

Оценка вероятности технической устойчивости ракеты-носителя методом аппроксимации закона распределения хвоста критериальной функции

Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского «ХАИ»

Ключевые слова: устойчивость, ракета, вероятность устойчивости, возмущения статистическое моделирование;

Ключові слова: стійкість, ракета, ймовірності стійкості, збурення, статистичне моделювання;

Key words: Stability, rocket, stability loss probability, statistical data.

Постановка проблемы, цель работы

Оценка работоспособности системы стабилизации ракеты-носителя (РН) является важным этапом проектирования. Работоспособность, рассматриваемая на конечном интервале времени по отношению к начальным возмущениям и действующим возмущающим силам и моментам, называется технической устойчивостью (ТУ) рассматриваемой системы. В работе [1] с помощью статистического моделирования получен доверительный интервал эталонного значения вероятности ТУ системы стабилизации РН, однако этот процесс потребовал значительных затрат временных ресурсов.

В работе [2] для оценки вероятности технической устойчивости РН была рассмотрена методика построения аппроксимирующих моделей критериальной функции (КФ), или аппроксимация КФ в окрестности границы работоспособности. Применение этой методики позволило получить результат, удовлетворяющий доверительному интервалу эталонного значения при значительном сокращении времени моделирования. Эту же методику можно применить и для аппроксимации закона распределения статистического материала малого объема, исследуя хвосты распределений [3].

Аппроксимацию хвоста распределения целесообразно проводить без учета конкретных значений реализаций в ядре распределения с помощью любого закона распределения, имеющего экспоненциально убывающий хвост. К такой группе можно отнести такие законы, как нормальный, экспоненциальный, Релея, логарифмически нормальный, Коши, экстремальных значений и др.

Целью данной работы является определение вероятности ТУ РН методом аппроксимации закона распределения статистического материала малого объема и сравнение результата с доверительным интервалом эталонного значения. В данном исследовании рассмотрены логарифмически нормальный закон распределения и закон распределения экстремальных значений.

Объект исследования

Исследуем объект, который был использован для получения эталонного значения вероятности технической устойчивости РН [1]. В качестве системы, определяющей динамику полета РН на этапе полета I степени в канале рыскания, рассмотрим систему, состоящую из уравнений моментов и автомата стабилизации [4], т.к. на этом этапе полета на РН действуют наибольшие возмущения и основная нагрузка органов управления связана с парированием возмущающих моментов:

$$\begin{aligned} a_{\psi\psi}(t) \cdot \psi + a_{\psi\delta}(t) \cdot \delta &= -M(t); \\ T_1 \cdot \delta' + \delta &= K_{\psi} \cdot \psi + K_{\psi'} \cdot \psi', \end{aligned} \tag{1}$$

где ψ — координата, характеризующая вращение ракеты вокруг центра масс (угол рыскания); δ — угол отклонения управляющих органов; $a_{ij}(t)$ — функции, выражающие закон изменения параметров ракеты; T_I — постоянная времени автомата стабилизации (АС); K_ψ — коэффициент усиления по каналу рыскания, $K_{\psi'} = T_d K_\psi$; T_d — постоянная времени дифференцирования; $\bar{M}(t)$ приведенный возмущающий момент в функции времени. В этой системе $\bar{M}(t) = a_{\psi z}(t) \cdot W(t)$ ($W(t)$ — скорость ветра, действующего на ракету).

Номинальные значения параметров системы (1) и их разбросы приведены в табл. 1.

