УДК 539.3.534.1

С.А. Халилов, С.И. Весельский

Передача направленной по полету локальной нагрузки на крыльевую панель. Модель первого уровня

Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского «ХАИ»

Разработана и полностью проанализирована математическая модель задачи передачи локальных нагрузок на прямоугольную пластину, подкрепленную ребрами жесткости, расположенными как на границе, так и в области, занимаемой пластинкой. На основании полученных результатов даны рекомендации для проектирования аналогичных конструкций.

Ключевые слова: крыльевая панель, локальная нагрузка, бортовая балка, бимс, распределение напряжений.

Введение

Рассмотрена задача деформирования прямоугольной пластины, подкрепленной часто расположенным стрингерным набором, под действием сосредоточенных и распределенных (локально) нагрузок, приложенных к краевой балке нормально к ее оси. Краевая балка непрерывно связана с пластиной, которая, в свою очередь, взаимодействует с полками нервюр, имеющими конечную жесткость на растяжение-сжатие. Плоскость нагрузки совпадает с плоскостью пластины. Схема рассматриваемой конструкции изображена на рис. 1.

Решения, полученные в замкнутом виде, позволяют выполнять оперативные расчеты в целях выявления влияния различных параметров конструкции на ее напряженное состояние, что весьма важно при проектировании. Даны примеры расчетов, а соответствующие результаты показаны на графиках.

Рассматриваемая математическая модель является приближенной [1]. Более точные модели, описывающие работу прямоугольной пластины как основного элемента системы, предложены в работах [2, 3].

1. Действие сосредоточенной силы на пластину, дополнительно подкрепленную бимсом, идущим навстречу силе

Схема конструкции изображена на рис. 1. Наличие бимса позволяет существенно упростить расчетную модель. Поскольку сосредоточенная сила передается через краевую балку, абсолютно жесткую в поперечном направлении, то вся сила будет сразу воспринята бимсом в его крайнем сечении. Это позволяет считать, что в обшивке будут развиваться в основном касательные напряжения, являющиеся лишь функцией координаты x. Кроме того, допускается возможность появления поперечных деформаций, следствием чего является наличие напряжений σ_y. Тогда из уравнения равновесия элемента обшивки и краевого условия при $x=0$ следует, что $\sigma_x=0$. Жесткость часто расположенных стрингеров учитывается в приведенной толщине обшивки, так что обшивка считается выполненной из ортотропного материала.

Ниже задача рассматривается как с учетом поперечных деформаций, так и без их учета.

Будем исходить из уравнений плоской задачи теории упругости в варианте обобщенного плоского напряженного состояния. Исходными являются уравнения равновесия элемента обшивки (1), соотношения закона Гука, записанные для ортотропного материала (2), связь между деформациями и перемещениями (соотношения Коши) – (3), уравнения равновесия элементов дискретно учитываемого подкрепления (бимса, балки, приведенных поясков нервюр) – (4), а также физические и геометрические соотношения для указанных одномерных элементов. Приводим все отмеченные зависимости.

Уравнения равновесия элемента обшивки

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x_o} + \frac{\partial \tau}{\partial y_o} = 0\,,\ \frac{\partial \tau}{\partial x_o} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y_o} = 0\,. \qquad (1)$$

Нормальные напряжения считаются положительными, если они растягивающие, а положительные направления касательных напряжений указаны на рис. 1.

