

Проф. КОВАЛЬСКИЙ Б. С.

### ГЛУБИННАЯ ТЕКУЧЕСТЬ СТАЛИ ПРИ МЕСТНОМ СЖАТИИ

Напряжения в зоне местного сжатия под поверхностью давления двух соприкасающихся тел исчерпывающе изучены А. Н. Динником<sup>1</sup> и Н. М. Беляевым<sup>2</sup>. Значительно позже к аналогичным результатам пришел Л. Фепплъ<sup>3</sup>, рассматривавший сжатие шара и цилиндра; работа Л. Феппля значительно уже и ничего нового не дает.

Для случая первоначального касания по линии Н. М. Беляев нашел, что наибольшие касательные напряжения лежат на глубине

$$z_0 \cong 0,78 b \quad (1)$$

и равны

$$\tau_{\max} \cong 0,304 p_0 \quad (2)$$

где  $p_0 = \frac{2q}{\pi b}$  — наибольшие нормальные напряжения по середине полочки сжатия,  $q$  — нагрузка.

Поскольку Н. М. Беляев исходит из теории наибольших касательных напряжений, граница нагрузки определяется равенством

$$\tau_{\max} = \tau_s = \frac{1}{2} \sigma_s \quad (3)$$

где  $\sigma_s$  — предел текучести при растяжении.

Вместо величины  $\tau_{\max}$  можно оперировать с величиной

$$\sigma_0 = 2\tau_{\max} \cong 0,61 p_0 \quad (4)$$

Исходя из энергетической теории прочности Мизес — Генки, мы нашли<sup>4</sup>, что наиболее напряженная точка лежит на глубине

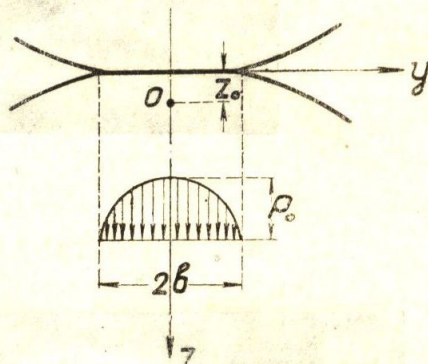
$$z_0 \cong 0,7b \quad (5)$$

и напряжения в ней (приведенные)

$$\sigma_0 \cong 0,56 p_0 \quad (6)$$

т. е. несколько ниже, чем по Н. М. Беляеву.

В области упругих деформаций теоретические выводы о характере напряженного состояния могут быть легко проверены экспериментальным путем, например, оптическим методом, так как по за-



Фиг. 1

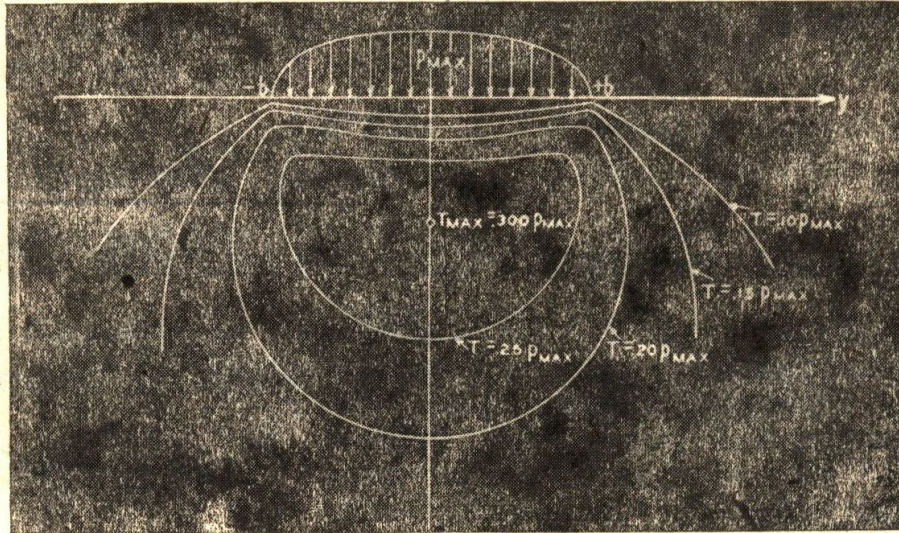
<sup>1</sup> А. Н. Динник. Удар и сжатие упругих тел. Киев, 1909.