Таблица 1

Обозначение параметра	Наименование	Номинальное значение	Разброс, %
K_ψ	Коэффициент усиления по каналу рыскания	6	7
T_d	Постоянная времени дифференцирования	0,5	25
T_I	Постоянная времени АС	0,1108	20
$a_{\psi\psi}(t)$	Функции, выражающие закон изменения параметров ракеты	Рис. 2	25
$a_{\psi\delta}(t)$		Рис. 3	10
$a_{\psi z}(t)$		Рис. 4	25

Ветровые воздействия, учитывающие влияние случайных возмущений и начальных условий на устойчивость РН, представлены в виде канонического разложения [4]

$$W(t) = W_0(t) + \sum_i V_i \cdot \varphi_i(t), \quad (2)$$

где $W_0(t)$ — систематическая составляющая скорости ветра; $\varphi_i(t)$ — неслучайные функции, называемые координатными; V_i — стандартные случайные числа, распределенные по нормальному закону. Задавая V_i и подставляя их в (2), получим реализации профиля ветра с учетом высотной корреляции его значений.

Графики изменения систематической составляющей ветра $W_0(t)$ и среднего значения функций $\varphi_i(t)$ показаны на рис. 4 и 5.

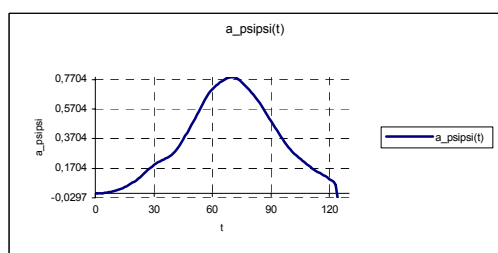


Рис. 1. Изменение номинального значения $a_{\psi\psi}(t)$ от времени

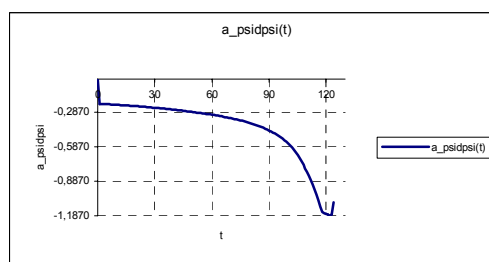


Рис. 2. Изменение номинального значения $a_{\psi\delta}(t)$ от времени

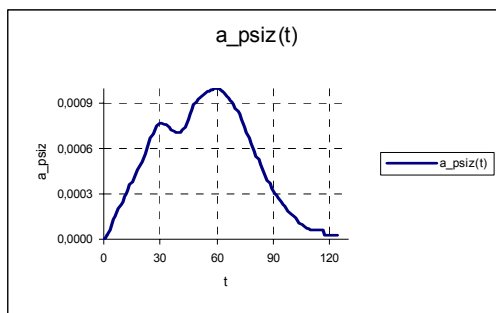


Рис. 3. Изменение номинального значения $a_{\psi z}(t)$ от времени

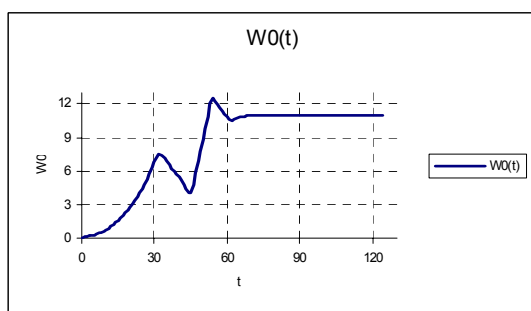


Рис. 4. Систематическая составляющая скорости ветра $W_0(t)$

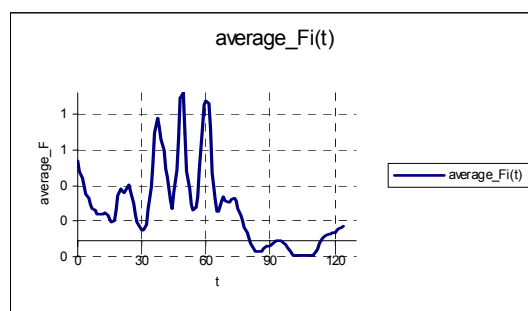


Рис. 5. Среднее значение координатных функций $\varphi_i(t)$

Методика исследования, основные результаты

В качестве условия технической устойчивости принимаем условие не превышения углом отклонения управляющих органов РН заданной границы Λ на определенном интервале времени:

$$|\delta(\kappa, \eta, t)| < \Lambda, \quad (3)$$

где δ — значение функции угла отклонения управляющих органов РН, которое изменяется в зависимости от времени t и возмущений (параметрических η и внешних κ); Λ — предельно допустимое значение угла отклонения δ , в данном исследовании $\Lambda=0,3$.

