

Доцент ВИНОКУРОВ Л. П.

ОБЪЯСНЕНИЕ КРИТИЧЕСКОЙ СКОРОСТИ ФЛАТТЕРА КРЫЛА

Введение

Под флаттером обычно понимают некоторый тип потери динамической устойчивости крыла (или хвостового оперения) в воздушном потоке. Эта потеря динамической устойчивости выражается в том, что при известной скорости полета крыло из состояния колебания с постоянной амплитудой переходит в состояние колебаний с нарастающей амплитудой, которое приводит к разрушению крыла.

Крыло вступает в состояние флаттера, когда возбуждающие силы превосходят силы демпфирующие. Последнее происходит при больших скоростях полета, поскольку силы возбуждающие пропорциональны квадрату скорости, а силы демпфирующие — пропорциональны первой степени скорости. Скорость, превзойдя которую крыло вступает в состояние флаттера, носит название критической скорости.

Мы будем решать часть задачи о колебаниях типа флаттер, относящуюся к определению вышеупомянутой критической скорости, не касаясь аэродинамической стороны задачи.

В этом отношении мы будем придерживаться гипотезы стационарности, и, следовательно, аэродинамические добавки к подъемной силе и крутящему моменту, которые вызываются колеблющимся крылом в воздушном потоке, мы будем брать таковыми, какими они являются в литературе, в частности в работе Е. П. Гроссмана „Флаттер“.

В данной статье дается решение задачи флаттер для свободно-несущего крыла с криволинейной, прямолинейной и ломаной осями жесткости и при наличии присоединенных сосредоточенных масс.

ГЛАВА I

Точное решение задачи флаттер

§ 1. Уравнение колебаний крыла в воздушном потоке

Аэродинамическая добавка dP к подъемной силе и аэродинамическая добавка dM_E к аэродинамическому крутящему моменту относительно центра жесткости, которые вызываются колеблющимся крылом в результате изменения углов атаки α в воздушном потоке, выражаются следующим образом:

$$dP = \frac{\partial c_y}{\partial \alpha} \rho v^2 \cdot t \left[\beta + \frac{t}{v} \left(\frac{3}{4} - \frac{x_0}{t} \right) \frac{\partial \beta}{\partial \tau} - \frac{1}{v} \cdot \frac{\partial y}{\partial \tau} \right] \quad (1)$$

$$dM_E = - \frac{\partial c_{mE}}{\partial \alpha} \rho v^2 \cdot t^2 \left[\beta + \frac{t}{v} \left(\frac{3}{4} - \frac{x_0}{t} - \frac{\pi}{16 \frac{\partial c_{mE}}{\partial \alpha}} \right) \cdot \frac{\partial \beta}{\partial \tau} - \frac{1}{v} \frac{\partial y}{\partial \tau} \right] \quad (2)$$

В уравнениях 1 и 2 приняты следующие обозначения:
 c_y — коэффициент подъемной силы;

$\rho \frac{\text{кг} \cdot \text{сек}^2}{\text{м}^4}$ — плотность воздуха;

$v \frac{\text{м}}{\text{сек}}$ — скорость полета;

t м — хорда крыла;

x_0 м — расстояние центра жесткости в рассматриваемом сечении от передней кромки крыла;

C_{mE} — коэффициент аэродинамического момента относительно оси жесткости.

Дифференциальные уравнения изгиба кольцевой балки (рис. 1) перпендикулярно плоскости ее кривизны и кручения той же балки представляются в следующем виде:

$$\beta \cdot r_s - \frac{d^2 y}{d\varphi^2} = \frac{M_x \cdot r_s^2}{EI_x} \quad (3)$$

$$\frac{d\beta}{d\varphi} \cdot r_s + \frac{dy}{d\varphi} = \frac{M_z \cdot r_s^2}{GI_{кр}} \quad (4)$$

В уравнениях 3 и 4 приняты следующие обозначения:

β — угол закручивания сечения;

y — вертикальное опускание точки на оси жесткости;

r_s и φ — радиальные координаты той же точки;

M_x и M_z — изгибающий и крутящий момент в рассматриваемом сечении;

EI_x и $GI_{кр}$ — жесткость на изгиб и кручение этого же сечения.

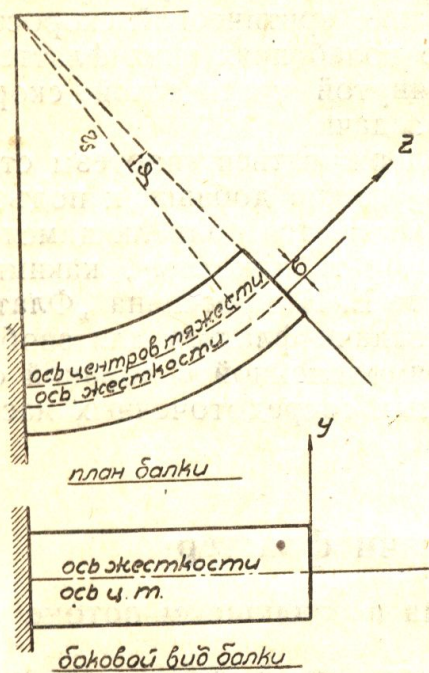


Рис. 1

Положительные направления осей и усилий (моментов M_x , M_z и перерезывающей силы Q) показаны на рис. 2. На этом рисунке представлен элемент балки длиной ds , если s — длина кривой оси балки.

При решении задач вибрации уравнения 3 и 4 заменяются уравнениями движения, составляемыми по принципу Д'Аламбера, как

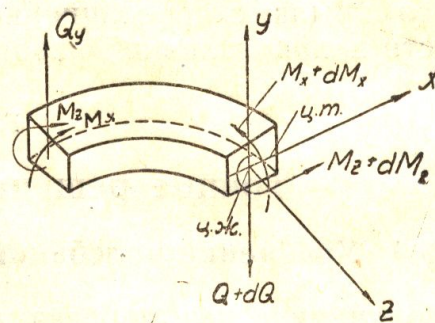


Рис. 2

уравнения динамического равновесия. Тогда уравнение 3 заменяется уравнением проекций на ось y сил упругости и инерционных сил, а уравнение 4 — уравнением моментов тех же сил относительно оси z .

