

Методология численной реализации пространственных краевых задач в динамике вязкой жидкости

Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского «ХАИ»

Создана система поверхностных координат для построения алгоритма триангуляции поверхности в потоке несжимаемой вязкой жидкости, а также представлена методология численной реализации метода граничных интегральных уравнений для решения пространственных краевых задач в динамике вязкой жидкости.

Ключевые слова: системы граничных интегральных уравнений, интегралы типа потенциалов, поверхностные системы координат, триангуляция поверхности второго порядка, численная реализация.

1. Введение

В настоящее время наиболее перспективной представляется интегрированная компьютерная технология решения краевых задач гидродинамики, основанная на идеологии метода граничных интегральных уравнений. Этот метод позволяет сводить краевые задачи для уравнений в частных производных на многообразия меньшей размерности и является одним из классических методов исследования и решения краевых задач математической физики, теории поля и векторного анализа. Он находит широкое применение при построении математических моделей явлений, при доказательстве разрешимости задач, а также является теоретической основой разработки алгоритмов их численного исследования. Наиболее эффективным методом оказался в случаях внутренних и внешних задач для неограниченных областей с компактными внутренними границами и позволяет непосредственно определять распределенные аэрогидродинамические характеристики.

При численной реализации граничных интегральных уравнений в задачах обтекания алгоритм решения основывается на дискретизации границ области. Наиболее корректным с математической точки зрения и эффективным оказался метод триангуляции.

Триангуляция имеет большое научное и практическое значение. Ее используют для определения фигуры и размеров Земли методом градусных измерений; изучения горизонтальных движений земной коры и т.д.. В настоящее время триангуляция известна как мощное средство для построения трехмерных объектов компьютерных технологий при численном решении многих задач в различных отраслях.

При практической реализации метода наиболее часто проводят разбиение поверхности на элементарные треугольники в связи со следующим:

- треугольник является простейшим полигоном, вершины которого однозначно задают грань;
- любую поверхность в соответствующей системе координат можно гарантированно разбить на треугольники;
- вычислительная сложность алгоритмов разбиения на треугольники существенно меньше, чем при использовании других полигонов.

Аппроксимация поверхности исследуемого тела элементарными треугольниками дает возможность управления точностью при вычислении аэродинамиче-

ских характеристик. Численная реализация метода граничных интегральных уравнений приводит к приближённым результатам исследования, но имеет ряд преимуществ перед другими известными численными методами.

2. Поверхностные системы координат и локальный базис

Наиболее простой системой координат на поверхности произвольного эллипсоида [1] $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 = 1$ являются обобщенные сферические координаты

$$x = a \cos \varphi \sin \theta; y = b \sin \varphi \sin \theta; z = c \cos \theta, \quad (1)$$

где полярный угол – $\varphi \in [0, 2\pi]$, меридиональный угол – $\theta \in [0, \pi]$, а радиус-вектор точек эллипсоида $r(\varphi, \theta)$ определяется выражением

$$r(\varphi, \theta) = ia \cos \varphi \sin \theta + jb \sin \varphi \sin \theta + kc \cos \theta. \quad (2)$$

Тогда, пользуясь этим представлением, имеем касательные векторы к соответствующим координатным линиям на поверхности (рис. 1)

$$\begin{cases} r'_\varphi(\varphi, \theta) = -ia \sin \varphi \sin \theta + jb \cos \varphi \sin \theta; \\ r'_\theta(\varphi, \theta) = ia \cos \varphi \cos \theta + jb \sin \varphi \cos \theta - kc \sin \theta. \end{cases} \quad (3)$$