<sup>2</sup> Н. М. Беляев. Местные напряжения при сжатии упругих тел. Сборник статей „Инженерные сооружения и строительная механика“. Ленинград, 1924 г. См. также „Сборник ЛИИПС“, вып. СII, 1929 г.

<sup>3</sup> Forschung auf dem Gebiete des Ingenieurwesens, т. 7, № 5, 1936. См. также журнал „Подшипник“ № 1, 1937 г.

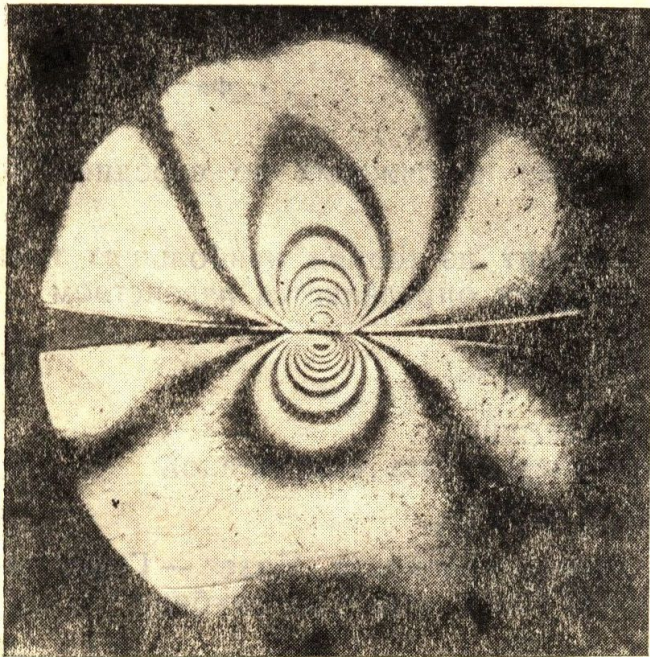
<sup>4</sup> Б. С. Ковальский. К вопросу о наибольших напряжениях при местном сжатии. „Научные записки ХАИ“, т. 2, вып. 6, 1940 г.

кону Вертгейма разность фаз лучей пропорциональна разности главных напряжений или, что то же, максимальным касательным напряжениям.



Фиг. 2

На фиг. 2 построены кривые  $\tau_{\max} = \text{const}$ , отвечающие выводам Н. М. Беляева.



Фиг. 3

Семейство изохром, полученных просвечиванием двух сжатых по образующей бакелитовых цилиндров (фиг. 3) очень хорошо отвечает характеру теоретических кривых  $\tau = \text{const}$ <sup>5</sup>. Аналогичные изохроматические кривые получены при сжатии шара и пластины<sup>6</sup> из троллона; кроме того, используя метод отвердевания<sup>7</sup>, экспериментально проверена зависимость  $\tau = f(z)$ .

В области пластических деформаций теоретические выводы могут быть проверены экспериментально путем травления разрезов испытываемых тел. Такие эксперименты были поставлены

Л. Фепплем и К. Губером с малоуглеродистой сталью St. 37<sup>3</sup> и в несколько большем объеме проведены нами в 1939 г.

<sup>5</sup> Steward Way. Pitting due to rolling contact. Journal of applied mechanics. 1935.

<sup>6</sup> „Forschung“, т. 7, № 5, (1936 г.), 240—248. „Подшипник“ 1939 г., № 7.

<sup>7</sup> Метод отверждения имеет большое значение, так как позволяет изучить картину пространственного напряженного состояния. Нагрузке подвергаются тела из троллона или бакелита при повышенной температуре (например, при 80° С для троллона) и после затвердения их при комнатной температуре из моделей вырезаются для просвечивания тонкие пластинки. Ориентировка разрезов зависит от поставленной экспериментатором задачи. Например, для получения кривых  $\tau = \text{const}$  пластинки вырезаются по оси шара или перпендикулярно образующим цилиндра; для получения точек кривой  $\tau = f(z)$  необходимо вырезать ряд пластинок перпендикулярно оси давления.