Учитывая сказанное, мы уравнение 3 дифференцируем дважды по s , а уравнение 4 — один раз и находим:

$$\frac{d^2}{ds^2} (EI_x \cdot \beta) \cdot r_s - \frac{d^2}{ds^2} \left(EI_x \frac{d^2 y}{d\varphi^2} \right) = \frac{d^2 M_x}{ds^2} \cdot r_s \quad (5)$$

$$\frac{d}{ds} \left(GI_{кр} \cdot \frac{d\beta}{d\varphi} \right) \cdot r_s + \frac{d}{ds} \left(GI_{кр} \cdot \frac{dy}{d\varphi} \right) = \frac{dM_z}{ds} \cdot r_s \quad (6)$$

Из теории криволинейных балок известны следующие зависимости:

$$Q = \frac{dM_x}{ds} - \frac{M_z}{r_s} \quad (7)$$

$$\frac{dQ}{ds} = q, \quad (8)$$

где q — интенсивность нагрузки.

Подставив в равенство 8 выражение Q , согласно равенству 7, находим:

$$q = \frac{d^2M_x}{ds^2} - \frac{dM_z}{ds} \cdot \frac{1}{r_s} \quad (9)$$

Величину $\frac{dM_z}{ds}$ можно назвать интенсивностью крутящего момента, так как она представляет собой крутящий момент, приходящийся на единицу длины кривой оси балки.

Вводим обозначение $\frac{dM_z}{ds} = m_z$, тогда:

$$q = \frac{d^2M_x}{ds^2} - \frac{m_z}{r_s}, \quad (10)$$

откуда:

$$\frac{d^2M_x}{ds^2} = q + \frac{m_z}{r_s} \quad (11)$$

После этого уравнения 5 и 6 представляем в следующем виде (предварительно совершив замену $ds = r_s \cdot d\varphi$):

$$\frac{1}{r_s} \cdot \frac{d^2}{d\varphi^2} (EI_x \cdot \beta) - \frac{1}{r_s^2} \cdot \frac{d^2}{d\varphi^2} (EI_x \cdot \frac{d^2y}{d\varphi^2}) = (q + \frac{m_z}{r_s}) \cdot r_s^2 \quad (12)$$

$$\frac{d}{d\varphi} (GI_{кр} \cdot \frac{d\beta}{d\varphi}) + \frac{1}{r_s} \cdot \frac{d}{d\varphi} (GI_{кр} \cdot \frac{dy}{d\varphi}) = m_z \cdot r_s^2 \quad (13)$$

Для колеблющейся детали силы q и m_z являются инерционными силами, и если ось жесткости и ось центров тяжести не совпадают, то эти силы выражаются следующим образом:

$$q = m \frac{\partial^2 y}{\partial z^2} - m\sigma \frac{\partial^2 \beta}{\partial \tau^2} \quad (14)$$

$$m_z = I_m \cdot \frac{\partial^2 \beta}{\partial \tau^2} - m\sigma \frac{\partial^2 y}{\partial \tau^2} \quad (15)$$

В уравнениях 14 и 15 введены дополнительно следующие обозначения:

m — масса балки на единицу длины;

I_m — момент инерции той же массы относительно оси жесткости;

τ — время;

σ — расстояние между центром жесткости и центром тяжести (см. рис. 1).

Стало быть, уравнения изгибно-крутильных колебаний в пустоте криволинейной балки, очерченной по дуге круга, записываются в следующем виде:

$$-\frac{1}{r_s} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} (EI_x \cdot \beta) + \frac{1}{r_s^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} (EI_x \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial \varphi^2}) + \left[\left(m \frac{\partial^2 y}{\partial \tau^2} - m\sigma \frac{\partial^2 \beta}{\partial \tau^2} \right) + \right. \\ \left. + \left(I_m \cdot \frac{\partial^2 \beta}{\partial \tau^2} - m\sigma \frac{\partial^2 y}{\partial \tau^2} \right) \cdot \frac{1}{r_s} \right] \cdot r_s^2 = 0. \quad (16)$$

$$-\frac{\partial}{\partial \varphi} (GI_{кр} \cdot \frac{\partial \beta}{\partial \varphi}) - \frac{1}{r_s} \cdot \frac{\partial}{\partial \varphi} (GI_{кр} \cdot \frac{\partial y}{\partial \varphi}) + \left(I_m \cdot \frac{\partial^2 \beta}{\partial \tau^2} - m\sigma \frac{\partial^2 y}{\partial \tau^2} \right) \cdot r_s^2 = 0. \quad (17)$$

Для прямолинейной балки уравнения 16 и 17 заменяются нижеприводимыми уравнениями:

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} (EI_x \frac{\partial^2 y}{\partial z^2}) + m \frac{\partial^2 y}{\partial \tau^2} - m\sigma \frac{\partial^2 \beta}{\partial \tau^2} = 0 \quad (18)$$

$$- \frac{\partial}{\partial z} (GI_{кр} \cdot \frac{\partial \beta}{\partial z}) + I_m \cdot \frac{\partial^2 \beta}{\partial \tau^2} - m\sigma \frac{\partial^2 y}{\partial \tau^2} = 0. \quad (19)$$

Прибавив к правым частям уравнений 16, 17 и 18, 19 выражения 1 и 2¹, мы получаем следующие уравнения колебаний крыла с криволинейной и прямолинейной осью жесткости:

а) Крыло с криволинейной осью жесткости:

$$- \frac{1}{r_s} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} (EI_x \cdot \beta) + \frac{1}{r_s^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} (EI_x \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial \varphi^2}) + \left[\left(m \frac{\partial^2 y}{\partial \tau^2} - m\sigma \frac{\partial^2 \beta}{\partial \tau^2} \right) + \right. \\ \left. + \left(I_m \cdot \frac{\partial^2 \beta}{\partial \tau^2} - m\sigma \frac{\partial^2 y}{\partial \tau^2} \right) \frac{1}{r_s} \right] \cdot r_s^2 - \frac{\partial c_y}{\partial \alpha} \cdot \rho v^2 t \left[\beta + \frac{t}{v} \left(\frac{3}{4} - \frac{x_0}{t} \right) \cdot \frac{\partial \beta}{\partial \tau} - \frac{1}{v} \frac{\partial y}{\partial \tau} \right] = 0. \quad (20)$$

$$- \frac{\partial}{\partial \varphi} (GI_{кр} \cdot \frac{\partial \beta}{\partial \varphi}) - \frac{1}{r_s} \cdot \frac{\partial}{\partial \varphi} (GI_{кр} \cdot \frac{\partial y}{\partial \varphi}) + \left(I_m \cdot \frac{\partial^2 \beta}{\partial \tau^2} - m\sigma \frac{\partial^2 y}{\partial \tau^2} \right) \cdot r_s^2 - \\ - \frac{\partial c_{mE}}{\partial \alpha} \cdot \rho v^2 t^2 \left[\beta + \frac{t}{v} \left(\frac{3}{4} - \frac{x_0}{t} - \frac{\pi}{16} \frac{\partial c_{mE}}{\partial \alpha} \right) \cdot \frac{\partial \beta}{\partial \tau} - \frac{1}{v} \frac{\partial y}{\partial \tau} \right] = 0. \quad (21)$$

б) Крыло с прямолинейной осью жесткости:

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} (EI_x \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial z^2}) + m \frac{\partial^2 y}{\partial \tau^2} - m\sigma \frac{\partial^2 \beta}{\partial \tau^2} - \\ - \frac{\partial c_y}{\partial \alpha} \rho v^2 t \left[\beta + \frac{t}{v} \left(\frac{3}{4} - \frac{x_0}{t} \right) \frac{\partial \beta}{\partial \tau} - \frac{1}{v} \frac{\partial y}{\partial \tau} \right] = 0. \quad (22)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} (GI_{кр} \cdot \frac{\partial \beta}{\partial z}) + I_m \cdot \frac{\partial^2 \beta}{\partial \tau^2} - m\sigma \frac{\partial^2 y}{\partial \tau^2} - \\ - \frac{\partial c_{mE}}{\partial \alpha} \cdot \rho \cdot v^2 t^2 \left[\beta + \frac{t}{v} \left(\frac{3}{4} - \frac{x_0}{t} - \frac{\pi}{16} \frac{\partial c_{mE}}{\partial \alpha} \right) \cdot \frac{\partial \beta}{\partial \tau} - \frac{1}{v} \frac{\partial y}{\partial \tau} \right] = 0. \quad (23)$$

Если жесткости и массы постоянные, то уравнения 20, 21, 22, 23 заменяются нижеприводимыми уравнениями:

а) крыло с криволинейной осью жесткости:

$$\frac{\partial^2 \beta}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r_s} \frac{\partial^4 y}{\partial \varphi^4} + \left[\left(m \frac{\partial^2 y}{\partial \tau^2} - m\sigma \frac{\partial^2 \beta}{\partial \tau^2} \right) + \left(I_m \cdot \frac{\partial^2 \beta}{\partial \tau^2} - m\sigma \frac{\partial^2 y}{\partial \tau^2} \right) \frac{1}{r_s} \right] \cdot \frac{r_s^3}{EI_x} - \\ - \frac{\partial c_y}{\partial \alpha} \cdot \frac{\rho v^2 t}{EI_x} r_s \left[\beta + \frac{t}{v} \left(\frac{3}{4} - \frac{x_0}{t} \right) \frac{\partial \beta}{\partial \tau} - \frac{1}{v} \cdot \frac{\partial y}{\partial \tau} \right] = 0. \quad (24)$$

$$- \frac{\partial^2 \beta}{\partial \varphi^2} - \frac{1}{r_s} \frac{\partial^2 y}{\partial \varphi^2} + \left(I_m \cdot \frac{\partial^2 \beta}{\partial \tau^2} - m\sigma \frac{\partial^2 y}{\partial \tau^2} \right) \frac{r_s^2}{GI_{кр}} - \\ - \frac{\partial c_{mE}}{\partial \alpha} \cdot \rho v^2 \frac{t^2}{GI_{кр}} \cdot \left[\beta + \frac{t}{v} \left(\frac{3}{4} - \frac{x_0}{t} - \frac{\pi}{16} \frac{\partial c_{mE}}{\partial \alpha} \right) \cdot \frac{\partial \beta}{\partial \tau} - \frac{1}{v} \cdot \frac{\partial y}{\partial \tau} \right] = 0. \quad (25)$$

¹ Мы полагаем, что аэродинамическое воздействие на крыло с криволинейной осью жесткости сохраняется таким же, как и на крыло с прямолинейной осью жесткости, что возможно, если искривление оси жесткости вызывается не искривлением крыла в плане.

