

Управление физическим полем сложной системы, которая моделируется смешанной задачей для уравнения эллиптического типа

Национальный аэрокосмический университет им. Н. Е. Жуковского «ХАИ»

Ключевые слова: смешанная краевая задача, уравнение Лапласа, граничное управление, некорректные задачи.

Ключові слова: мішана крайова задача, рівняння Лапласа, граничне управління, некоректні задачі.

Keywords: mixed boundary problem, the Laplace's equation, boundary management, incorrect problems.

Рассматривается проблема граничного управления физическим полем, которое моделируется двумерным уравнением Лапласа и смешанными граничными условиями. Геометрически система представляет собой полосу с прямоугольными выступами и круговыми включениями (рис. 1). Задачу можно интерпретировать: как задачу о стационарном распределении температуры в канале сложного очертания; задачу антиплоской деформации составного упругого тела; задачу о движении в нерегулярном канале идеальной несжимаемой жидкости; задачу электростатики и др. Используется системный подход к построению решения задачи.

Настоящая статья является первой статьёй, в которой обобщённый метод Фурье [1, 2] в сочетании с методом интегральных уравнений [3] с успехом применён к решению прямой задачи математической физики с пересекающимися граничными линиями. Предложенный метод сводит задачу к однозначно разрешимой системе интегро-алгебраических уравнений, для которой метод редукции сходится к точному решению.

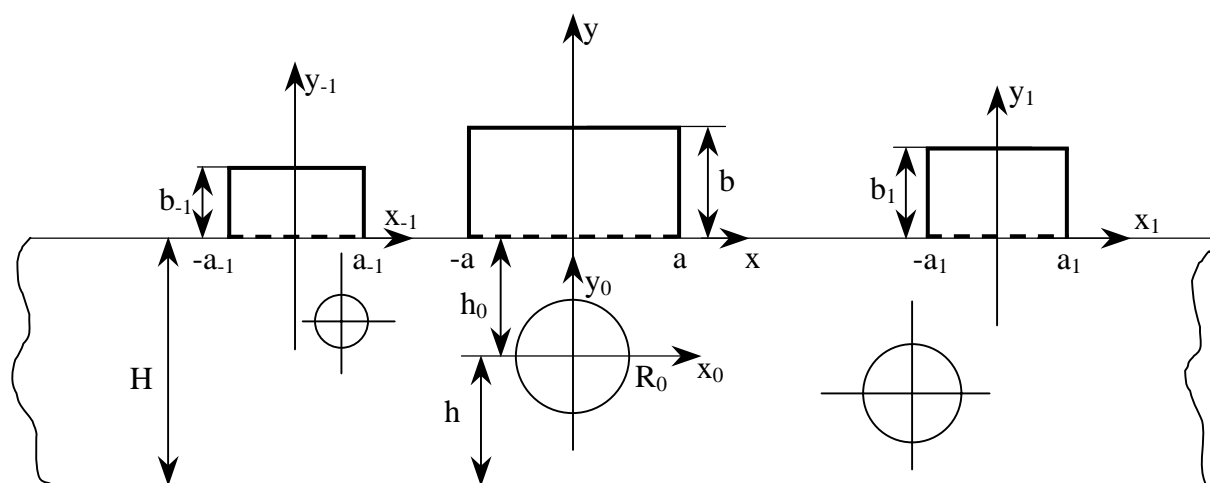


Рис. 1. Геометрия задачи

Проблема управления полем состоит в целенаправленном выборе граничных функций с тем, чтобы достичь поставленной цели. Целью может быть условие: искомое поле или некоторые его характеристики должны совпадать с задан-

ными или измеренными значениями на некотором множестве точек, принадлежащем области регулярности решения или части границы области. В качестве целевой функции может быть задан некоторый функционал [4], который необходимо минимизировать на множестве решений краевой задачи.