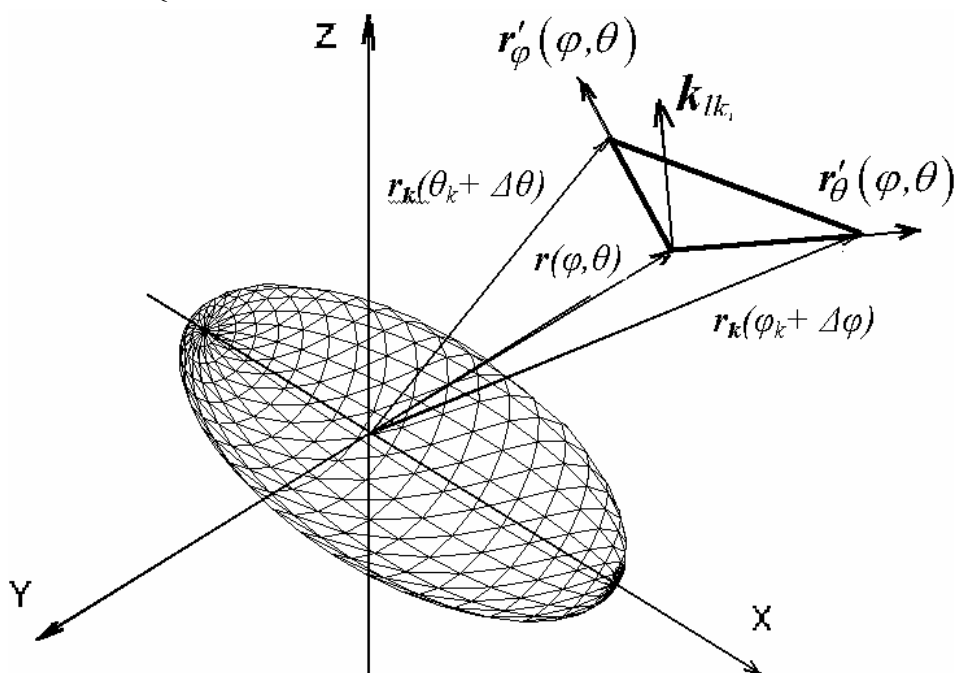


Рис. 1. Трехосный эллипсоид с координатными линиями и касательными векторами (3) в базовой системе координат

В процессе триангуляции поверхность эллипсоида целесообразно представить в виде многогранника с треугольными элементами (рис. 2) путем разбиения интервалов: $\varphi \in [0, 2\pi]$, $\theta \in [0, \pi]$ на равномерные промежутки:

$$\varphi = \varphi_k + \Delta\varphi; \theta = \theta_l + \Delta\theta \quad (k = 0, \dots, K; l = 0, \dots, L).$$

Тогда вершины треугольников определяются векторами

$$\mathbf{r}^{kl} = \mathbf{i}a \cos \varphi_k \sin \theta_l + \mathbf{j}b \sin \varphi_k \sin \theta_l + \mathbf{k}c \cos \theta_l.$$

Векторы, прилежащие к вершинам сторон, запишем в виде

$$\Delta \mathbf{r}_\varphi^{kl} = -\mathbf{i}2a \sin \varphi_k^\Delta \sin \frac{\Delta\varphi}{2} \sin \theta_l + \mathbf{j}2b \cos \varphi_k^\Delta \sin \frac{\Delta\varphi}{2} \sin \theta_l; \quad (4)$$

$$\Delta \mathbf{r}_\theta^{kl} = \mathbf{i}2a \cos \varphi_k \cos \theta_l^\Delta \sin \frac{\Delta\theta}{2} + \mathbf{j}2b \sin \varphi_k \cos \theta_l^\Delta \sin \frac{\Delta\theta}{2} - \mathbf{k}2c \sin \theta_l^\Delta \sin \frac{\Delta\theta}{2}; \quad (5)$$

вдоль координатных линий $\theta = const$ и $\varphi = const$ соответственно, где

$\varphi_k^\Delta = \varphi_k + \frac{\Delta\varphi}{2}$; $\theta_l^\Delta = \theta_l + \frac{\Delta\theta}{2}$. В расчетном случае осевой симметрии ($b = a$)