Травление по А. Фру обнаруживает фигуры течения, которые в общем должны быть достаточно близки к траекториям главных касательных напряжений. На фиг. 4 представлена фотография травления одного из образцов в наших опытах при сильно развитых пластических деформациях ( $q = 3000$  кг/см,  $R = 20$  см, сталь с 0,16% С).

Описание методики и содержания наших опытов мы даем отдельно, здесь же остановимся лишь на результатах их.

В опытах Л. Феппля и К. Губера для определения начала возникновения линий сдвига в случае первоначального касания по линии применялись пуансон с цилиндрической поверхностью давления  $R = 200$  мм и пластина из St. 37. Подсчет  $\tau_{\max}$  по нагрузке, при которой линии сдвига становились видимыми, дал значение  $\tau_{\max} = 1630$  кг/см<sup>2</sup>, что дает, если принять для St. 37 предел текучести при растяжении  $\sigma_s = 2400$  кг/см<sup>2</sup>,  $\tau_{\max} \cong 0,68 \sigma_s$ .

В наших опытах применялись пуансоны с  $R = 100$  и 200 мм и пластины из сталей (табл. 1):

Таблица 1

Сталь	Химический состав					Механические качества				
	С	Mn	Si	S	P	$\sigma_B$	$\sigma_s$	$\delta_{10}$	$\psi_z$	H <sub>B</sub>
А	0,16	0,51	0,04	0,02	0,05	3465	2165	37	71	95—100
Б	0,28	0,73	0,37	0,04	0,05	4600	2370	23	60	140—150

Для стали А линии текучести были обнаружены при нагрузке  $q = 1200$  кг/см и  $R = 20$  см, что дает  $\tau_{\max} = 1400$  кг/см<sup>2</sup>. Для стали Б линии текучести обнаружены при  $q = 1400$  кг/см,  $R = 20$  см и  $q = 700$  кг/см,  $R = 10$  см, что дает  $\tau_{\max} = 1520$  кг/см<sup>2</sup>. Таким образом в обоих случаях имеем  $\tau_{\max} \cong 0,65\sigma_s$ .

Как видим, результаты наших опытов весьма близки к результатам опытов Л. Феппля и К. Губера и в обоих случаях мы имеем значения  $\tau_{\max} > \tau_s$ , если для последних принять теоретические значения  $\tau_s = 0,5\sigma_s$ , согласно теории наибольших касательных напряжений, или  $\tau_s = 0,57\sigma_s$  по теории Мизес — Генки.

Имеющееся „запаздывание“ в появлении линий текучести не может быть целиком отнесено за счет степени чувствительности метода травления и является вполне закономерным.

Естественно, что равенство  $\tau_{\max} = \tau_s$  не должно отвечать началу развития сдвигов в материале, так как наиболее напряженная точка находится в окружении материала, находящегося в стадии упругих деформаций.

Как отмечали многие исследователи, линии текучести появляются внезапно<sup>8</sup>, распространяясь сразу на значительной длине и, сколько нам известно, никому не удавалось наблюдать динамику развития отдельных линий текучести (мы не говорим о последовательности возникновения разных линий).

Внезапность появления линий текучести и значительное развитие их позволяют высказать предположение о том, что начало появ-



Фиг. 4

<sup>8</sup> А. Надаи. Пластичность, 1936 г., стр. 76.

дения линии текучести должно характеризоваться не фибровыми наибольшими касательными напряжениями, а некоторым средним уровнем энергии деформации вдоль линии текучести.

Соответственно сделанному предположению, характеристикой напряженного состояния должна явиться величина

$$u = \frac{\int \sigma_0^2 ds}{\int ds}, \quad (7)$$

где

$$\sigma_0^2 = \frac{1}{2} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2], \quad (8)$$

а интеграл энергии деформации берется вдоль кривой  $s$  в случае первоначального касания по линии или по поверхности  $s$  при первоначальном касании в точке.