Результаты исследований, описанных в работе [3] показали, что для аппроксимации хвостов распределения статистического материала наиболее целесообразно использовать логарифмически нормальный закон распределения, т. к. применение этого закона позволяет получить умеренно пессимистическую оценку вероятности потери работоспособности. Закон распределения экстремальных значений применительно к аппроксимации статистического материала дал завышенные оптимистические оценки. В данном исследовании использованы эти два закона при аппроксимации статистического материала.

В результате статистического моделирования системы (1), которое проведено в объеме $N=600$, получено множество функций угла отклонения органов управления $\delta(t)$ на определенном интервале времени $t \in [0, T]$. Этот материал сгруппирован в подмножества для различных объемов моделирования ($N_i = 50, 100, 150\dots$). Группировка проведена следующим образом: при моделировании в объеме $N=600$ группируются сначала первые 50 реализаций и образуется первый

массив, затем - первые 100 и образуется второй массив, затем - 150 и т.д. с шагом 50 до окончания моделирования. Таким образом, весь материал образуется «с одного захода».

Для каждой функции $\delta(t)$ найдено максимальное значение реализации. Затем среди полученных максимальных значений реализаций для каждого подмножества функций $\delta(t)$ сохранены 10 максимальных значений.

Аппроксимация хвостов распределений логарифмически нормальным законом

При логарифмически нормальном законе распределения аппроксимация статистического материала происходит по следующему равенству [5]:

$$U_i = \gamma + \beta \ln \delta_i, i = \overline{1, 2}, \quad (4)$$

где γ и β — параметры распределения; U — значение безразмерного аргумента функции Гаусса.

Чтобы определить неизвестные параметры распределения, задаем две реализации КФ δ_1 и δ_2 , расположенные в хвосте распределения, и находим соответствующие им значения статистической функции распределения $F^*(\delta_1)$ и $F^*(\delta_2)$ [3]:

$$F(\delta_i)^* = \frac{N - N_A + i - 1}{N}, \quad (5)$$

где N_A — объем сохраняемых максимальных реализаций КФ ($N_A=10$).

На рис. 6 приведена статистическая функция распределения (обозначена как F) для максимальных значений КФ (dlt) при объеме моделирования N=50. На рисунке также обозначена пара реализаций статистической функции распределения для δ_7 — F(dlt7) и δ_9 — F(dlt9).

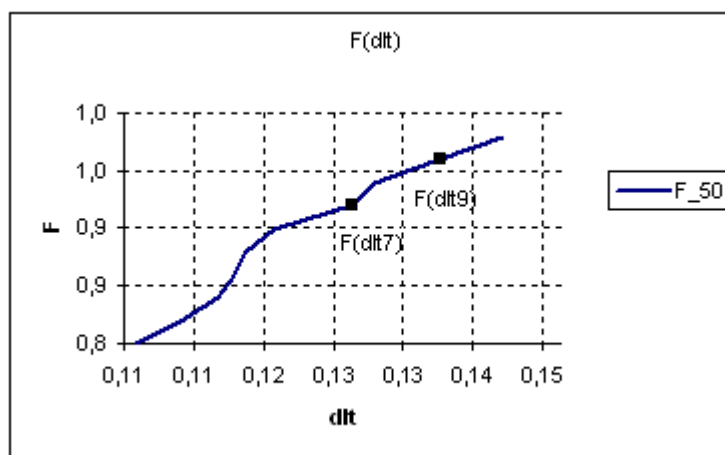


Рис. 6. Фрагмент изменения статистической функции распределения максимальных значений реализаций КФ для объема N=50