Предложен метод решения задачи управления, который позволяет найти управляющие полем граничные функции по дополнительной информации о характеристиках поля в области или на части её границы. Эта задача является по А.Н. Тихонову, как правило, некорректной и требует привлечения для своего решения методов регуляризации [5].

1. Постановка и решение прямой задачи

Найти в полосе с прямоугольными выступами и круговыми включениями (см. рис.1) решение уравнения Лапласа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad (1)$$

удовлетворяющее краевым условиям (\vec{n} - внутренняя нормаль к границе области):

$$\frac{\partial u}{\partial n} = 0 \text{ на боковых сторонах прямоугольников;} \quad (2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} = 0 \text{ на линии } y = 0 \text{ вне оснований прямоугольников;} \quad (3)$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} = g(x) \text{ на верхних сторонах прямоугольников;} \quad (4)$$

$$u = f_i(\varphi_i) \text{ на окружностях } L_i (i = 1, 2, 3); \quad (5)$$

$$u(x, -H) = 0 \text{ на нижней стороне полосы;} \quad (6)$$

$$\operatorname{grad} u = 0 \text{ при } |x| \rightarrow \infty.$$

Последнее условие вытекает из требования конечности энергии, накопленной в полосе. Через φ_i обозначено угловую полярную координату, связанную с окружностью L_i .

Такая постановка обеспечивает единственность решения задачи. Будем ради простоты иллюстрации метода учитывать только одну прямоугольную ступеньку и одно круговое включение и считать задачу симметричной относительно оси oy . Обобщение на случай нескольких выступов и круговых включений станет очевидным для всех, кто знаком с обобщённым методом Фурье [1].

На первом этапе решения сформулированной задачи для геометрически сложной системы разобьём её на две более простые подсистемы: а) прямоугольник с краевыми условиями Неймана; б) полосу с отверстием и краевыми условиями (5) – (7) и условием

$$\frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=0} = \begin{cases} t(x), & |x| < a, \\ 0, & |x| > a. \end{cases} \quad (7)$$

На нижней стороне прямоугольника поставим условие

$$\left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=0} = t(x), \quad (8)$$

где $t(x)$ - некоторая вспомогательная, но пока неизвестная функция. Позже решения для полосы и прямоугольника будут отождествлены на линии $y = 0, |x| \leq a$.

Решение внутренней задачи Неймана для прямоугольника

Известно, что задача Неймана не всегда разрешима. В нашем случае условие разрешимости имеет вид

$$\int_{-a}^a t(x) dx = - \int_{-a}^a g(x) dx \quad (9)$$

Методом разделения переменных находим

$$u_1(x, y) = a_0 + b_1 y + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cdot ch \lambda_k (b - y) + c_k ch \lambda_k y] \cdot \cos \lambda_k x, \quad (10)$$

$\lambda_k = \frac{k\pi}{a}$. Краевые условия на боковых сторонах (2) в этом решении учтены.

Из условий (4), (8) на верхней и нижней сторонах имеем

$$b_1 = \frac{-1}{2a} \int_{-a}^a g(\xi) d\xi, \quad c_k = \frac{-2}{k\pi \cdot sh \lambda_k b} \int_0^a g(\xi) \cos \lambda_k \xi d\xi, \quad (11)$$

$$a_k = \frac{-2}{\pi k \cdot sh \lambda_k b} \int_0^a t(\xi) \cos \lambda_k \xi d\xi.$$

Решение u_1 с учётом (11) запишем в интегральной форме

$$u_1(x, y) = a_0 + \int_0^a t(\xi) \cdot H_1(x, y; \xi) d\xi + \int_0^a g(\xi) \cdot H_2(x, y; \xi) d\xi \quad (12)$$

где обозначены

$$H_1(x, y; \xi) = -\frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{ch \lambda_k (b - y) \cdot \cos \lambda_k x}{k \cdot sh \lambda_k b} \cdot \cos \lambda_k \xi,$$

$$H_2(x, y; \xi) = -\frac{y}{a} - \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{ch \lambda_k y \cdot \cos \lambda_k x}{k \cdot sh \lambda_k b} \cdot \cos \lambda_k \xi.$$