В расчетах можно оперировать вместо  $u$  с величиной „приведенного“ напряжения  $\sigma_{пр}$ , которое может быть получено из соотношения

$$\sigma_{пр}^2 \cdot \int ds = \int \sigma_0^2 ds,$$

что дает

$$\sigma_{пр} = \sqrt{\frac{\int \sigma_0^2 ds}{\int ds}}. \quad (9)$$

Аналитическое решение выражения (9) исключительно сложно в том случае, когда оно возможно, в большинстве же случаев современный аппарат математики оказывается недостаточным уже при определении траектории касательных напряжений. Для оценки возникающих трудностей достаточно указать на путь решения задачи о траектории касательных напряжений.

Угол наклона главного нормального напряжения определяется соотношением

$$\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{2\tau}{\sigma_y - \sigma_z} = \Phi(y, z),$$

откуда

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{1}{\Phi(y, z)} [-1 \pm \sqrt{1 + \Phi^2(y, z)}].$$

Для того чтобы найти траекторию касательных напряжений, необходимо решить уравнение

$$\frac{dz}{dy} = \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{4} + \varphi \right) = \frac{1 + \operatorname{tg} \varphi}{1 - \operatorname{tg} \varphi} = \frac{1 - \Phi(y, z) \pm \sqrt{1 + \Phi^2(y, z)}}{1 + \Phi(y, z) \mp \sqrt{1 + \Phi^2(y, z)}}. \quad (10)$$

Трудность или невозможность получения решения уравнения (10) в конечном виде не исключают, конечно, возможности решения задачи другим путем.

Можно, например, применить метод последовательных алгебраических приближений Пикара, дающий в результате приближенное выражение  $z = f(y)$ ; можно применить численный метод решения по Рунге, Кутта, Пианджио и др., можно задать характер кривой  $z = f(y)$  по видимым линиям текучести при травлении.

Имея траекторию напряжений (10), вычислив  $\int \sigma_0^2 ds$  и найдя длину пути интегрирования  $s = \int ds$ , легко получить нужное нам решение (7).

Так как характер неравномерности напряженного состояния между точкой 0 и поверхностью тела сохраняется достаточно постоянным, можно ожидать получения достаточно точных результатов и в тех случаях, когда кривая, вдоль которой берется интеграл работы деформации, не будет точно отвечать уравнению (10), как то мы получили бы при решении по Пикару.

Так как характер уравнения (10), тем более при весьма сложной функции  $\Phi(y, z)$ , исключает применение в нашем случае решения по Пикару и так как методы численного интегрирования оказываются исключительно громоздкими, мы отказались вовсе от решения выражения (10) и изменили путь интегрирования. Для большей убедительности мы нашли решение (9) дважды, первый раз интегрируя вдоль оси  $z$ , для какового случая интегрирование легко выполнимо в конечном виде, второй раз — вдоль прямой  $OB$  (фиг. 5), проходящей через точку  $z_0$  под углом  $\frac{\pi}{4}$  и, следовательно, совпадающей с направлением главного касательного напряжения в точке  $z_0$  и являющейся касательной к кривой (10) в этой точке.

Как мы нашли ранее<sup>9</sup>, приведенное напряжение (на базе энергетической теории прочности) в любой точке выражается формулой

$$\sigma_0 = p_0 e^{-z} \sin \beta \sqrt{(1 - 2\mu)^2 + 3 \frac{\text{sh}^2 \alpha}{\sin^2 \beta + \text{sh}^2 \alpha}}; \quad (11)$$

для оси  $z$  выражение (11) упрощается, так как в этом случае  $\beta = \frac{\pi}{2}$ :

$$\sigma_0 = p_0 e^{-z} \sqrt{(1 - 2\mu)^2 + 3\text{th}^2 \alpha}, \quad (12)$$

здесь  $\alpha$  и  $\beta$  — эллиптические координаты.

$$y = b \text{ch} \alpha \cos \beta \text{ и } z = b \text{sh} \alpha \sin \beta.$$

Интеграл работы деформации, взятый вдоль оси  $z$  в пределах от  $z = 0$  ( $\alpha = 0$ ) до  $z_0 = 0,7b$  ( $\alpha_0 = \text{Arsh } 0,7 = 0,655$ ), равен

$$U = \int_0^{z_0} \sigma_0^2 dz = bp_0^2 \int_0^{\alpha_0} e^{-2z} [(1 - 2\mu)^2 + 3\text{th}^2 \alpha] \text{ch} \alpha dz = Kbp_0^2, \quad (13)$$