б) Крыло с прямолинейной осью жесткости:

$$\frac{\partial^4 y}{\partial z^4} + \left(m \frac{\partial^2 y}{\partial \tau^2} - m \sigma \frac{\partial^2 \beta}{\partial \tau^2} \right) \frac{1}{EI_x} - \frac{\partial c_y}{\partial x} \cdot \rho v^2 \frac{t}{GI_{кр}} \left[\beta + \frac{t}{v} \left(\frac{3}{4} - \frac{x_0}{t} \right) \cdot \frac{\partial \beta}{\partial \tau} - \frac{1}{v} \frac{\partial y}{\partial \tau} \right] = 0 \quad (26)$$

$$\frac{\partial^2 \beta}{\partial z^2} + \left(I_m \frac{\partial^2 \beta}{\partial \tau^2} - m \sigma \frac{\partial^2 y}{\partial \tau^2} \right) \cdot \frac{1}{GI_{кр}} - \frac{\partial c_{mE}}{\partial \alpha} \rho v^2 \frac{t^2}{GI_{кр}} \left[\beta + \frac{t}{v} \left(\frac{3}{4} - \frac{x_0}{t} - \frac{\pi}{16} \frac{\partial c_{mE}}{\partial \alpha} \right) \cdot \frac{\partial \beta}{\partial \tau} - \frac{1}{v} \frac{\partial y}{\partial \tau} \right] = 0. \quad (27)$$

§ 2. Решение уравнений колебания крыла

Свободно-несущее крыло в расчете на колебания так же, как и в расчете на прочность принимается за консольную балку. Ось жесткости этой балки представляет собой либо прямую линию, либо кривую линию, либо ломаную линию. Поэтому мы ниже рассмотрим в отдельности крыло с прямолинейной, криволинейной и ломаной осью жесткости.

А. Крыло с прямолинейной осью жесткости

Предполагая, что масса и жесткости крыла постоянны, мы применяем уравнения движения 26, 27. Решение этих уравнений в случае обращения v в $v_{кр}$, т. е. при наступлении флаттера, — мы ищем в следующем виде:

$$\beta = \Theta_{(z)} \cdot e^{ip\tau} \quad (28)$$

$$y = f_{(z)} \cdot e^{ip\tau}. \quad (29)$$

Подставив в уравнение 26, 27 выражения 28 и 29 взамен β и y , мы получаем следующие уравнения относительно $\Theta_{(z)}$ и $f_{(z)}$:

$$f^{IV} - \lambda_1 \cdot f - \lambda_2 \cdot \Theta = 0. \quad (30)$$

$$\Theta'' - \lambda_3 \cdot f - \lambda_4 \cdot \Theta = 0, \quad (31)$$

где

$$\lambda_1 = \frac{m}{EI_x} p^2 - \frac{\partial c_y}{\partial x} \rho \frac{t}{EI_x} ipv_{кр}.$$

$$\lambda_2 = -\frac{m}{EI_x} \sigma p^2 + \frac{\partial c_y}{\partial x} \rho v_{кр} \cdot \frac{t}{EI_x} + \frac{\partial c_y}{\partial x} \rho \frac{t^2}{EI_x} \left(\frac{3}{4} - \frac{x_0}{t} \right) ipv_{кр}.$$

$$\lambda_3 = \frac{m}{GI_{кр}} \sigma p^2 + \frac{\partial c_{mE}}{\partial x} \rho \frac{t^2}{GI_{кр}} ipv_{кр}.$$

$$-\lambda_4 = \frac{I_m}{GI_{кр}} p^2 + \frac{\partial c_{mE}}{\partial x} \rho \frac{t^2}{GI_{кр}} \cdot v_{кр}^2 + \frac{\partial c_{mE}}{\partial x} \rho \frac{t^3}{GI_{кр}} \left(\frac{3}{4} - \frac{x_0}{t} - \frac{\pi}{16} \frac{\partial c_{mE}}{\partial x} \right) ipv_{кр}.$$

Применяя подстановку Эйлера:

$$\left. \begin{aligned} \Theta &= A \cdot e^{sz} \\ f &= B \cdot e^{sz} \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

мы из уравнений 30, 31 получаем следующие уравнения относительно коэффициентов A и B :

$$-\lambda_2 \cdot A + (s^4 - \lambda_1) \cdot B = 0 \quad (33)$$

$$(s^2 - \lambda_3) \cdot A - \lambda_4 \cdot B = 0. \quad (34)$$

Из условия равенства нулю детерминанта уравнений 33 и 34 мы составляем следующее характеристическое уравнение относительно s :

$$s^6 - \lambda_1 \cdot s^2 - \lambda_4 \cdot s^4 + (\lambda_1 \lambda_4 + \lambda_2 \cdot \lambda_3) = 0. \quad (35)$$

Подстановкой $s^2 = u$ уравнение 35 обращается в кубическое уравнение относительно u .

Приняв $A = 1$, мы из уравнения 33 (или из уравнения 34) определяем коэффициент B :

$$B = \frac{\lambda_2}{s^4 - \lambda_1} \quad (36)$$

В результате определения значений s (из решения уравнения 35) и коэффициента B (применением формулы 36), мы получаем следующие выражения для функций f и Θ :

$$\Theta = c_1 \cdot e^{s_1 z} + c_2 \cdot e^{s_2 z} + c_3 \cdot e^{s_3 z} + c_4 \cdot e^{s_4 z} + c_5 \cdot e^{s_5 z} + c_6 \cdot e^{s_6 z} \quad (37)$$

$$f = B_1 \cdot c_1 e^{s_1 z} + B_2 c_2 e^{s_2 z} + B_3 c_3 \cdot e^{s_3 z} + B_4 c_4 e^{s_4 z} + B_5 \cdot c_5 e^{s_5 z} + B_6 c_6 e^{s_6 z}. \quad (38)$$

При применении преобразований, обращающих e^{sz} в тригонометрические и гиперболические функции, функции Θ и f обращаются в гиперболо-тригонометрические функции.

Постоянные интегрирования $c_1, c_2 \dots c_6$ в этих функциях мы определяем из шести начальных условий, т. е. из условий в сечении $z=0$, которое мы полагаем на свободном конце крыла.