Далее для найденных $F^*(\delta_1)$ и $F^*(\delta_2)$ находим соответствующие значения безразмерного аргумента функции Гаусса U_1^* и U_2^* . Подставив эти значения

и соответственно значения реализаций КФ δ_1 и δ_2 в (4), получим систему линейных уравнений относительно неизвестных параметров распределения γ и β . Решив эту систему, имеем оценки параметров распределения γ^* и β^* . Затем подставим значения параметров распределения в уравнение

$$U = \gamma^* + \beta^* \ln \Lambda, \quad (6)$$

где Λ — предельно допустимое значение угла отклонения δ . По вычисленному значению безразмерного аргумента функции Гаусса U находим вероятность технической устойчивости РН. Таким образом, общая формула значения вероятности технической устойчивости РН F такова:

$$F = \Phi[U] = \Phi\left[\gamma^* + \beta^* \ln \Lambda\right] = \Phi\left[U_1^* + \frac{U_2^* - U_1^*}{\ln \delta_2 - \ln \delta_1} (\ln \Lambda - \ln \delta_1)\right], \quad (7)$$

$$F = \Phi\left[\arg \Phi(F^*(\delta_1)) + \frac{\arg \Phi(F^*(\delta_2)) - \arg \Phi(F^*(\delta_1))}{\ln \delta_2 - \ln \delta_1} (\ln \Lambda - \ln \delta_1)\right].$$

Используя полученный статистический материал, выполним аппроксимацию хвоста распределения КФ логарифмически нормальным законом распределения. Для пяти пар значений из сохраненных 10 реализаций δ_i и δ_j найдем параметры закона распределения β и γ (табл. 2 и 3), а также их среднее значение β_{cp} при различных объемах моделирования N .

Таблица 2

N	Значения β для δ_i и δ_j					β_{cp}
	$i=7, j=9$	$i=3, j=6$	$i=2, j=8$	$i=4, j=7$	$i=5, j=9$	
50	5,15894	6,01980	3,98725	3,37812	3,74845	4,45851
100	1,33935	5,34111	1,32928	1,94720	1,39646	2,27068
150	1,25577	2,56397	1,41088	2,55331	1,82476	1,92174
200	1,20472	5,03317	1,47347	8,36161	1,82574	3,57974
250	1,16895	4,84777	1,42169	8,06899	1,76834	3,45515
300	3,00435	3,46603	1,85788	1,65998	2,15752	2,42915
350	2,94764	1,62875	1,95730	2,03493	2,43038	2,19980
400	3,49866	2,23999	2,23383	6,41098	3,89854	3,65640
450	6,84791	5,42824	2,47969	2,13661	3,38110	4,05471
500	7,53161	1,81170	3,77488	2,46078	3,81246	3,87829
550	7,45213	1,78884	3,72913	2,43101	3,77029	3,83428
600	7,38163	1,76868	3,68871	2,40471	3,73295	3,79534

Таблица 3

N	Значения γ для δ_i и δ_j					β_{cp}
	$i=7, j=9$	$i=3, j=6$	$i=2, j=8$	$i=4, j=7$	$i=5, j=9$	
50	11,97839	13,99018	9,66092	8,32858	9,18207	10,62803
100	4,20760	11,99393	4,02331	5,32265	4,29945	5,96939
150	4,23581	6,58137	4,32779	6,61604	5,15083	5,38237
200	4,26370	11,27942	4,54501	17,39238	5,26238	8,54858
250	4,28874	11,02992	4,54859	16,94626	5,25265	8,41323
300	7,30614	8,29033	5,32085	5,02859	5,94432	6,37805
350	7,26952	4,98012	5,53837	5,72327	6,43770	5,98980
400	8,20215	6,03625	6,03283	13,09323	8,84521	8,44193
450	13,40759	11,40298	6,46242	5,81397	7,94441	9,00627
500	14,52077	5,24642	8,56498	6,36618	8,65993	8,67166
550	14,42754	5,24513	8,52507	6,35289	8,62551	8,63523
600	14,34540	5,24471	8,49050	6,34184	8,59562	8,60361