При $y = 0$ и $y = b$ эти ряды сходятся условно, поэтому их можно так преобразовать, чтобы медленно сходящиеся части суммировались с помощью формулы

$$\ln(1 + z) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{z^n}{n}, \quad |z| < 1. \quad (13)$$

После такого преобразования получим новые выражения для функций $H_1(x, y; \xi)$, $H_2(x, y; \xi)$:

$$H_1(x, y; \xi) = -\frac{1}{\pi} [l(y, x + \xi) + l(y, x - \xi) + k(y, x + \xi) + k(y, x - \xi)],$$

$$H_2(x, y; \xi) = -\frac{y}{a} - \frac{1}{\pi} [l(b - y, x - \xi) + l(b - y, x + \xi)] - \frac{1}{2\pi} [m(y, x - \xi) + m(y, x + \xi)], \quad (14)$$

где обозначены

$$l(\varepsilon, x) = -\ln \left(1 - 2p \cos \frac{\pi}{a} x + \rho^2 \right)^{1/2}, \quad \rho = e^{-\frac{\pi \cdot \varepsilon}{a}},$$

$$k(y, x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{-\lambda_k b} \cdot ch \lambda_k y}{k \cdot sh \lambda_k b} \cos \lambda_k x, \quad m(y, x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos \lambda_k x}{k \cdot sh \lambda_k b} (e^{-\lambda_k y} + e^{\lambda_k (y-2b)}). \quad (15)$$

Отметим, что функции $k(y, x)$ и $m(y, x)$ - бесконечно дифференцируемые в прямоугольнике $\Pi = \{|x| < a, 0 \leq y \leq b\}$, так как ряды, которые их представляют, сходятся абсолютно и равномерно вместе с производными.

Решение смешанной задачи для полосы с круговым отверстием

Ищем решение уравнения Лапласа (1) в полосе с круговым включением. Краевые условия будут такими: на линии $y = 0$ имеем условие (7); на линии $y = -H$ - условие (6); на границе кругового отверстия $u = f_0(\varphi_0)$. Центр кругового отверстия находится в точке $y = -h_0, x = 0$.

Для решения задачи нам понадобятся некоторые формулы для гармонических функций:

$$\frac{\cos n \left(\frac{\pi}{2} - \varphi \right)}{\rho^n} = \frac{(\pm 1)^n}{(n-1)!} \int_0^{\infty} \lambda^{n-1} e^{\mp \lambda y} \cdot \cos \lambda x d\lambda, \quad y \geq 0, n \geq 1. \quad (16)$$

$$\begin{pmatrix} ch \lambda y \\ sh \lambda y \end{pmatrix} \cos \lambda x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\lambda^{2n} \rho^{2n}}{(2n)!} \begin{pmatrix} \cos 2n \varphi \\ \frac{\lambda \rho}{2n+1} \cdot \sin(2n+1) \varphi \end{pmatrix}. \quad (17)$$

В этих формулах ρ и φ - полярные координаты, связанные с декартовыми координатами соотношениями $x = \rho \cos \varphi, y = \rho \sin \varphi$. Решение задачи в соответствии с обобщённым методом Фурье ищем в виде

$$u_2(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} [A(\lambda) \cdot sh \lambda (H + y) + B(\lambda) \cdot ch \lambda y] \cos \lambda x dx + c_0 \ln \frac{\rho_0}{\rho_2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{\rho_0^n} \cos n \left(\frac{\pi}{2} - \varphi \right), \quad (18)$$

где (ρ_0, φ_0) - локальные полярные координаты, связанные с окружностью радиусом R_0 , $\rho_0 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}$, $\rho_2 = \sqrt{x_0^2 + (y_0 + 2h)^2}$, $h = H - h_0$.