где

$$K = \left[ 6(e^{-\alpha_0} \text{arctg } e^{-\alpha_0} - 1 + \frac{\pi}{4}) - 2(1 - \mu + \mu^2) \left( e^{-\alpha_0} + \frac{1}{3} e^{-3\alpha_0} - \frac{4}{3} \right) \right] \cong 0,16, \quad (14)$$

$\alpha_0 = 0,655$

При этом

$$\sigma_{\text{пр}} = \sqrt{\frac{U}{z_0}} = \sqrt{\frac{0,16bp_0^2}{0,7b}} \cong 0,48 p_0. \quad (15)$$

При интегрировании вдоль прямой  $OB$  (фиг. 5) решение получено численным путем. Прямая  $OB$  была разбита на  $n = 14$  участков ( $y_i - y_{i-1} = z_i - z_{i-1} = 0,05b$ ) и для начала каждого участка (от 0 к  $B$ ) вычислялись координаты  $\alpha$  и  $\beta$  (табл. 2), затем по формуле (11) вычислялось  $\sigma_0^2$ , после чего было определено

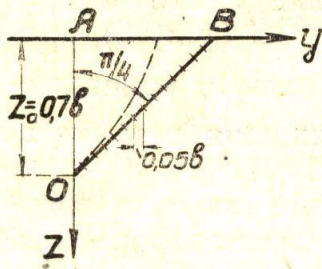
$$\sigma_{\text{пр}} = p_0 \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{i=14} \sigma_0^2}.$$

<sup>9</sup> См. сноску 4.

Таблица 2

N	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
$\beta$	$\frac{\pi}{2}$	1,53	1,48	1,44	1,39	1,34	1,29	1,24	1,18	1,12	1,06	0,99	0,93	0,86
$\alpha$	0,65	0,61	0,58	0,54	0,49	0,45	0,40	0,37	0,32	0,27	0,23	0,18	0,13	0,07

В результате вычислений нами получено значение  $\sigma_{пр}$ , совпадающее (с точностью до третьего десятичного знака) с ранее полученным значением  $\sigma_{пр}$  (15).



Фиг. 5

Если принять, согласно сделанному выше предположению, что линия сдвига возникает лишь тогда, когда энергии деформации накопится достаточно, чтобы в область текучести мог перейти материал вдоль всей линии сдвига, то, вместо ранее приведенной величины (6)  $\sigma_0 = 0,56 p_0$ , следует оперировать с величиной  $\sigma_{пр} = 0,48 p_0$  или же ввести в расчет поправочный коэффициент

$$p_{ц} = \frac{0,56}{0,48} \cong 1,17. \quad (16)$$

Таким образом возникновения линий текучести следует ожидать не при  $\tau = 0,57\sigma_s$ , как то имело бы место согласно энергетической теории Мизес—Генки при равномерном напряженном состоянии, а при  $\tau_0 = 1,17 \cdot 0,57\sigma_s \cong 0,66\sigma_s$ .

Полученное значение  $\tau_0$  весьма хорошо согласуется как с нашими опытами ( $\tau_0 \cong 0,65\sigma_s$ ), так и с опытами Л. Феппля и К. Губера ( $\tau_0 \cong 0,68\sigma_s$ ) и дает объяснение „запаздыванию“ возникновения линий текучести.

Практически, конечно, возможны отклонения от полученных результатов, поскольку мы имеем в опытах условия, не вполне удовлетворяющие предпосылкам теоретических выводов (например, анизотропность материала), однако ясно, что эти отклонения будут значительно меньше, если как база отсчета будет принято более высокое значение  $\tau_0$ .

Следует сделать еще одно замечание. Л. Феппл на основании своих расчетов (повторяющих, как мы уже указывали выше, некоторые результаты ранее выполненных работ А. Н. Динника и Н. М. Беляева) и опытов, делает заключение о том, что возникновение линий текучести начинается изнутри тела, от точки O к поверхности<sup>3</sup>; подтверждение своего заключения Л. Феппл видит также в опытах S. Way<sup>5</sup>. Вообще мнение о начале возникновения линии текучести от  $z_0$  к поверхности является вполне естественным, однако считать, что это положение исчерпывающе доказано экспериментально, конечно, нельзя.

