol{v}'_i . \tag{6}$$

В выражении (6) элемент $\sum_{i=1}^{k} \boldsymbol{c}_i \boldsymbol{v}'_i \geq \boldsymbol{0}$ (так как условие (5) выполняется при $\boldsymbol{i} = \overline{\boldsymbol{1,k}}$), а

$$\sum_{i=k+1}^{n} \boldsymbol{c}_i \boldsymbol{v}'_i < \boldsymbol{0} . \tag{7}$$

Выражение (7) - строгое неравенство, так как (5) не выполняется только при $\boldsymbol{v}'_i \neq \boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{i} = \overline{\boldsymbol{k+1,n}}$, и $\boldsymbol{c}_i \neq \boldsymbol{0}$ по условию.

Обозначим: $\sum_{i=k+1}^{n} \boldsymbol{c}_i \boldsymbol{v}'_i = -\boldsymbol{R}^2$.

Тогда из (6) следует

$$\boldsymbol{U} + \boldsymbol{R}^2 = \sum_{i=1}^{k} \boldsymbol{c}_i \boldsymbol{v}'_i .$$

Умножим обе части последнего равенства на $\dfrac{\boldsymbol{U}}{\boldsymbol{U}+\boldsymbol{R}^2}$:

$$\boldsymbol{U} = \sum_{i=1}^{k} \boldsymbol{c}_i \left(\frac{\boldsymbol{U}}{\boldsymbol{U}+\boldsymbol{R}^2} \boldsymbol{v}'_i \right). \tag{8}$$

Обозначим

$$\tilde{\boldsymbol{v}}_i = \begin{cases} \dfrac{\boldsymbol{U}}{\boldsymbol{U}+\boldsymbol{R}^2} \boldsymbol{v}'_i, \boldsymbol{i} = \overline{\boldsymbol{1,k};} \\ \boldsymbol{0}, \boldsymbol{i} = \overline{\boldsymbol{k+1,n}.} \end{cases}$$

Очевидно, что $\tilde{\boldsymbol{v}} \in \boldsymbol{V}$.

Так как $\boldsymbol{0} < \dfrac{\boldsymbol{U}}{\boldsymbol{U}+\boldsymbol{R}^2} < \boldsymbol{1}$, то $|\tilde{\boldsymbol{v}}_i| < |\boldsymbol{v}'_i|$, $\boldsymbol{i} = \overline{\boldsymbol{1,n}}$.

Следовательно:

$$\sum_{i=1}^{n} \xi_i |\tilde{\boldsymbol{v}}_i| < \sum_{i=1}^{n} \xi_i |\boldsymbol{v}'_i| ,$$

или, другими словами,

$$\boldsymbol{Z}(\tilde{\boldsymbol{v}}) < \min_{V} \boldsymbol{Z} . \tag{9}$$

Противоречие (9) получено из-за предположения о том, что $\boldsymbol{\min Z}$ достигается в точке, координаты которой не удовлетворяют условию (5).

Таким образом, условие (3) необходимо для выполнения (2) при $\boldsymbol{U} > \boldsymbol{0}$.

2. Аналогично доказывается необходимость условия (3) для выполнения (2) при $\boldsymbol{U} < \boldsymbol{0}$.

3. Объединяя пп. 1 и 2, получаем необходимость условия (3) для выполнения (2) для любого $\boldsymbol{U} \neq \boldsymbol{0}$.

Теорема доказана.

В результате несложных преобразований [3] на каждом такте задача управления линейным MISO-объектом может быть сведена к следующей ЛП-задаче:

$$Z = \sum_{i=1}^{k} \xi_i \cdot \Delta x_i'' \to min,$$

$$0 \le \Delta x_i'' \le \beta_i, i = \overline{1,k},$$

$$\Delta y'' = \sum_{i=1}^{k} a_i' \cdot \Delta x_i'',$$

где k - количество управляющих переменных, доступных на данном такте управления ($k \le n$);

ξ_i - весовые коэффициенты управляющих переменных;

$\Delta x_i''$ - элементы вектора масштабированных управляющих переменных;

β_i - верхние пределы изменения масштабированных управляющих переменных;

$\Delta y''$ - масштабированное рассогласование между спрогнозированным и желаемым значениями выхода объекта управления на следующем такте;

a_i' - параметры текущей линейной модели объекта управления.