Из краевого условия на линии $y = 0$ с помощью равенства (16) находим

$$A(\lambda) = \frac{1}{2\lambda ch\lambda H} \left\{ \frac{2}{\pi} \int_{-a}^a t(\xi) \cos \lambda \xi d\xi + e^{-|\lambda|h_0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{(n-1)!} |\lambda|^n + c_0 \cdot e^{-|\lambda|h_0} (e^{-|\lambda|h_0} - 1) \right\}. \quad (19)$$

Условие (6) на нижней грани полосы $y = -H$, $(y_0 = -h)$ с учётом (16) позволяет определить функцию $B(\lambda)$:

$$B(\lambda) = \frac{e^{-|\lambda|h}}{2ch\lambda H} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n (-1)^{n+1}}{(n-1)!} |\lambda|^{n-1}. \quad (20)$$

Оставшиеся неизвестными коэффициенты c_n ($n \geq 0$) найдём из условия на окружности. Для этого функции $f_0(\varphi_0)$ и $v(\varphi_0) = \ln R_0 - \ln \rho_2$ представим в виде рядов Фурье

$$f_0(\varphi_0) = \sum_{n=0}^{\infty} h_n \cos n \left(\frac{\pi}{2} - \varphi_0 \right), \quad v(\varphi_0) = \ln \frac{\varepsilon}{2} - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \varepsilon^n}{2^n \cdot n} \cos n \left(\frac{\pi}{2} - \varphi_0 \right), \quad \varepsilon = \frac{R_0}{h} < 1. \quad (21)$$

Воспользуемся разложениями (17) и (21). В результате

$$x_0 \cdot k_{0,n} + (1 - \delta_{0n}) \cdot x_n + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k \cdot R_0^{n+k+1}}{(k-1)! \cdot n!} M_{k,n} + \int_{-a}^a K_n(\xi) t(\xi) d\xi = h_n, \quad (22)$$

$n \geq 0$, δ_{kn} - символ Кронекера.

В системе (22) принято $x_k = c_k / R_0^k$, ($k \geq 0$), матричные элементы $M_{k,n}$ и функции $K_n(x)$ выражаются через несобственные интегралы от произведения гиперболических, степенных и тригонометрических функций. Мы их не выписываем, так как это без особого труда может сделать читатель.

Итак, задача для полосы с отверстием при условии, что известна функция $t(x)$, сведена к решению бесконечной системы (22). Анализ матричных элементов системы (22) показывает, что если функция $t(x)$ является абсолютно интегрируемой, а функция $f_0(\varphi)$ - квадратично интегрируема, то система (22) имеет единственное решение, которое может быть найдено методом редукции сколь угодно точно.

Разрешающая система уравнений исходной задачи

Срачиваем решение $u_1(x, y)$ и $u_2(x, y)$ по их значениям при $y = 0$, т. е. полагаем

$$u_1(x, 0) = u_2(x, 0), \quad |x| \leq a. \quad (23)$$

В результате имеем

$$a_0 + \int_0^a t(\xi)H_1(x,0;\xi)d\xi + \int_0^a g(\xi)H_2(x,0;\xi)d\xi = c_0 \ln \sqrt{\frac{x^2 + h_0^2}{x^2 + (H+h)^2}} + \int_{-\infty}^{\infty} [A(\lambda) \cdot sh\lambda H + B(\lambda)] \cos \lambda x d\lambda + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n \cdot \cos n\psi}{(x^2 + h_0^2)^{n/2}}, \quad |x| \leq a, \quad (24)$$

где обозначено $\psi = \frac{\pi}{2} - \varphi_0 = \arctg \frac{x}{h_0}$.