длины сторон треугольников вычисляем по формулам

$$|\Delta \mathbf{r}_\varphi^{kl}| = 2a \sin \frac{\Delta\varphi}{2} \sin \theta_l; \quad |\Delta \mathbf{r}_\theta^{kl}| = 2 \sin \frac{\Delta\theta}{2} \left[a^2 \cos^2 \theta_l^\Delta + c^2 \sin^2 \theta_l^\Delta \right]^{1/2}. \quad (6)$$

Угол между сторонами определяется известным образом:

$$\cos \omega_k = \left(\Delta \mathbf{r}_\varphi^{kl}, \Delta \mathbf{r}_\theta^{kl} \right) \left(|\Delta \mathbf{r}_\varphi^{kl}| |\Delta \mathbf{r}_\theta^{kl}| \right)^{-1},$$

где $\left(\Delta \mathbf{r}_\varphi^{kl}, \Delta \mathbf{r}_\theta^{kl} \right) = -4 \sin \frac{\Delta\varphi}{2} \sin \frac{\Delta\theta}{2} \sin \theta_l \cos \theta_l^\Delta \left[(a^2 - b^2) \sin \varphi_k \cos \frac{\Delta\varphi}{2} \cos \varphi_k + \right.$

$$\left. + (a^2 \cos^2 \varphi_k + b^2 \sin^2 \varphi_k) \sin \frac{\Delta\varphi}{2} \right]. \quad (7)$$

При осевой симметрии имеем

$$\left(\Delta \mathbf{r}_\varphi^{kl}, \Delta \mathbf{r}_\theta^{kl} \right) = -4a^2 \sin^2 \frac{\Delta\varphi}{2} \sin \theta_l \sin \frac{\Delta\theta}{2} \cos \theta_l^\Delta. \quad (8)$$

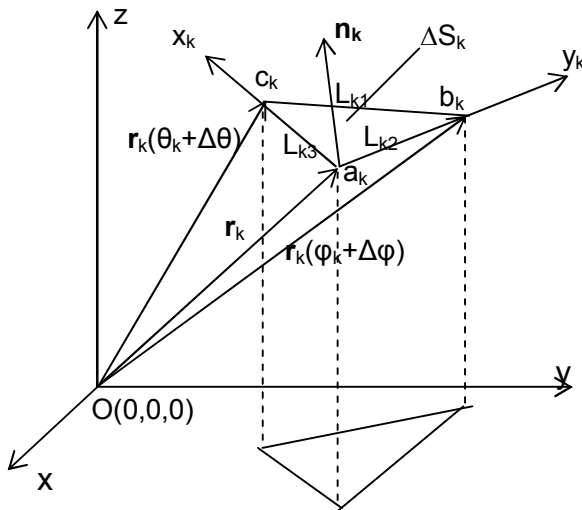


Рис. 2. Элементарный треугольник с локальной системой координат и его проекция на плоскость xOy

Эти вычисления позволяют утверждать, что при достаточно мелком разбиении поверхности эллипсоида вращения ($b = a$) на ячейки $(\varphi_k, \varphi_k + \Delta\varphi; \theta_l, \theta_l + \Delta\theta)$ в ортогональной поверхностной системе координат стороны треугольников (4) – (5) $\Delta \mathbf{r}_\varphi^{kl}, \Delta \mathbf{r}_\theta^{kl}$ ортогональны и допускают построение локальной системы координат. Таким образом, построена система ортов, определяющая локальный базис:

$$\mathbf{i}_{kl} = \Delta \mathbf{r}_\varphi^{kl} \left(|\Delta \mathbf{r}_\varphi^{kl}| \right)^{-1} = -\mathbf{i} \sin \varphi_k^\Delta + \mathbf{j} \cos \varphi_k^\Delta;$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{j}_{kl} &= \frac{\Delta \mathbf{r}_{\theta}^{kl}}{|\Delta \mathbf{r}_{\theta}^{kl}|} = \frac{i a \cos \varphi_k \cos \theta_l^{\Delta} + j a \sin \varphi_k \cos \theta_l^{\Delta} - k c \sin \theta_l^{\Delta}}{\left[a^2 \cos^2 \theta_l^{\Delta} + c^2 \sin^2 \theta_l^{\Delta} \right]^{1/2}}; \\
 \mathbf{k}_{kl} &= - \frac{i c \cos \varphi_k^{\Delta} \sin \theta_l^{\Delta} + j c \sin \varphi_k^{\Delta} \sin \theta_l^{\Delta} + k a \cos \theta_l^{\Delta} \cos \frac{\Delta \varphi}{2}}{\left[c^2 \sin^2 \theta_l^{\Delta} + a^2 \cos^2 \theta_l^{\Delta} \cos^2 \frac{\Delta \varphi}{2} \right]^{1/2}}. \quad (9)
 \end{aligned}$$