Эти шесть начальных условий заключаются в следующем:

$$\left. \begin{array}{l} 1. f = f_0 \\ 2. f' = f'_0 \\ 3. f'' = f''_0 = \frac{M_x^0}{EI_x^0} \\ 4. f''' = f'''_0 = \frac{Q_0}{EI_x^0} \\ 5. \Theta = \Theta_0 \\ 6. \Theta' = \Theta'_0 = \frac{M_z^0}{GI_{кр}^0} \end{array} \right\} \quad (39)$$

Решив уравнения, вытекающие из условий 39, мы получаем выражения $c_1, c_2 \dots c_6$ в следующем виде:

$$\left. \begin{array}{l} c_1 = a_{11} \cdot \Theta_0 + a_{12} \cdot \frac{M_z^0}{GI_{кр}^0} + a_{13} \cdot f_0 + a_{14} \cdot f'_0 + a_{15} \cdot \frac{M_x^0}{EI_x^0} + a_{16} \cdot \frac{Q_0}{EI_x^0} \\ c_2 = a_{21} \cdot \Theta_0 + a_{22} \cdot \frac{M_z^0}{GI_{кр}^0} + a_{23} \cdot f_0 + a_{24} \cdot f'_0 + a_{25} \cdot \frac{M_x^0}{EI_x^0} + a_{26} \cdot \frac{Q_0}{EI_x^0} \\ \dots \\ c_6 = a_{61} \cdot \Theta_0 + a_{62} \cdot \frac{M_z^0}{GI_{кр}^0} + a_{63} \cdot f_0 + a_{64} \cdot f'_0 + a_{65} \cdot \frac{M_x^0}{EI_x^0} + a_{66} \cdot \frac{Q_0}{EI_x^0} \end{array} \right\} \quad (40)$$

Коэффициенты a_{nm} определяются в результате решения уравнений, вытекающих из условий 39.

Подставив значения c_n в функции, полученные из функций 37 и 38 после обращения e^{sz} в тригонометрические и гиперболические функции, и выполнив группировку членов, содержащих одинаковые начальные параметры, мы получаем выражения для Θ и f в следующей форме:

$$\Theta = \Theta_0 \cdot R_{11} + \frac{M_z^0}{GI_{кр}^0} \cdot R_{12} + f_0 \cdot R_{13} + f'_0 \cdot R_{14} + \frac{M_x^0}{EI_x^0} \cdot R_{15} + \frac{Q_0}{EI_x^0} R_{16} \quad (41)$$

$$f = \Theta_0 \cdot R_{21} + \frac{M_z^0}{GI_{кр}^0} \cdot R_{22} + f_0 \cdot R_{23} + f'_0 \cdot R_{24} + \frac{M_x^0}{EI_x^0} \cdot R_{25} + \frac{Q_0}{EI_x^0} \cdot R_{26} \quad (42)$$

Множители R_{1n} и R_{2n} следует рассматривать как функциональные плечи.

С помощью этих функциональных плеч познается влияние соответствующего параметра на рассматриваемое сечение. Если параметр находится не в сечении $z=0$, а, например, в сечении $z=c$, то такой параметр следует умножать на плечо R , в котором координата z заменена на координату $z-c$.

Такой способ познания влияния параметра на рассматриваемое сечение дает возможность сравнительно просто, не прибегая к условиям сопряжения, составлять функции Θ и f на участках между точками приложения сосредоточенных масс (или вообще сосредоточенных параметров).

В функциях 41 и 42 содержится шесть начальных параметров. Три из этих параметров известны, а для определения остальных трех составляются уравнения, вытекающие из условий в закрепленном сечении крыла, т. е. при $z=l$:

$$\left. \begin{aligned} \Theta_l &= 0 \\ f_l &= 0 \\ f'_l &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (43)$$

Уравнения, вытекающие из условий 43, представляют собой систему трех однородных уравнений относительно трех начальных параметров.

Из того, что детерминант этих трех уравнений равен нулю и что, следовательно, в отдельности равны нулю мнимая и действительная часть этого детерминанта, мы получаем два уравнения относительно частоты p и критической скорости флаттера $v_{кр}$.

Изложенное относительно определения p и $v_{кр}$ может быть выполнено после того, как будут выявлены функции Θ и f , что, в свою очередь, предполагает решение уравнения 35. Последнее же может быть решено, если известны коэффициенты λ .

Так как эти коэффициенты содержат неизвестные величины p и $v_{кр}$, то для решения задачи приходится применить метод последовательных попыток, который в данном случае заключается в следующем: первоначально задаемся значениями p и $v_{кр}$ (заимствуя их, например, из какого-либо приближенного решения задачи); на основе этих значений вычисляем коэффициенты λ . После чего доходим последовательно до вычисления детерминанта уравнений, вытекающих из условий 43 и, в частности, до вычисления действительной части D_1 этого детерминанта и мнимой его части D_2 .

Повторив указанные вычисления для последовательно применяемых первоначальных значений p и $v_{кр}$, мы в результате найдем то значение p и $v_{кр}$, при котором $D_1=0$ и $D_2=0$.

Б. Крыло с криволинейной осью жесткости

Определение критической скорости $v_{кр}$ флаттера для крыла с криволинейной осью жесткости протекает так же, как и для крыла с прямолинейной осью жесткости с тем, однако, отличием, что взамен уравнений 26 и 27 следует пользоваться уравнениями 24 и 25, полагая, что жесткости и массы крыла постоянны.

Функции β и y ищем в форме:

$$\beta = \Theta_{(\varphi)} \cdot e^{ip\tau} \quad (44)$$

$$y = f_{(\varphi)} \cdot e^{ip\tau} \quad (45)$$

При подстановке выражений 44 и 45 взамен β и u в уравнения 24 и 25, последние обращаются в следующие дифференциальные уравнения относительно $\Theta(\varphi)$ и $f(\varphi)$:

$$-\Theta'' + \frac{1}{r_s} \cdot f^{IV} - \psi_1 \cdot f - \psi_2 \cdot \Theta = 0 \quad (46)$$

$$\Theta'' + \frac{1}{r_s} \cdot f'' - \psi_3 \cdot f - \psi_4 \cdot \Theta = 0, \quad (47)$$