Для средних значений параметров логарифмически нормального закона распределения определены величины безразмерного аргумента функции Гаусса U , значение вероятности технической устойчивости РН F (7) и значение вероятности потери технической устойчивости РН $Q = 1 - F$. Эти результаты представлены в табл. 4.

Таблица 4

N	U	F	Q
50	5,26010	0,9999999	7,1988E-08
100	3,23555	0,9993930	6,0704E-04
150	3,06865	0,9989248	1,0752E-03
200	4,23867	0,9999888	1,1243E-05
250	4,25333	0,9999895	1,0531E-05
300	3,45342	0,9997232	2,7677E-04
350	3,34130	0,9995831	4,1694E-04
400	4,03973	0,9999732	2,6757E-05
450	4,12451	0,9999814	1,8576E-05
500	4,00231	0,9999686	3,1364E-05
550	4,01886	0,9999708	2,9240E-05
600	4,03413	0,9999726	2,7402E-05

На рис. 7 изображено изменение вероятности потери технической устойчивости РН Q в зависимости от объемов моделирования, определенной при аппроксимации хвоста распределения КФ логарифмически нормальным законом распределения. Также на рисунке отображен доверительный интервал эталонного значения [1].

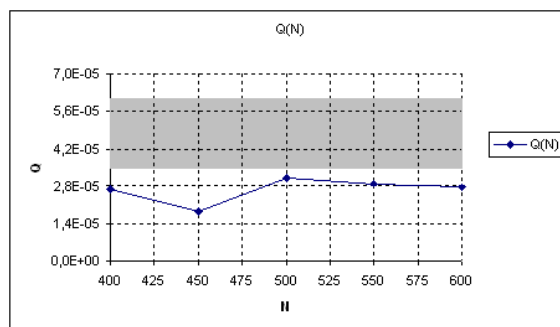


Рис. 7. Изменение вероятности потери технической устойчивости РН Q от объема моделирования N

Аппроксимация хвостов распределений с помощью
закона распределения экстремальных значений

Для закона распределения экстремальных значений теоретическая функция распределения имеет следующий вид [3]:

$$F(\delta_i) = \exp[-\exp(-\frac{\delta_i - m}{\sigma})]. \quad (8)$$

Закон имеет два параметра распределения - m и σ . Поэтому для определения неизвестных параметров распределения задаем две реализации КФ δ_1 и δ_2 , расположенные в хвосте распределения, и находим соответствующие им значения статистической функции распределения $F^*(\delta_1)$ и $F^*(\delta_2)$ по формуле (5). Составляем систему уравнений $F(\delta) = F^*(\delta_i), i = \overline{1, 2}$, из которой следует

$$\frac{\lambda_i - m}{\sigma} = -\ln[\ln(\frac{1}{F^*(\delta_i)})], i = \overline{1, 2}. \quad (9)$$

Уравнения (9) представляют собой систему линейных уравнений относительно неизвестных параметров распределения m и σ . Решив эту систему, получим оценки искомых параметров распределения m^* и σ^* . Затем подставляем эти значения в (8), принимая $\delta_i = \Lambda$ (Λ — предельно допустимое значение угла отклонения δ , $\Lambda = 0,3$), и определяем вероятность технической устойчивости РН:

$$F = \exp[-\exp(-\frac{\Lambda - m^*}{\sigma^*})] = \exp[-\exp(-\frac{\ln[\ln(\frac{1}{F^*(\delta_1)})] \cdot (\lambda_2 - \Lambda) + \ln[\ln(\frac{1}{F^*(\delta_2)})] \cdot (\Lambda - \lambda_1)}{\lambda_1 - \lambda_2})] \quad (10)$$

Используя полученный статистический материал, выполним аппроксимацию хвоста распределения КФ законом распределения экстремальных значений. Для двух значений из сохраненных 10 реализаций δ_i и δ_j найдем параметры закона распределения m и σ (табл. 5 и 6), а также их среднее значение β_{cp} при различных объемах моделирования N .