3. Геометрические и дифференциальные характеристики триангулированных поверхностей

Рассмотрим элемент триангуляции осесимметричного эллипсоида в виде изолированного прямоугольного треугольника (рис. 2), вершины которого расположены на поверхности с координатами в базовой системе координат:

$$\begin{aligned}
 x_1^{kl} &= a \cos \varphi_k \sin \theta_l; y_1^{kl} = a \sin \varphi_k \sin \theta_l; z_1^{kl} = c \cos \theta_l, \\
 x_2^{kl} &= a \cos (\varphi_k + \Delta \varphi) \sin \theta_l; y_2^{kl} = a \sin (\varphi_k + \Delta \varphi) \sin \theta_l; z_2^{kl} = c \cos \theta_l, \\
 x_3^{kl} &= a \cos \varphi_k \sin (\theta_l + \Delta \theta_l); y_3^{kl} = a \sin \varphi_k \sin (\theta_l + \Delta \theta_l); z_3^{kl} = c \cos (\theta_l + \Delta \theta_l). \quad (10)
 \end{aligned}$$

Построим уравнение плоскости, проходящей через три заданные точки пространства (10). Как известно [2], эта плоскость является единственной и ее уравнение имеет вид

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0. \quad (11)$$

Для приближенного вычисления интегралов различных классов, которые входят в интегральные уравнения [3], по поверхности триангулированного эллипсоида необходимо установить форму элемента площади треугольника, расположенного в плоскости.

Здесь целесообразно в силу возможности явного представления функций плоскости воспользоваться методом проектирования элемента площади на соответствующую базовую координатную плоскость $(x, y); (y, z); (x, z)$ для исключения вопросов неоднозначности:

1. Проекция на координатную плоскость xoy :

$$\Delta S_z^{kl} = \sqrt{1 + \left(\frac{c}{a}\right)^2 \operatorname{tg}^2 \theta_l^{\Delta} \cos^2 \frac{\Delta \varphi}{2}} \Delta x \Delta y. \quad (12)$$

2. Проекция на координатную плоскость xoz :

$$\Delta S_y^{kl} = \sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 \varphi_k^{\Delta} + \left(\frac{a}{c}\right)^2 \cos^2 \frac{\Delta \varphi}{2} \sin^2 \varphi_k^{\Delta} \operatorname{ctg}^2 \theta_l^{\Delta}} \Delta x \Delta z. \quad (13)$$

3. Проекция на координатную плоскость yoz :

$$\Delta S_x^{kl} = \sqrt{1 + tg^2 \varphi_k^\Delta + \left(\frac{a}{c}\right)^2 \cos^2 \frac{\Delta \varphi}{2} \cos^{-2} \varphi_k^\Delta \operatorname{ctg}^2 \theta_l^\Delta} \Delta y \Delta z. \quad (14)$$

Причем в каждом отдельном случае необходимо выяснить область интегрирования по проекции элементарного треугольника на соответствующую координатную плоскость.