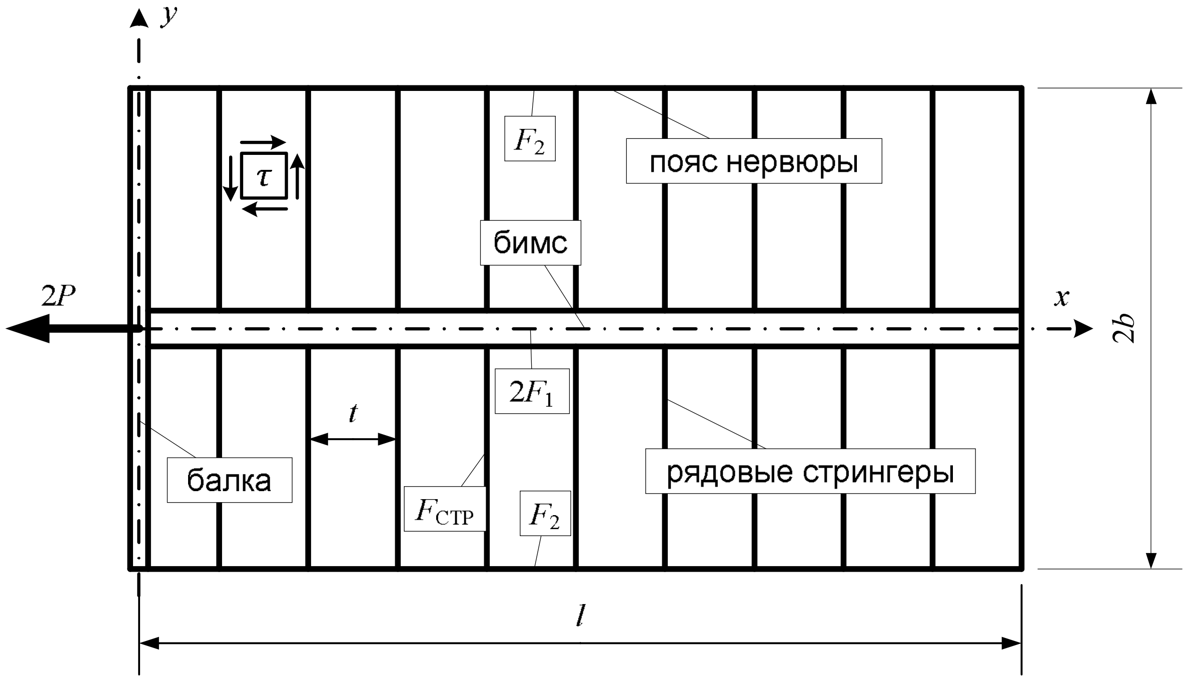

Рис. 1. Схема конструкции (панель 1)

Соотношения закона Гука

$$\sigma_x = \frac{E_x}{1-\nu_1\nu_2}\left(\varepsilon_x + \nu_2\varepsilon_y\right),\ \sigma_y = \frac{E_y}{1-\nu_1\nu_2}\left(\varepsilon_y + \nu_2\varepsilon_x\right),\ \tau = G\gamma\,. \qquad (2)$$

Соотношения Коши

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x_o},\ \varepsilon_y = \frac{\partial v_o}{\partial y_o},\ \gamma = \frac{\partial u_o}{\partial y_o} + \frac{\partial v_o}{\partial x_o}. \qquad (3)$$

Уравнения равновесия подкрепления с учетом симметрии рассматриваемой системы запишутся так:

$$\frac{dN_1}{dx_o}+2S=0,\ \frac{dN_2}{dx_o}-S=0,\ \frac{dN_o}{dx_o}+S=0, \tag{4}$$

где N_1, N_2, N_0 – продольные усилия в сечениях бимса, пояса нервюры и краевой балки соответственно, $S=G\gamma h$ – поток касательных сил (G – модуль сдвига материала обшивки, h – толщина обшивки без учета стрингеров). Как будет показано ниже, краевая балка на изгиб не работает и поэтому уравнение изгиба элемента балки здесь не приведено. В формулах дифференцирование ведется по переменным x_o, y_o имеющим размерность длины: $0\le x_o\le l,\ -b\le y_o\le b$. В дальнейшем удобно будет работать в безразмерных координатах

$$x=\frac{x_o}{l},\ y=\frac{y_o}{b},\ 0\le x\le 1,\ -1\le y\le 1. \tag{5}$$

Примем, что сдвиги γ не зависят от $y:\ \gamma=\gamma(x)$, тогда и $S=S(x)$. Из первого уравнения равновесия (1) получим $\sigma_x=\sigma_x(y)$, но поскольку сила сразу передается на бимс, то на краю пластины $x=0$ нормальные напряжения не возникают, а это значит, что $\sigma_x\equiv 0$. Таким образом, принятые допущения благодаря наличию бимса не противоречат первому уравнению равновесия. Первое соотношение закона Гука в (2) служит для определения деформации ε_x, которая отлична от нуля и определяется уравнением