где

$$\begin{aligned} \psi_1 &= - \left[-\frac{mr_s^3}{EI_x} \cdot p^2 + \frac{mr_s^2}{EI_x} \sigma p^2 + \frac{\partial c_y}{\partial \alpha} \rho \frac{tr_s}{EI_x} ip v_{кр} \right] \\ \psi_3 &= \frac{mr_s^2}{GI_{кр}} \sigma p^2 + \frac{\partial c_{mE}}{\partial \alpha} \rho \frac{t^2}{GI_{кр}} \cdot v_{кр}^2 \left[1 + \frac{t}{v_{кр}} \left(\frac{3}{4} - \frac{x_0}{t} - \frac{\pi}{16} \frac{\partial c_{mE}}{\partial \alpha} \right) ip \right] \\ \psi_4 &= - \left\{ \frac{Imr_s^2}{GI_{кр}} \cdot p^2 + \frac{\partial c_{mE}}{\partial \alpha} \rho \frac{t^2}{GI_{кр}} v_{кр}^2 \left[1 + \frac{t}{v_{кр}} \left(\frac{3}{4} - \frac{x_0}{t} - \frac{\pi}{16} \frac{\partial c_{mE}}{\partial \alpha} \right) ip \right] \right\} \\ \psi_2 &= - \left\{ \frac{mr_s^2}{EI_x} \sigma p^2 - \frac{Imr_s^3}{EI_x} \cdot p^2 - \frac{\partial c_y}{\partial \alpha} \rho \frac{tr_s}{EI_x} \cdot v_{кр}^2 \left[1 + \frac{t}{v_{кр}} \left(\frac{3}{4} - \frac{x_0}{t} \right) ip \right] \right\}. \end{aligned}$$

При применении подстановки Эйлера:

$$\Theta = A \cdot e^{s\varphi} \quad (48)$$

$$f = B \cdot e^{s\varphi} \quad (49)$$

уравнения 46 и 47 обращаются в следующие уравнения относительно коэффициентов A и B :

$$-A(s^2 + \psi_2) + B\left(\frac{s^4}{r_s} - \psi_1\right) = 0 \quad (50)$$

$$A(s^2 - \psi_4) + B\left(\frac{s^2}{r_s} - \psi_3\right) = 0 \quad (51)$$

Из условия, что детерминант однородных уравнений 50 и 51 равен нулю, мы получаем следующее уравнение относительно s :

$$-\frac{s^6}{r_s} + s^4 \frac{\psi_4 - 1}{r_s} + s^2 \left(\psi_3 + \psi_1 - \frac{\psi_2}{r_s} \right) + (\psi_2 \cdot \psi_3 - \psi_1 \cdot \psi_4) = 0 \quad (52)$$

Подстановкой $s^2 = u$ уравнение 52 обращается в кубическое уравнение относительно u .

Полагая $A = 1$, из уравнения 50 находим:

$$B = \frac{s^2 + \psi_2}{\frac{s^4}{r_s} - \psi_1}. \quad (53)$$

Когда вычислены значения s и B , могут быть составлены функции Θ и f , выраженные через начальные параметры, а затем может быть повторено все то решение, которое было выше изложено для крыла с прямолинейной осью жесткости.

В. Крыло с ломаной осью жесткости (см. рис. 3)

Для каждого участка крыла мы назначаем свою систему координат так, что ось z совпадает с осью участка, ось x перпендикулярна к оси z и находится в горизонтальной плоскости; ось y направляем вертикально. Начало координат помещаем в начале участка, т.е. в вершинах ломаной оси жесткости. Счет участкам ведем от свободного конца крыла.

В первом участке функции f_1 и Θ_1 определяются так, как они определяются для крыла с прямолинейной осью жесткости. С помощью функций f_1 и Θ_1 вычисляем параметры $f_{2,1}$, $f'_{2,1}$, $\frac{M_z^{2,1}}{GI_{кр,1}}$, $\frac{M_x^{2,1}}{EI_{x,1}}$, $\frac{Q_{2,1}}{EI_{x,1}}$, $\Theta_{2,1}$ в точке 2 в конце первого участка, являющегося одновременно началом второго участка. Параметры $\Theta_{2,1}$, $M_z^{2,1}$, $f'_{2,1}$, $M_x^{2,1}$ разлагаем на составляющие (применением векторного изображения для этих параметров) в координатных плоскостях второго участка. Таким образом определяются начальные параметры для второго участка. После этого составляются функции f и Θ для второго участка и т. д.

Используя функции f и Θ последнего участка, содержащего закрепленное сечение крыла, мы на основе условий 43 составляем три однородных уравнения относительно трех начальных параметров.

Из условия равенства нулю действительной и мнимой части детерминанта этих уравнений мы получаем два уравнения относительно p и $v_{кр}$. Но поскольку мы наперед задаемся значениями p и $v_{кр}$, то мы лишь проверяем обращение в нуль вышеупомянутых действительной и мнимой части детерминанта.

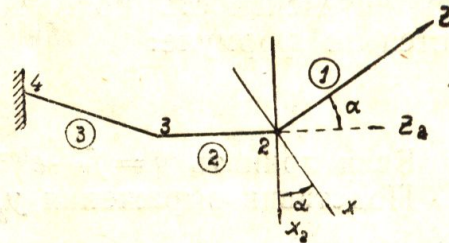


Рис. 3

§ 3. Крыло переменной массы и жесткости

Крыло, имеющее переменную жесткость и массу, мы разбиваем на ряд отсеков, каждый из которых имеет некоторую осередненную постоянную жесткость и массу:

Счет отсеков ведем от свободного конца крыла. Функции f_1 и Θ_1 для первого отсека составляем как для крыла постоянной жесткости и массы.

Пользуясь функциями f_1 и Θ_1 , вычисляем начальные параметры для второго отсека и составляем функции Θ_2 и f_2 для второго отсека и т. д.