4. Применение к решению краевых задач

При решении краевых задач аэродинамики несжимаемой вязкой жидкости интегральные представления содержат интегралы типа потенциалов: простого и двойного слоя, а также сингулярные интегралы [4, 5, 6]

$$\iint_{(S)} \varphi dS; \quad \iint_{(S)} [\mathbf{n}, \nabla \varphi] dS; \quad \iint_{(S)} \frac{\partial \varphi}{\partial n} dS. \quad (15)$$

Численная реализация приводится к сумме интегралов по каждому элементарному треугольнику триангуляции, т.е.

$$\iint_{(S)} [\mathbf{n}, \nabla \varphi] dS = \sum_{k=1}^N \iint_{(\Delta S_K)} [\mathbf{n}, \nabla \varphi] dS = \sum_{k=1}^N \int_{(L_k)} \varphi dr_k, \quad (16)$$

где N – количество элементарных треугольников.

Для определения интегралов по каждому отрезку $a_k b_k$, $b_k c_k$ и $c_k a_k$ элементарного треугольника $a_k b_k c_k$ (см. рис.2) имеем:

$$\begin{aligned} \int_{(L_k)} \varphi dr_k &= \frac{u_{12}}{4\pi \sqrt{e_{1k12}}} \ln \left\{ \left[\left(1 + \frac{e_{2k12}}{e_{1k12}} \right) + \sqrt{1 + \frac{2e_{2k12} + e_{3k12}}{e_{1k12}}} \right] \left(\frac{e_{2k12}}{e_{1k12}} + \sqrt{\frac{e_{3k12}}{e_{1k12}}} \right)^{-1} \right\} + \\ &+ \frac{u_{23}}{4\pi \sqrt{e_{1k23}}} \ln \left\{ \left[\left(1 + \frac{e_{2k23}}{e_{1k23}} \right) + \sqrt{1 + \frac{2e_{2k23} + e_{3k23}}{e_{1k23}}} \right] \left(\frac{e_{2k23}}{e_{1k23}} + \sqrt{\frac{e_{3k23}}{e_{1k23}}} \right)^{-1} \right\} + \\ &+ \frac{u_{31}}{4\pi \sqrt{e_{1k31}}} \ln \left\{ \left[\left(1 + \frac{e_{2k31}}{e_{1k31}} \right) + \sqrt{1 + \frac{2e_{2k31} + e_{3k31}}{e_{1k31}}} \right] \left(\frac{e_{2k31}}{e_{1k31}} + \sqrt{\frac{e_{3k31}}{e_{1k31}}} \right)^{-1} \right\}, \quad (17) \end{aligned}$$

где $(x_{k2} - x_{k1})^2 + (y_{k2} - y_{k1})^2 + (z_{k2} - z_{k1})^2 = e_{1k12}$; $(x_{k1} - x_k)^2 + (y_{k1} - y_k)^2 + (z_{k1} - z_k)^2 = e_{3k12}$;
 $(x_{k2} - x_{k1})(x_{k1} - x_k) + (y_{k2} - y_{k1})(y_{k1} - y_k) + (z_{k2} - z_{k1})(z_{k1} - z_k) = e_{2k12}$;
 $(x_{k3} - x_{k2})^2 + (y_{k3} - y_{k2})^2 + (z_{k3} - z_{k2})^2 = e_{1k23}$; $(x_{k2} - x_k)^2 + (y_{k2} - y_k)^2 + (z_{k2} - z_k)^2 = e_{3k23}$;
 $(x_{k3} - x_{k2})(x_{k2} - x_k) + (y_{k3} - y_{k2})(y_{k2} - y_k) + (z_{k3} - z_{k2})(z_{k2} - z_k) = e_{2k23}$;
 $(x_{k1} - x_{k3})^2 + (y_{k1} - y_{k3})^2 + (z_{k1} - z_{k3})^2 = e_{1k31}$; $(x_{k3} - x_k)^2 + (y_{k3} - y_k)^2 + (z_{k3} - z_k)^2 = e_{3k31}$;
 $(x_{k1} - x_{k3})(x_{k3} - x_k) + (y_{k1} - y_{k3})(y_{k3} - y_k) + (z_{k1} - z_{k3})(z_{k3} - z_k) = e_{2k31}$.