$$\varepsilon_x=-\nu_2\varepsilon_y. \tag{6}$$

Поток касательных сил $S=S(x)$ представим в виде суммы двух компонент

$$S=S_1+S_2, \tag{7}$$

где $S_1=S_1(x)$ вызван продольными деформациями ребер, взаимодействующих с обшивкой:

$$S_1=Gh\gamma=\frac{Gh}{b}(u_2-u_1), \tag{8}$$

где u_1 и u_2 – продольные перемещения осевых линий бимса и пояса нервюры соответственно. Формула (8) легко устанавливается из рассмотрения геометрии деформирования сечения $x=const$ конструкции.

Из уравнения (8) имеем (здесь и далее «штрих» означает дифференцирование по безразмерной переменной x):

$$S_1''=\frac{Gh}{b}(u_2''-u_1''), \tag{9}$$

и так как

$$u_1''=\frac{l}{2E_1F_1}N_1',\qquad u_2''=\frac{l}{2E_2F_2}N_2', \tag{10}$$

то с учетом уравнений равновесия элементов подкрепления

$$N_1'+2lS=0,\qquad N_2'=lS \tag{11}$$

получим

$$u_1'' = -\frac{l^2}{E_1F_1}S, \qquad u_2'' = \frac{l}{E_2F_2}S. \tag{12}$$

Подставив теперь (12) в (9), получим

$$S_1'' = \lambda^2 S, \tag{13}$$

где $\lambda^2 = \frac{Ghl^2}{E_1F_1b}(1+f)$ – безразмерный параметр;

$f = E_1F_1 / E_2F_2$ – параметр, характеризующий соотношение продольных жесткостей элементов подкрепления.

Далее из второго уравнения равновесия элемента пластины (1), записанного в виде

$$\frac{1}{b}\frac{\partial\sigma_y}{\partial y} + \frac{1}{h_1 l}S'(x), \tag{14}$$

находим σ_y:

$$\sigma_y = -\frac{b}{h_1 l} yS'(x) + C_\sigma(x). \tag{15}$$

Отметим, что h_1 – это уже приведенная толщина обшивки:

$$h_1 = h + F_{CTP} / t, \tag{16}$$

где F_{CTP} – площадь поперечного сечения стрингера, t – шаг стрингеров.

Функцию $C_\sigma(x)$ определим из того условия, что пояса нервюр не воспринимают изгиба в плоскости панели, т.е. при $y = 1$ должно быть $\sigma_y = 0$**,** что дает: $C_\sigma(x) = bS' / h_1 l$, и для $\sigma_y(x,y)$ получаем формулу

$$\sigma_y(x,y) = \frac{b}{h_1 l}(1-y)S'(x). \tag{17}$$

В направлении оси y жесткость пластины значительно выше, чем в направлении оси x, что обусловлено подкрепляющим эффектом стрингеров. Следствием этого является малое значение коэффициента Пуассона ν_1. Полагая ν_1 равным нулю, из закона Гука (2) получаем

$$\sigma_y = E^*\varepsilon_y = \frac{E^*}{b}\frac{\partial\upsilon}{\partial y}, \tag{18}$$

где E^* – приведенный модуль упругости панели (с учетом стрингеров). Нетрудно получить, что E^* определяется формулой

$$E^* = E_{об}\tilde{h} + E_{CTP}(1-\tilde{h}), \tag{19}$$

где $E_{об}$, $E_{СТР}$ – модули упругости обшивки и стрингера соответственно, $\tilde{h}$ – безразмерный параметр, равный h / h_1.

Из уравнения (18) получаем

$$\upsilon(x,y) = \frac{b^2}{E^* h_1 l} S'(x) \int_0^y (1-y)dy + \upsilon^0(x),$$

где $\upsilon^0(x) = \upsilon(x, y=0) = 0$ (следует из симметрии).