После того как определены функции Θ_n и f_n для последнего отсека, содержащего закрепленное сечение крыла, мы приступаем к определению действительной и мнимой части детерминанта трех однородных уравнений, вытекающих из концевых условий 43. Если наперед принятые значения p и $v_{кр}$ соответствуют действительным значениям p и $v_{кр}$, то вышеупомянутые действительная и мнимая часть детерминанта должны быть равны нулю.

ГЛАВА II

Приближенные методы решения задачи флаттер

§ 4. Решение графоаналитическим методом

Мы это решение рассмотрим в отдельности для случая изгибных, крутильных и совместных колебаний балки и крыла, имеющих прямолинейную ось жесткости.

А. Изгибные колебания.

Из теории изгиба балок известны следующие дифференциальные уравнения:

$$\frac{d^2 y}{dz^2} = \frac{\bar{M}_x}{EI_x} \quad (54)$$

$$\frac{d^2 M_x}{dz^2} = -q. \quad (55)$$

Для балки, испытывающей колебания изгиба, интенсивность q есть интенсивность поперечных инерционных сил, которая определяется по формуле:

$$q = m \frac{\partial^2 y}{\partial \tau^2}.$$

Если принять $y = f(z) \cdot e^{ip\tau}$, то $q = -mp^2 f(z) \cdot e^{ip\tau}$, а $\bar{M}_x = M_x \cdot e^{ip\tau}$. Подставив выражения y , M_x и q в уравнения 54, 55, находим:

$$\frac{d^2 f(z)}{dz^2} = \frac{M_x}{EI_x} \quad (56)$$

$$\frac{d^2 M_x}{dz^2} = mp^2 f(z). \quad (57)$$

Уравнения 56, 57 мы кладем в основу решения задачи об изгибных колебаниях.

Уравнение частоты мы находим по следующему плану.

1. Определение прогибов f балки

Мы полагаем, что нагрузка на балку изображается приведенной моментной кривой $\frac{M_x}{EI_x}$.

В отличие от статического расчета балок в рассматриваемом случае моментная кривая является неизвестной кривой. Поэтому мы

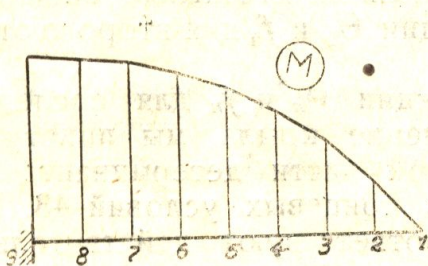


Рис. 4

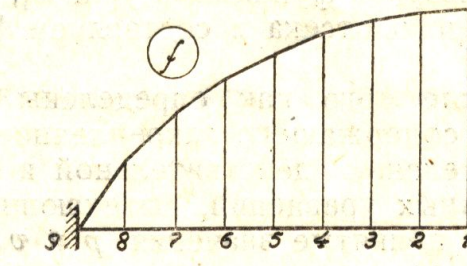


Рис. 5

разбиваем балку на ряд участков, и неизвестную моментную кривую заменяем схематично ломаной линией (см., например, рис. 4). После этого, пользуясь правилом, известным в графоаналитическом методе¹ (т. е. в методе Мора), находим прогибы в точках 1, 2, 3 и т. д. (см. рис. 5), за исключением точки 9, в которой $f_9 = 0$.

Таким образом прогибы $f_1, f_2, f_3 \dots$ будут выражены через приведенные моменты

$$\frac{M_{x,2}}{EI_{x,2}}, \frac{M_{x,3}}{EI_{x,3}}, \frac{M_{x,4}}{EI_{x,4}} \dots \quad (M_{x,1} = 0).$$

¹ При вычислении моментов от приведенной моментной площади необходимо идти от заделанного конца консольной балки к ее свободному концу.

2. Составление уравнений для определения моментов M_x в отдельных точках балки и составление уравнения частоты

Для определения моментов $M_{x,2}, M_{x,3}, M_{x,4} \dots$ мы воспользуемся уравнением 57. Это уравнение во всем похоже на уравнение 56. В нем роль $f_{(z)}$ играет M_x , а роль $\frac{M_x}{EI_x}$ играет $mp^2 f_{(z)}$.

Поэтому для определения M_x так же, как и для определения f , мы применяем графоаналитический метод¹. При этом нагрузка на балку изображается кривой $mp^2 f$, которая заменяется нами схематично ломаной линией, построенной на ординатах $m_1 f_1 p^2, m_2 f_2 p^2$ и т. д. (см. рис. 5).

Так как ординаты f_1, f_2 и т. д. в результате решения, изложенного в пункте 1, выражены через $M_{x,2}, M_{x,3}$ и т. д., то при вычислении M_x в отдельных точках мы получим систему однородных уравнений относительно $M_{x,2}, M_{x,3}$ и т. д.

Из условия, что детерминант этих уравнений равен нулю, мы составим уравнение относительно частоты колебаний.

Б. Крутильные колебания

В основу крутильных колебаний мы кладем следующие два уравнения:

$$GI_{кр} \cdot \frac{\partial^2 \beta}{\partial z^2} = \overline{M}_z \quad (58)$$

$$\frac{\partial \overline{M}_z}{\partial z} = m_z,$$

где

m_z — интенсивность крутящего момента, которая в случае инерционных сил определяется по формуле:

$$m_z = I_m \cdot \frac{\partial^2 \beta}{\partial z^2} *.$$

Следовательно:

$$\frac{\partial \overline{M}_z}{\partial z} = I_m \cdot \frac{\partial^2 \beta}{\partial z^2} \cdot \dots \quad (59)$$

Применяя подстановки $\beta = \Theta_{(z)} \cdot e^{ip\tau}$

$$\overline{M}_z = M_z \cdot e^{ip\tau},$$

мы уравнения 58 и 59 обращаем в следующие уравнения:

$$GI_{кр} \cdot \frac{d\Theta_{(z)}}{dz} = M_z \quad (60)$$

$$\frac{dM_z}{dz} = - I_m \cdot \Theta_{(z)} \cdot p^2. \quad (61)$$

Применение графоаналитического метода заключается в последовательном вычислении углов закручивания $\Theta_{(z)}$ и моментов M_z для отдельных точек колеблющейся балки.