С помощью фундаментального решения уравнения Лапласа φ вектор $\mathbf{G} \in C^2(E)$ определяется условием консервативности

$$(\nabla, \mathbf{G}) = 0 \Leftrightarrow \nabla \varphi = [\nabla, \mathbf{G}], \quad (18)$$

поэтому
$$\iint_{(S)} \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{n}} dS = \sum_{k=1}^N \iint_{\Delta S_k} \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{n}} dS = \sum_{k=1}^N \iint_{\Delta S_k} (\mathbf{n}, \nabla \varphi) dS = \sum_{k=1}^N \iint_{\Delta S_k} (\mathbf{n}, [\nabla, \mathbf{G}]) dS. \quad (19)$$

Этот интеграл можно привести к интегралу по контуру (см. рис.2)

$$\iint_{\Delta S_k} (\mathbf{n}, [\nabla, \mathbf{G}]) dS = \oint_{L_k} (\mathbf{G}, d\mathbf{r}_k). \quad (20)$$

В пространстве R^3 вектор \mathbf{G} из условия консервативности тензора \mathbf{G} (18) в обычной сферической системе координат можно представить в виде

$$\mathbf{G} = \frac{1}{4\pi} \cos \theta \operatorname{grad} \omega. \quad (21)$$

Вычисление контурных интегралов в (20) после параметризации отрезков $a_k b_k$, $b_k c_k$ и $c_k a_k$ приводится к элементарным интегралам типа

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{pt^2 + lt + m}{(bt^2 + kt + n)\sqrt{gt^2 + ht + j}} dt &= \frac{p}{b} \left(\frac{1}{\sqrt{g}} \ln \left(\frac{2g + h + 2\sqrt{g^2 + gh + gj}}{h + 2\sqrt{gj}} \right) \right) + \\ &+ \frac{1}{b} (\mu - \nu) \left\{ \frac{Q}{\sqrt{EAR - E^2S}} \left[\operatorname{arctg} \frac{\sqrt{EA(\nu - 1)^2 + ES(1 - \mu)^2}}{(1 - \mu)\sqrt{AR - ES}} - \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{EA\nu^2 + ES\mu^2}}{\mu\sqrt{AR - ES}} \right] + \right. \\ &\left. + \frac{W}{AR} \left[\operatorname{arctg} \frac{A^3 R (\nu - 1) (ES - AR)}{\sqrt{A(\nu - 1)^2 + S(1 - \mu)^2}} - \operatorname{arctg} \frac{A^3 R \nu (AR - ES)}{\sqrt{A\nu^2 + S\mu^2}} \right] \right\} \quad (22) \end{aligned}$$

и является источником получения численного значения потенциала двойного слоя

$$\iint_{(S)} \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{n}} dS, \text{ при котором переменные в выражении (22) в зависимости от координат}$$

вершин элементарного треугольника можно представить в виде

$$\begin{aligned} x &= t(x_{k2} - x_{k1}) + x_{k1}; y = t(y_{k2} - y_{k1}) + y_{k1}; z = t(z_{k2} - z_{k1}) + z_{k1}, \\ p &= (z_{k2} - z_{k1})(x_{k2} - x_{k1}); l = x_{k1}(z_{k2} - z_{k1}) + z_{k1}(x_{k2} - x_{k1}); m = z_{k1}x_{k1} \\ b &= (x_{k2} - x_{k1})^2 + (y_{k2} - y_{k1})^2; k = 2x_{k1}(x_{k2} - x_{k1}) + 2y_{k1}(y_{k2} - y_{k1}); n = x_{k1}^2 + y_{k1}^2; \\ q &= (z_{k2} - z_{k1})(y_{k2} - y_{k1}); w = y_{k1}(z_{k2} - z_{k1}) + z_{k1}(y_{k2} - y_{k1}); e = z_{k1}y_{k1}; \\ r &= (x_{k2} - x_{k1})^2 + (y_{k2} - y_{k1})^2; p = 2x_{k1}(x_{k2} - x_{k1}) + 2y_{k1}(y_{k2} - y_{k1}); \\ s &= x_{k1}^2 + y_{k1}^2; g = (z_{k2} - z_{k1})^2 + (x_{k2} - x_{k1})^2 + (y_{k2} - y_{k1})^2; \end{aligned}$$