Теперь предыдущую формулу можно записать так:

$$\upsilon(x,y) = \frac{b^2}{2E^* h_1 l}(2y - y^2)S'(x). \quad (20)$$

Поскольку поток касательных сил $S_2(x)$, как было отмечено выше, обусловлен поперечной деформацией панели, то из закона Гука с учетом соотношения Коши можно получить:

$$S_2(x) = G\frac{h}{l}\frac{\partial \upsilon}{\partial x} = \beta^*(2y - y^2)S''(x), \quad (21)$$

где безразмерный параметр β^* определяется так:

$$\beta^* = \frac{Gb^2 h}{2E^* h_1 l^2}.$$

Функции S и S_1 являются функциями лишь переменной x, но тогда и $S_2 = S - S_1$ должна быть лишь функцией переменной x. Поэтому за S_2 примем средний по высоте сечения $x = const$ поток касательных сил, т. е. положим

$$S_2(x) = \beta^* S''(x) \int_0^1 (2y - y^2)dy = \beta S''(x), \quad (22)$$

где $\beta = Gb^2 h / 3E^* h_1 l^2 = \frac{2}{3}\beta^*$.

Из формулы (22) двукратным дифференцированием находим

$$S_2''(x) = \beta S^{IV}. \quad (23)$$

Складывая теперь (23) с (13) и учитывая (7), получаем исходное дифференциальное уравнение

$$S^{IV} - 2\frac{1}{2\beta}S'' + \frac{\lambda^2}{\beta}S = 0. \quad (24)$$

Корни r соответствующего характеристического уравнения следует определить по формуле

$$r=\pm\sqrt{\frac{1}{2\beta}\left(1\pm\sqrt{1-4\beta\lambda^2}\right)}. \tag{25}$$

Могут представиться три случая:

1) $1>4\beta\lambda^2$, все корни r действительные и разные; решение $S(x)$ следует брать в одной из форм, исходя из удобств расчета:

$$S=C_1e^{r_1x}+C_2e^{r_2x}+C_3e^{-r_1x}+C_4e^{-r_2x},$$

$$S=C_1\,sh\,r_1x+C_2\,ch\,r_1x+C_3\,sh\,r_2x+C_2\,ch\,r_2x\ ,$$

где $r_{1,2}=\sqrt{\frac{1}{2\beta}\left(1\pm\sqrt{1-4\beta\lambda^2}\right)}$;

2) $1=4\beta\lambda^2$, корни действительные двукратные:

$$S=(C_1+rxC_2)e^{rx}+(C_3+rxC_4)e^{-rx},$$

$$S=(C_1+rxC_2)\,sh\,rx+(C_3+rxC_4)chrx,$$

где $r=1/\sqrt{2\beta}$;

3) $1<4\beta\lambda^2$, корни комплексные, попарно сопряженные:

$$S=(C_1\sin qx+C_2\cos qx)e^{px}+(C_3\sin qx+C_4\cos qx)e^{-px},$$

$$S=C_1\sin qx\,sh\,px+C_2\sin qx\,ch\,px+C_3\cos qx\,sh\,px+C_4\cos qx\,ch\,px,$$

а для величин p и q справедливы формулы:

$$p=\frac{1}{2\sqrt{\beta}}\sqrt{2\lambda\sqrt{\beta}+1}\ ,\ q=\frac{1}{2\sqrt{\beta}}\sqrt{2\lambda\sqrt{\beta}-1}.$$

Компоненты напряженно-деформированного состояния конструкции выражаются через одну (разрешающую) функцию S.

Опуская выкладки, приведем искомые формулы:

$$N_1(x)=N_1^0-2l\int_0^x S(t)dt,\ N_2(x)=N_2^0+l\int_0^x S(t)dt,$$

$$u_1(x)=\frac{l}{2E_1F_1}(N_1^0x-2l\int_0^x(x-t)S(t)dt)+u_1^0, \tag{26}$$

$$u_2(x)=\frac{l}{E_2F_2}(N_2^0x+l\int_0^x(x-t)S(t)dt)+u_2^0.$$

В рассматриваемом случае $N_2^0=0$, $N_1^0=2P$, а u_κ^0, $\kappa=1,2$ определяются из условий $u_\kappa^0(x=1)=0$, что дает такие формулы:

$$u_1^0 = -\frac{l}{2E_1F_1}\left(N_1^0 - 2l\int_0^1 (1-t)S(t)dt \right),$$
$$u_2^0 = -\frac{l}{E_2F_2}\left(N_2^0 + l\int_0^1 (1-t)S(t)dt \right). \qquad (27)$$