После подстановки в последнее соотношение выражений (19), (20) для функций $A(\lambda)$ и $B(\lambda)$ и вычисления некоторых интегралов по таблице [6] получаем интегральное уравнение для функции $t(x)$

$$\int_0^a t(\xi) \cdot [\ln|x^2 - \xi^2| - \ln(2a - x - \xi) + K(x, \xi)] d\xi = -a_0 + \sum_{n=0}^{\infty} x_n \aleph_n(x) - \int_0^a g(\xi)H_2(x,0;\xi)d\xi, \quad 0 \leq x \leq a. \quad (25)$$

В уравнении (25) логарифмическая особенность в ядре выделена в явном виде, через $K(x, \xi)$ обозначена гладкая часть ядра, выражения для $\aleph_n(x)$ следуют из (24). Отметим, что ядро кроме подвижной особенности на диагонали квадрата $x = \xi$ имеет ещё и неподвижную особенность при $x = \xi = a$. Наличие неподвижной особенности в ядре уравнения изменяет особенность решения этого уравнения в точке $x = a$. В рассматриваемом случае эта особенность имеет вид $t(x) = (a^2 - x^2)^{-1/3} \cdot \tau(x)$, где $\tau(x) \in C[-a, a]$.

Система уравнений (22), (25) является интегро-алгебраической разрешающей системой исходной краевой задачи. Решив её, мы определяем коэффициенты x_n и функцию $t(x)$. Отметим, что постоянная a_0 войдёт линейно в решение и для её фиксации следует использовать условие (9). На этом формальное решение прямой задачи заканчивается.

Математически строгое обоснование метод решения интегрального уравнения с подвижной и неподвижной особенностями в ядре получил в работе Г.Я. Попова [3]. Используя его подход с некоторым видоизменением, систему (22), (25) можно свести к совокупности двух бесконечных систем линейных алгебраических уравнений, приближённое решение которой можно получить методом редукции.

Отметим, что уравнение (25) разрешающей системы является интегральным уравнением первого рода; для численного решения таких уравнений с логарифмически особыми ядрами применяют хорошо себя зарекомендовавший метод саморегуляризации [7].

Очевидно, что в задаче с несколькими ступеньками усложнения будут в количестве неизвестных функций $t_k(x)$ и, следовательно, в количестве интегральных уравнений типа (22). Если к тому же полоса будет содержать несколько круговых отверстий, то их можно учесть, удовлетворив краевым условиям на каждом из них с помощью формул перехода от одного отверстия к другому [1].

2. Задача управления полем системы с распределёнными параметрами

Простейший вариант задачи управления полем системы состоит в том, что нужно найти такие граничные функции $g(x)$ и $f_0(\varphi)$, чтобы на некотором множестве точек $M \in (D)$, где область (D) принадлежит полосе, выполнялось равенство $u_2(x/y) = \varphi_0(x, y)$. Функция $\varphi_0(x, y)$ считается известной. Множество M может быть множеством дискретных точек, линий или областью. Будем также предполагать, что задана функция $f_0(\varphi)$.

Система уравнений, отвечающая такой постановке, будет состоять из (22), (25) и дополнительного уравнения

$$\int_{-\infty}^{\infty} [A(\lambda) \cdot \operatorname{sh} \lambda(H+y) + B(\lambda) \cdot \operatorname{ch} \lambda y] \cos \lambda x d\lambda + c_0 \ln \frac{\rho_0}{\rho_2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{\rho_0^n} \cos n \left(\frac{\pi}{2} - \varphi_0 \right) = \varphi_0(x, y), \quad (x, y) \in M. \quad (26)$$

Подставим в (26) выражения $A(\lambda)$ и $B(\lambda)$, в результате найдём

$$\int_0^a t(\xi) K_1(x, y; \xi) d\xi + \sum_{n=0}^{\infty} x_n \cdot \psi_n(x, y) = \varphi_0(x, y), \quad (x, y) \in M, \quad (27)$$