$h = 2z_{k1}(z_{k2} - z_{k1}) + 2x_{k1}(x_{k2} - x_{k1}) + 2y_{k1}(y_{k2} - y_{k1}); j = x_{k1}^2 + y_{k1}^2 + z_{k1}^2$,
а постоянные Q, W, E, A, μ и ν в зависимости от указанных выше переменных имеют вид

$$\mu\nu = \frac{kj - nh}{bh - kg}, (\mu + \nu) = -2 \left(\frac{g(kj - nh)}{h(bh - kg)} + \frac{j}{h} \right), Q = \mu(bl - pk) + (bm - pn);$$

$$W = \nu(bl - pk) + (bm - pn); E = b\mu^2 + k\mu + n; R = \nu^2 + k + n;$$

$$A = g\mu^2 + h\mu + j; S = g\nu^2 + h\nu + j.$$

5. Заключение

При численной реализации краевых задач аэрогидродинамики методом граничных интегральных уравнений представлен алгоритм процесса триангуляции поверхности эллипсоидального типа в виде пакета прикладных программ при исследовании обтекания тела вязким потоком несжимаемой жидкости. Получены обобщения квадратурных формул для вычисления поверхностных интегралов типа потенциалов простого и двойного слоев, а также сингулярных.

Список литературы

1. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления / Г.М. Фихтенгольц. - М.: Наука, 1970. - 656 с.
2. Выгодский М.Я. Справочник по высшей математике / М.Я. Выгодский.- М.: Наука, 1977. -657 с.
3. Математический анализ (дифференцирование и интегрирование). Справочная математическая библиотека / под общ. ред. Л.А. Люстерника и А.Р. Янпольского. - М.: Физматгиз, 1961. - 350 с.
4. Крашаница Ю.А. Трехмерное обтекание телесных несущих систем реальным потоком несжимаемой жидкости / Ю.А. Крашаница, Н. М. Туан // Вісті Академії інженерних наук України. Спец. випуск. Машинобудування та прогресивні технології. – Вип. 3(33). – К., 2007.- С. 180-184.
5. Крашаница Ю.А. Теория гидродинамических потенциалов / Ю.А. Крашаница, Н.М. Туан // Вестник Херсонского нац. техн. университета. – Вып. 2(31). 2008. - С. 269-272.
6. Крашаница Ю.А. Общие интегральные представления решений полной системы уравнений Навье-Стокса / Ю.А. Крашаница, Н.М. Туан, Ф.А. Шалал // Вопросы проектирования и производства конструкций летательных аппаратов. Спец. выпуск. Новые технологии в машиностроении: сб. науч. тр. Нац. аэрокосм. ун-та им. Н.Е. Жуковского «ХАИ». – Вып. 2(54). – Х., 2008. – С. 131-135.

Рецензент: д-р техн. наук, проф. В. В. Тюрёв, Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского «ХАИ»

Поступила в редакцію 28.05.09

Методологія числової реалізації просторових крайових задач у динаміці в'язкої рідини

Створено систему поверхневих координат для побудови алгоритму триангуляції поверхні в потоці нестисливої в'язкої рідини, а також наведено методологію числової реалізації методу граничних інтегральних рівнянь для розв'язання просторових крайових задач в динаміці в'язкої рідини.

Ключові слова: системи межових інтегральних рівнянь, інтеграли типа потенціалів, поверхневих систем координат, триангуляція поверхні другого порядку, кількісна реалізація

Methodology of numerical realization of spatial regional tasks is in the dynamics of viscid liquid

The system of coordinates is presented for the construction of algorithm of triangulation of surface in the stream of incompressible viscid liquid. And also numerical realization of scope integral equalizations is presented a method for the decision of spatial regional tasks in the dynamics of viscid liquid.

Keywords: systems of boundary integral equation, integrals of potential type, surface coordinate systems, triangulation of quadric surface, numerical implementation