Решение дифференциального уравнения (24) следует искать, как нетрудно показать, при следующих условиях:

1) при $x=0$ $S - \beta S'' + \lambda^2 \int_0^y (1-t)S(t)dy = \frac{\mu}{l}(N_1^0 - 2fN_2^0)$,

2) при $x=0$ $S' - \rho S = 0$, (28)

3) при $x=1$ $S' = 0$,

4) при $x=1$ $S - \beta S'' = 0$,

где $\mu = \frac{Ghl^2}{2E_1F_1b}$, $\rho = \frac{E^* h_1 l}{E_0F_0}$, $E_0 \cdot F_0$ – жесткость краевой балки.

Таким образом, принятая модель полностью проанализирована.

Можно рекомендовать следующий порядок расчета:

1) вычислить безразмерные параметры λ^2, μ, β, ρ по приведенным формулам;

2) определить корни r характеристического уравнения и записать соответствующее решение для $S(x)$;

3) произвольные постоянные C_K, $\kappa = 1,2,3,4$ содержащиеся в решении $S(x)$, определить из условий (28) и конкретизировать тем самым функцию $S(x)$, являющуюся потоком касательных сил в обшивке;

4) остальные компоненты напряженно-деформированного состояния определить по формулам (26), (20) и (17).

2. Пример расчета

В заключение приведем пример расчета. Примем такие исходные данные:

$l = 4b$, $F_0 = 4F_1$,

$n_{CTP} = 10$, $h = F_1 / b$,

$F_2 = F_1$, $E_{об} = E_0 = E_1 = E_2 = E_{CTP} = 2G = E$.

По этим данным получаем

$$h_1 = \frac{5F_1}{4b},\ \tilde{h} = \frac{4}{5},\ f = 1,\ E^* = E,$$

$$\lambda^2 = 16,\ \beta = \frac{1}{120},\ \mu = 4,\ \rho = \frac{5}{4}.$$

Для корней характеристического уравнения имеет место первый случай

$(1 > 4\beta\lambda^2)$:

$$r_1 = 10{,}55372\ ,\ r_2 = 2{,}93583\,.$$

Поскольку явного разделения корней на большие (по модулю) и малые нет, то берем решение в виде

$$S = C_1\, sh\, r_1 x + C_2\, ch\, r_1 x + C_3\, sh\, r_2 x + C_2\, ch\, r_2 x\,.$$

Выполнив условия (2.28), определим все постоянные $C_к$:

$$C_1 = -C_2 = 0{,}086281\frac{2P}{b}\,,\ C_4 = -C_3 = 0{,}24331\frac{2P}{b}\,.$$

Результаты расчетов изображены графиками на рис. 2 и 3. На рис. 2 показано изменение по оси x безразмерных параметров продольных усилий N_1 и N_2, а также безразмерного параметра потока касательных сил S. Масштабы для продольных усилий указаны слева, для касательных – справа. Величина N_2/P характеризует продольную силу, приходящуюся на оба пояса нервюры в сумме; на каждую нервюру в силу симметрии приходится, естественно, половина этой величины. Как видно из рисунка, включение конструкции в работу происходит не очень интенсивно – бимс даже в корневом сечении берет на себя около 45% всей нагрузки. Наблюдается высокая концентрация касательных напряжений у загруженной краевой балки; падение касательных напряжений к корню очень интенсивно.