Таблица 5

N	Значения m для δ_i и δ_j					β_{cp}
	$i=7, j=9$	$i=3, j=6$	$i=2, j=8$	$i=4, j=7$	$i=5, j=9$	
50	0,09776	0,09590	0,08462	0,07931	0,08278	0,08807
100	-0,02470	0,10539	-0,00626	0,04281	-0,00949	0,02155
150	-0,04950	0,06583	-0,00767	0,06384	0,02544	0,01959
200	-0,06692	0,10778	-0,00727	0,12839	0,02035	0,03647
250	-0,08035	0,10459	-0,01897	0,12649	0,01123	0,02860
300	0,08162	0,08915	0,02302	0,00443	0,03944	0,04753
350	0,07787	0,00163	0,02852	0,03332	0,05410	0,03909
400	0,09534	0,04738	0,04586	0,13558	0,10528	0,08589
450	0,14999	0,12729	0,05861	0,03975	0,09359	0,09385
500	0,15466	0,01414	0,10420	0,05876	0,10495	0,08734
550	0,15374	0,01016	0,10234	0,05588	0,10315	0,08505
600	0,15291	0,00655	0,10064	0,05326	0,10151	0,08297

Таблица 6

N	Значения σ для δ_i и δ_j					β_{cp}
	$i=7, j=9$	$i=3, j=6$	$i=2, j=8$	$i=4, j=7$	$i=5, j=9$	
50	0,01250	0,01120	0,01665	0,01992	0,01718	0,01549
100	0,05765	0,01302	0,05894	0,03655	0,05375	0,04398
150	0,05794	0,02694	0,05310	0,02655	0,04055	0,04102
200	0,05808	0,01338	0,04933	0,00803	0,03911	0,03359
250	0,05817	0,01343	0,04947	0,00805	0,03918	0,03366
300	0,02369	0,01954	0,03837	0,04160	0,03212	0,03106
350	0,02371	0,04211	0,03596	0,03369	0,02831	0,03276
400	0,01981	0,03117	0,03143	0,01107	0,01794	0,02228
450	0,01050	0,01317	0,02829	0,03386	0,02092	0,02135
500	0,00945	0,04030	0,01897	0,02933	0,01846	0,02330
550	0,00945	0,04033	0,01898	0,02935	0,01847	0,02332
600	0,00946	0,04035	0,01899	0,02936	0,01847	0,02333

Для средних значений параметров закона распределения экстремальных значений определены вероятность технической устойчивости $P_N F(10)$ и вероятность потери технической устойчивости $P_N Q = 1 - F$. Эти результаты представлены в табл. 7.

Таблица 7

N	F	Q
50	1,00000	1,1403E-06
100	0,99822	1,7788E-03
150	0,99893	1,0731E-03
200	0,99961	3,9106E-04
250	0,99969	3,1486E-04
300	0,99970	2,9533E-04
350	0,99965	3,4738E-04
400	0,99993	6,7110E-05
450	0,99994	6,3972E-05
500	0,99989	1,0882E-04
550	0,99990	9,9095E-05
600	0,99991	9,0967E-05

На рис. 7 изображено изменение вероятности потери технической устойчивости $P_N Q$ в зависимости от различных объемов моделирования, определенной при аппроксимации хвоста КФ законом распределения экстремальных значений.