Решением указанной задачи являются координаты одной из вершин многоугольника, лежащего в пересечении гиперпараллелепипеда, определяемого ограничениями-неравенствами, и гиперплоскости, определяемой ограничением-равенством.

Масштабирование заключается в развороте гиперпараллелепипеда в положительную область пространства, отсечении отрицательных частей диапазонов переменных и таком перемещении гиперпараллелепипеда, чтобы угол с минимальными координатами попал в начало координат.

Решение ЛП-задачи

Полученный частный вид ЛП-задачи позволил построить вычислительную схему решения с заранее известным максимальным количеством шагов алгоритма, названного алгоритмом последовательных исключений (АПИ) [2].

Табличная форма ЛП-задачи имеет следующий вид (все переменные пока на нижних границах двусторонних ограничений):

	$-\Delta x_1''$	$\dots$	$-\Delta x_k''$	1
0=	a_1'	$\dots$	a_k'	$\Delta y''$
Z=	$-\xi_1$	$\dots$	$-\xi_k$	0

АПИ определяет в терминах симплекс-метода, ориентированного на двусторонние ограничения, такую последовательность действий для определения $\Delta x_i''$, $i = \overline{1,k}$:

1) для всех отрицательных ξ_i найти минимальное по модулю отношение элементов $\boldsymbol{Z}$-строки к соответствующим элементам 0-строки (пусть оно достигается в $\boldsymbol{i}$-м столбце);

2) если отношение $\dfrac{\Delta y''}{a_i'} \le \beta_i$, то получено оптимальное решение, часть координат которого осталась на нижней границе, часть переведена на верхнюю границу, а $\boldsymbol{i}$-я координата равна соответствующему значению свободного члена 0-строки, деленному на a_i';

3) если же $\dfrac{\Delta y''}{a_i'} > \beta_i$, то $\boldsymbol{i}$-ю координату перевести на верхнюю границу и перейти к началу алгоритма.

Переход к вектору управляющих воздействий от вектора масштабированных управляющих переменных осуществляется следующим образом [3]:

$$\Delta x_i = \begin{cases} 0, \quad i = 1..k, \\ \Delta x_i'' \cdot sign(a_i), \quad i = k+1..m, \\ (\Delta x_i'' + A_i') \cdot sign(a_i), \quad i = m+1..n. \end{cases}$$

Выводы

Использование изложенного подхода делает возможным применение методов линейного программирования в управлении сложными объектами (сводимыми к виду MISO) в реальном масштабе времени, так как вычислительные затраты на оценивание вектора управления на каждом такте можно определить с учетом известного количества операций процесса сведения задачи управления к ЛП-задаче, а на решение ЛП-задачи – с учетом максимального (равного $\boldsymbol{n}$) количества шагов алгоритма АПИ, что позволяет выбрать подходящую длительность такта управления и/или мощность вычислителя.

Список литературы

1. Левин С.В. Сведение задачи адаптивного оптимального управления к задаче линейного программирования / С.В.Левин, В.Г. Тупало // Вычислительная математика и кибернетика: темат. сб. науч. тр. ХАИ. – Вып.1.–Х., 1984. – С. 102-108.

2. Левин С.В. Решение задачи линейного программирования в процессе оптимального управления / С.В.Левин // Самолетостроение. Техника воздушного флота.– Х.: Вища школа, 1984.– №52. – С. 91-93.

3. Сироджа И.Б. Структурно-аналитические модели и алгоритмы распознавания и идентификации объектов управления / И.Б.Сироджа, В.Г.Тупало, С.В.Левин. – К.: Техніка, 1993.– 205 с.

Рецензент: д-р техн. наук, доц. И.В. Шостак, Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского “ХАИ”, Харьков.