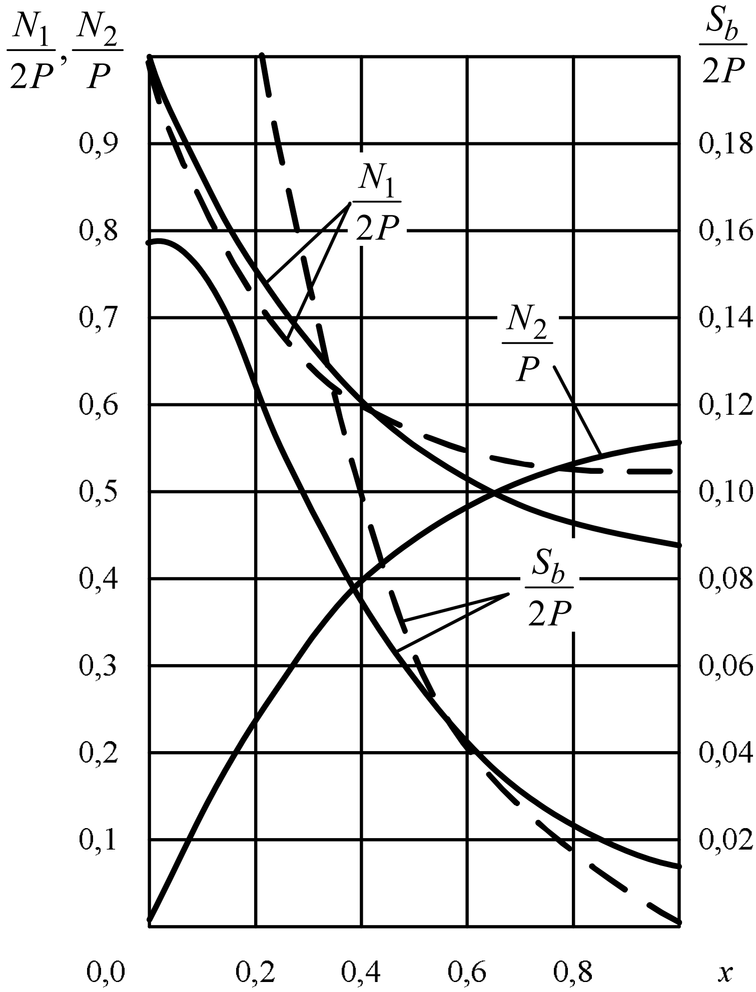

Рис. 2. Изменение усилий в элементах панели 1:
—— с учетом ε_Y; – – – без учета ε_Y

На рис. 3 показано изменение нормальных напряжений как по длине, так и по ширине панели; там же приведено распределение нормального усилия вдоль загруженной краевой балки. При построении графиков вдоль оси y необходимо учитывать, что задача решена для половины панели, для второй (нижней) половины функции, зависящие от y, необходимо продолжить через ось симметрично; единственными несимметричными функциями по y являются S и υ. Продольная сила в среднем сечении нагруженной краевой балки незначительна и составляет всего около 15 % от приложенной силы $2P$.

Отметим, что в поперечном направлении (по оси y) панель сжата (за исключением узкой зоны у края $x=0$) и это сжатие накладывается на основное напряженное состояние. Поэтому система должна иметь достаточный запас устойчивости. Кроме того, из-за больших градиентов касательных напряжений, что характерно для всех рассматриваемых здесь задач, может произойти потеря устойчивости от комбинации сжатия и сдвига. В какой мере повлияют дополнительные напряжения τ и σ_y на характеристики устойчивости панели, сказать трудно, так как эта задача требует отдельного рассмотрения. Однако можно сделать некоторые прикидки.