Нам представляется также весьма неубедительным замечание Л. Феппля о том, что толщина пластинок, отделяющихся от поверхности колес и рельсов при „шелушении“, отвечает величине  $z_0 \cong 0,78b$ . На этих вопросах мы остановимся специально в другом месте; для нас более существенным является вопрос о том, правомерно ли интегрирование энергии деформации от  $z = z_0$  до поверхности, не следует ли выбору пределов интегрирования найти специальное обоснование. Мы полагаем, что интегрирование от  $z = 0$

до  $z = z_0$  находит себе достаточно убедительное оправдание в том, что разность  $\sigma_0$  на границах интегрирования относительно невелика и что изменение  $\sigma_0$  происходит достаточно плавно,

Выше мы нашли  $\sigma_{пр}$  для случая первоначального касания по линии. В случае первоначального касания в точке следует ожидать большего значения поправочного коэффициента, так как интеграл работы берется по поверхности скольжения, относительное же значение периметра поперечных сечений этой поверхности (нормальных к направлению усилия) увеличивается к поверхности, где значения  $\sigma_0$  меньше.

Для рассматриваемого случая касания тел<sup>10</sup> имеем напряжения в любых точках на оси

$$\sigma_x = \sigma_y = - \left[ (1 + \mu) \left( 1 - \frac{z}{a} \operatorname{arctg} \frac{a}{z} \right) - \frac{1}{2} \frac{a^2}{z^2 + a^2} \right] p_0. \quad (17)$$

$$\sigma_z = - \frac{a^2}{z^2 + a^2} p_0, \quad (18)$$

откуда

$$\sigma_0 = \left[ (1 + \mu) \left( 1 - \frac{z}{a} \operatorname{arctg} \frac{a}{z} \right) - \frac{3}{2} \frac{a^2}{z^2 + a^2} \right] p_0 \quad (19)$$

( $a$  — радиус круговой площадки давления).

Максимальное значение (при  $\mu = 0,3$ )

$$(\sigma_0 \cong 0,62 p_0) \quad (20)$$

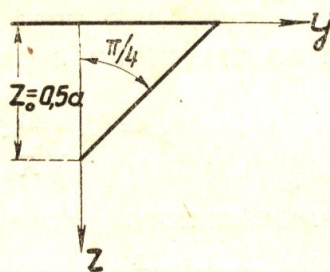
имеет место при  $z_0 \cong 0,5a$ .

Приближенное значение  $\sigma_{пр}$  можно получить следующим образом. Оставив для точек поверхности текучести закон  $\sigma_0 = f(z)$  по (19), что ведет к преувеличению  $\sigma_{пр}$ , как то непосредственно следует из рассмотрения кривых  $\tau = \text{const}$ , и проведя численное интегрирование в одном случае по поверхности конуса фиг. 6 с прямым углом при вершине в точке  $z_0$ , в другом — по поверхности вращения с образующей фиг. 7

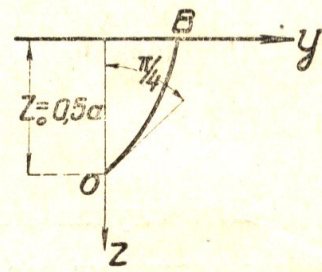
$$y = \frac{a}{\pi} \cos \frac{\pi z}{a} \quad (y'_z = 1 \text{ и } \varphi = 45^\circ$$

при  $z = \frac{a}{2}$ ), мы получили значение  $\sigma_{пр}$  весьма близкое к  $\sigma_{пр}$  (15), что дает значение поправочного коэффициента

$$\rho_{ш} = \frac{0,62}{0,48} \cong 1,3. \quad (21)$$



Фиг. 6



Фиг. 7

Как видим,  $\rho_{ш} = 1,3 > \rho_{ц} = 1,17$ , что и следовало ожидать на основании сделанных выше замечаний.