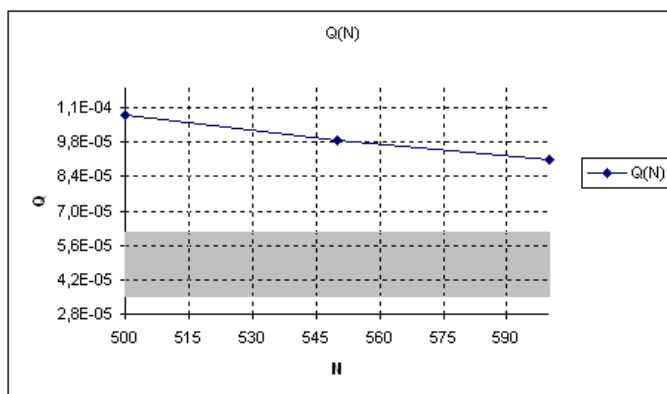


Рис. 7. Изменение вероятности потери технической устойчивости $P_N Q$ от объема моделирования N

По результатам исследований заметно, что вероятность потери технической устойчивости РН, полученная при аппроксимации хвоста распределения КФ логарифмически нормальным законом распределения, близка к доверительному интервалу эталонного значения [1] ($Q_d \in [3,5E-05...6,1E-05]$) при объеме моделирования $N > 400$, а для закона распределения экстремальных значений при объеме моделирования $N > 550$.

Выводы

1. Получены значения вероятности потери технической устойчивости РН с помощью аппроксимации хвоста КФ логарифмически нормальным законом и законом распределения экстремальных значений. Эти значения достаточно близки к доверительному интервалу эталона при объемах моделирования более 400 для логарифмически нормального закона и более 550 для закона распределения экстремальных значений.
2. Применение метода аппроксимации хвостов КФ законом распределения экстремальных значений дало умеренную пессимистическую оценку вероятности потери технической устойчивости и может быть использовано при проектировании РН.

Список литературы

1. Никифорова М.И. Эталонная модель для оценки вероятности потери технической устойчивости ракеты-носителя / М.И. Никифорова // Открытые информационные и компьютерные интегрированные технологии: сб. науч. тр. Нац. аэрокосм. ун-та «ХАИ». – Вып.35 - X., 2006. С. 30 - 36.
2. Сухоребрий В.Г. Оценка вероятности потери технической устойчивости ракеты-носителя методом ускоренного статистического моделирования / В.Г. Сухоребрий, М.И. Никифорова // Открытые информационные и компьютерные интегрированные технологии: сб. науч. тр. Нац. аэрокосм. ун-та «ХАИ». – Вып.37 - X., 2007. С. 83 - 92.
3. Лежнина М.В. Проектная оценка вероятности достижения объектами аэрокосмической техники предельных состояний / М.В. Лежнина, В.Г. Сухоребрий. – X.: Нац. аэрокосм. ун-т «ХАИ», 2005. – 184 с.
4. Ракета как объект управления: учеб. / И.М. Игдалов, Л.Д. Кучма, Н.В. Поляков, Ю.Д. Шептун;. /под ред. акад. С.Н. Конюхова. – Д.: АРТ-ПРЕСС, 2004. – 544 с.
5. Хан Г. Статистические модели в инженерных задачах / Г. Хан, С. Шапиро. - М.: Мир, 1969. - 395 с.
6. Гумбель Э. Статистика экстремальных значений / Э. Гумбель. - М.: Мир, 1965. – 450 с.
7. Айзенберг Я.Е. Проектирование систем стабилизации носителей космических аппаратов / Я.Е. Айзенберг, В.Г. Сухоребрий. - М.: Машиностроение, 1986. - 220 с.
8. Качаров К.А. Введение в техническую теорию устойчивости движения / К.А. Качаров, А.Г. Пилютник. – М.: Физматгиз, 1962. – 243 с.

Рецензент: д-р техн. наук, проф. зав. каф. П.А. Фомичев, Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского «ХАИ», Харьков.

Поступила в редакцию 13.02.09.