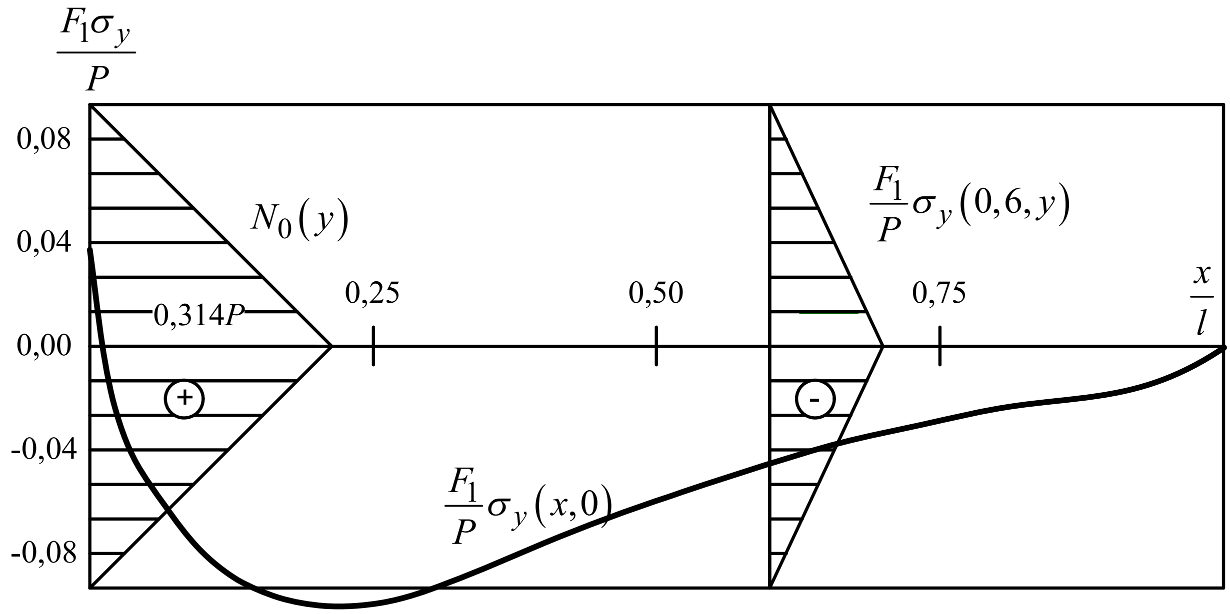

Рис. 3. Напряжение σ_y в обшивке и усилие N_0 в балке

Если принять, что $2F_1 = 2P/[\sigma]$, где, например $[\sigma]=\sigma_P$ – предел пропорциональности, то $max|\sigma_y| = |\sigma_y|_{y=o} = 0{,}12 \cdot \sigma_P$, т.е. максимальный уровень сжимающих σ_y напряжений, которые оказывают неблагоприятное воздействие на параметр устойчивости системы, составляет около 12% от напряжений предела пропорциональности. Для касательных напряжений этот уровень оказывается значительно выше: максимальные касательные напряжения у краевой зоны достигают примерно 31,5% напряжений предела пропорциональности, что в сочетании с предварительным напряженным состоянием может оказаться опасным.

Что же касается вопроса о дополнительном догружении имеющегося заклепочного шва вдоль y, при некотором $x=const$, то, как видно из графика для S

на рис. 1.2, шов не будет испытывать значительных напряжений, если он расположен при $x > 0,5$, т.е. – правее середины панели. Так, например, при $x > 0,6$ $\tau_{доп} \approx 8\% \sigma_P$.

Список литературы

1. Григолюк Э.И. Контактные задачи теории пластин и оболочек / Э.И. Григолюк, В.М. Толкачев – М.: Машиностроение, 1980. – 411 с.

2. Халилов С.А. Решение в прямоугольнике статической задачи теории упругости при заданных на границе напряжениях / С.А. Халилов // Вопросы проектирования самолетных конструкций: сб. науч.тр. ХАИ. – Вып 3. – 1982. – С. 120–127.

3. Халилов С.А. К определению плоского напряженного состояния прямоугольной стрингерной пластинки / С.А. Халилов, А.Г. Дибир // Вопросы оптимизации тонкостенных силовых конструкций летательных аппаратов: сб. науч. тр. ХАИ. – Вып 4. – 1983 – с. 76 – 80.

Рецензент: д. ф.-м. н., проф., зав. каф. А.Г. Николаев, Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского «ХАИ», г. Харьков.

Поступила в редакцию 29.05.09

Передача по напрямку польоту локального навантаження на панель крила. Модель першого рівня

Розроблено і повністю проаналізовано математичну модель задачі передачі локальних навантажень на прямокутну пластину, підкріплену ребрами жорсткості, розташованими як на межі, так і в області, яку займає пластинка. На підставі отриманих результатів подано рекомендації щодо проектування аналогічних конструкцій.

Ключові слова: панель крила, локальне навантаження, бортова балка, бімс, розподіл напружень.

Local Load Transfer to Wing Panel in Forward Direction. Level 1 Model

The mathematical model of the problem about transmission local loads on a rectangular plate, reinforced by the stiffening ribs located both on boundary, and in the area borrowed with a plate is developed and completely analysed. On the basis of the obtained outcomes recommendations for projection of analogous constructions are given.

Keywords: wing panel, local load, borne beam, beam, stress pattern.