Так как значения  $\frac{\sigma_{пр}}{p_0}$  оказались практически совпадающими как для случая первоначального касания по линии, так и при первоначальном касании в точке, будучи близкими по значению половине максимального напряжения по Герцу на площадке давления, мы можем сделать вывод о том, что нижняя граница нагрузки, вызывающей появление линии текучести, определяется из

$$p_0 \geq \frac{1}{0,48} \sigma_s \cong 2,1 \sigma_s. \quad (22)$$

К рассматриваемому нами вопросу Л. Фепплъ подходит с другой, принципиально отличной, точки зрения.

<sup>10</sup> См. упомянутые в сносках 1, 2 работы А. Н. Динника и Н. М. Беляева.

Л. Фелпль считает, что критерием для суждения о возможности разрушения или текучести материала служит величина работы деформации

$$\int \sigma_0^2 ds = \text{const}, \quad (23)$$

в то время как мы принимали

$$\frac{\int \sigma_0^2 ds}{\int ds} = \text{const}. \quad (24)$$

В то время как критерий (24) может служить для объяснения влияния формы, критерий (23) связан с размерами тела. Рассмотрим некоторые выводы из положения Л. Фелпля.

Интеграл работы деформации при местном сжатии имеет значение

$$U = kbp_0^2,$$

где  $k$  — некоторая постоянная.

Подставляя для случая первоначального касания по линии

$$b = \frac{2q}{\pi p_0} \quad \text{и} \quad p_0 \cong 0,6 \sqrt{\frac{qE}{R}},$$

имеем

$$U = k \frac{1,2}{\pi} \sqrt{E} \sqrt{\frac{q^3}{R}} = \text{const},$$

откуда

$$q = C_1 \sqrt[3]{R}, \quad (25)$$

в то время как обычно принимается

$$q = C_2 R. \quad (26)$$

Из формулы (25) следует, что предельное напряжение по Герцу должно назначаться в соответствии с размерами тела:

$$p_0 = C_3 \frac{1}{\sqrt[3]{R}}. \quad (27)$$

Для случая первоначального касания в точке, поскольку размеры площадки давления пропорциональны  $\sqrt[3]{PR}$ , а величина наибольших напряжений  $\sqrt[3]{PR}^{-2}$ , мы получим

$$U = C \frac{P}{R} = \text{const},$$

т. е.

$$P = C_4 R, \quad (28)$$

в то время, как при  $p_0 = \text{const}$

$$R = C_5 R^2. \quad (29)$$

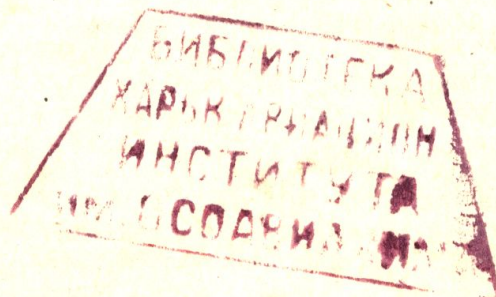
Для предельных значений  $p_0$  мы получим на основании (28) тот же результат (27), какой мы имели при первоначальном касании по линии.

В общем виде зависимость (27) вызывает ряд возражений, не касаясь того, что на границах при очень малых или очень больших  $R$  мы получим в первом случае безусловно завышенные, во втором заниженные предельные напряжения ( $p_0$  изменяется в преде-



лах от 0 до  $\infty$ ). Л. Фепплъ ссылается в подтверждение своего положения на опыты Ф. Ауэрбаха<sup>11</sup> с шарами и стеклянными пластинами и опыты А. Феппля<sup>12</sup> и Ф. Швердта со скрещивающимися цилиндрами из стали. В указанных опытах мы имеем случай первоначального касания в точке. Опыты А. Пальмгрена также указывают на влияние диаметров шариков в подшипниках качения<sup>13</sup>. Однако, такой зависимости для роликовых подшипников А. Пальмгрэн не обнаружил.

Дальнейшие опыты и развитие теории позволят, очевидно, найти оценку влияния линейных размеров соприкасающихся тел, применить же зависимость (27) в реальном проектировании пока нет никаких оснований.



<sup>11</sup> Ann. Physik Chemie, т. 43, 1891, стр. 61.

<sup>12</sup> Ann. Physik Chemie, т. 63, 1897, стр. 103.

<sup>13</sup> Арвид Пальмгрэн. Грузоподъемность и долговечность подшипников. „Подшипник“, № 7, 1937 г.