где обозначены

$$K_1(x, y; \xi) = \frac{1}{\pi} (\ln X + \ln Y),$$

$$X = \frac{v_+(x + \xi, y + H)}{v_-(x + y, y + H)}, \quad Y = \frac{v_+(x - \xi, y + H)}{v_-(x - \xi, y + H)},$$

$$v_+(x, y) = \operatorname{ch} \frac{\pi}{2H} x + \sin \frac{\pi}{2H} y, \quad v_-(x, y) = \operatorname{ch} \frac{\pi}{2H} x - \sin \frac{\pi}{2H} y,$$

$$\psi_0(x, y) = \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sh} \lambda(y + H)}{\lambda \cdot \operatorname{ch} \lambda H} \cdot e^{-\lambda h_0} (e^{-\lambda h_0} - 1) \cos \lambda x d\lambda + \ln \rho_0 - \ln \rho_2,$$

$$\psi_n(x, y) = \frac{R_0^n}{(n-1)!} \int_0^{\infty} \frac{\lambda^{n-1}}{\operatorname{ch} \lambda H} \left[e^{-\lambda h_0} \cdot \operatorname{sh} \lambda(H+y) + (-1)^{n+1} e^{-\lambda h} \cdot \operatorname{ch} \lambda y \right] \cos \lambda x d\lambda + \frac{R_0^n \cos n \left(\frac{\pi}{2} - \varphi_0 \right)}{\rho_0^n}.$$

В системе уравнений (22), (25), (27) неизвестными будут функции $t(x)$, $g(x)$ и коэффициенты x_n . Постоянная a_0 , как и в случае прямой задачи, находится из дополнительного условия (9). Здесь мы не предполагаем других ограничений на управление $g(x)$, кроме условия принадлежности её $L_1[0, a]$. В уравнении (27) ядро

$K_1(x, y, \xi)$ будет функцией, непрерывной по своим переменным вместе с производными, когда $(x, y) \in M$. Задача решения такого уравнения является некорректно поставленной, и для её решения следует применять метод регуляризации [5]. Такое же замечание относится и к ядру $H_2(x, 0, \xi)$ уравнения (25).

Можно в системе уравнений (22), (25), (27) сразу перейти к системе линейных алгебраических уравнений с помощью метода моментов, однако матрица такой системы будет плохо обусловленной, и поэтому мы вновь приходим к необходимости применять регуляризирующие алгоритмы [5] для нахождения приближённого решения.

Другие постановки задач управления и методы их решения приведены в монографиях [4, 8].

Список литературы

1. Проценко В.С. О двух смешанных задачах антиплоской деформации упругого клина с круговыми отверстиями / В.С. Проценко // ПММ. – 1998. – Т.52. – Вып. 5. – С. 806 – 813.
2. Проценко В.С. Краевые задачи теории потенциала для сфероидов вращения / В.С. Проценко // Докл. АН УССР. - 1987. – № 12. – С. 16 – 18.
3. Попов Г.Я. Концентрация упругих напряжений возле штампов, разрезов, тонких включений и подкреплений / Г. Я. Попов. – М.: Наука, 1982. – 324 с.
4. Лионс Ж. –Л. Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными / Ж. – Л. Лионс. – М.: Мир, 1972. – 414 с.
5. Тихонов А. Н. Методы решения некорректных задач / А.Н. Тихонов, В. Я. Арсенин. – М.: Наука, 1974. – 224 с.
6. Градштейн И.С. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений / И.С. Градштейн, И.М. Рыжик. – М.: Физматгиз, 1962. – 1100 с.
7. Захаров Е. В. Численный анализ дифракции радиоволн / Е. В. Захаров, Ю. В. Пименов. – М.: Радио и связь, 1982. – 184 с.
8. Бутковский А. Г. Методы управления системами с распределёнными параметрами / А. Г. Бутковский. – М.: Наука, 1975. – 568 с.

Рецензент: д-р физ.-мат наук, проф. зав. каф. Николаев А.Г., Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского «ХАИ», Харьков.

Поступила в редакцию 27.01.09.