Вычисление углов закручивания производится в предположении, что нагрузка на балку изображается ломаной линией, построенной

¹ При вычислении моментов необходимо идти от свободного конца балки к заделанному.

* Мы будем полагать эту формулу применимой и в случае переменного массового момента инерции I_m .

на ординатах $\frac{M_z}{GI_{кр}}$ (что согласуется с уравнением 60). При этом углы закручивания определяются как площади эпюры $\frac{M_z}{GI_{кр}}$, расположенные между заделанным сечением и рассматриваемым сечением балки.

Таким образом углы закручивания выражаются через $M_{z,1}$ (если $M_{z,1} \neq 0$), $M_{z,2}$ и т. д.

После этого приступаем к графоаналитическому решению уравнения 61.

Это решение заключается в том, что мы находим значения $M_{z,2}$, $M_{z,3}$ и т. д., как площади, ограниченные ломаной линией $I_m \cdot \Theta_{(z)} p^2$ (построенной на ординатах $I_{m1} \cdot \Theta_{z,1} \cdot p^2$, $I_{m2} \cdot \Theta_{z,2} \cdot p^2$ и т. д.) и осью балки. При этом берутся указанные площади, заключенные между свободным и рассматриваемым сечением балки. Поскольку ординаты $\Theta_{z,1}$, $\Theta_{z,2}$ и т. д. выражены через $M_{z,2}$, $M_{z,3}$ и т. д., то при вычислении $M_{z,1}$, $M_{z,2}$ и т. д. мы получаем систему однородных уравнений.

Из условия, что детерминант этих уравнений равен нулю, мы получаем уравнение относительно частоты колебаний.

В. Изгибно-крутильные колебания в пустоте

В основу изгибно-крутильных колебаний мы кладем следующие четыре дифференциальных уравнения:

$$EI_x \frac{d^2 y}{dz^2} = \bar{M}_x \quad (62)$$

$$\frac{d^2 \bar{M}_x}{dz^2} = - \left(m \frac{\partial^2 y}{\partial \tau^2} - m \sigma \frac{\partial^2 \beta}{\partial \tau^2} \right) \quad (63)$$

$$GI_{кр} \cdot \frac{\partial \beta}{\partial z} = \bar{M}_z \quad (64)$$

$$\frac{\partial \bar{M}_z}{\partial z} = I_m \cdot \frac{\partial^2 \beta}{\partial \tau^2} - m \sigma \frac{\partial^2 y}{\partial \tau^2} \quad (65)$$

Уравнения 62 и 63 отображают изгибные колебания, а уравнения 64 и 65 отображают крутильные колебания. Применяв подстановки $y = f_{(z)} \cdot e^{ip\tau}$, $\beta = \Theta_{(z)} \cdot e^{ip\tau}$, $\bar{M}_x = M_x \cdot e^{ip\tau}$, $\bar{M}_z = M_z \cdot e^{ip\tau}$ мы уравнения 62, 63, 64, 65 обращаем в следующие уравнения:

$$EI_x \frac{d^2 f_{(z)}}{dz^2} = M_x \quad (66)$$

$$\frac{d^2 M_x}{dz^2} = -mp^2 (-f_{(z)} + \sigma \Theta_{(z)}) \quad (67)$$

$$GI_{кр} \frac{d\Theta_{(z)}}{dz} = M_z \quad (68)$$

$$\frac{dM_z}{dz} = p^2 (-I_m \cdot \Theta_{(z)} + m\sigma f_{(z)}) \quad (69)$$

Уравнения 66 и 67 мы решаем графоаналитическим методом во всем подобно решению чисто изгибных колебаний.

Но в отличие от последних мы в рассматриваемом случае получим относительно M_x не систему однородных уравнений, а систему уравнений, в правых частях которых будут находиться выражения, зависящие от $\Theta_{z,1}$, $\Theta_{z,2}$ и т. д.

Уравнения 68 и 69 мы решаем графоаналитическим методом — во всем подобно решению чисто-крутильных колебаний. Но в отличие от последних мы в рассматриваемом случае получим относительно M_z не систему однородных уравнений, а систему уравнений, в правых частях которых будут содержаться выражения, завися-

щие от $M_{x,2}$, $M_{x,3}$ и т. д. (после замены $f_{z,1}$, $f_{z,2}$ и т. д. значениями, полученными из решения уравнения 66). Заменяя в системе уравнений, соответствующих решению уравнений 66 и 67, функции $\Theta_{z,1}$, $\Theta_{z,2}$ и т. д. их выражениями через $M_{z,2}$, $M_{z,3}$ и т. д., мы получим систему уравнений относительно $M_{x,2}$, $M_{x,3}$ и т. д. и $M_{z,2}$, $M_{z,3}$ и т. д.

Присоединив эту систему уравнений к системе уравнений, полученных из решения уравнений 68 и 69 и являющихся также уравнениями относительно $M_{x,2}$, $M_{x,3}$ и т. д. и $M_{z,2}$, $M_{z,3}$ и т. д., мы получим в результате одну однородную систему уравнений.

Из условия равенства нулю детерминанта этих уравнений мы составим уравнение относительно частоты колебаний.

Г. Изгибно-крутильные колебания крыла в воздушном потоке

Для крыла, колеблющегося в воздушном потоке, интенсивность поперечной нагрузки и интенсивность крутящих моментов определяются соответственно по нижеприводимым формулам:

$$q = \left(m \frac{\partial^2 y}{\partial \tau^2} - m \sigma \frac{\partial^2 \beta}{\partial \tau^2} \right) - \frac{\partial c_y}{\partial \alpha} \rho v^2 t \left[\beta + \frac{t}{v} \left(\frac{3}{4} - \frac{x_0}{t} \right) \frac{\partial \beta}{\partial \tau} - \frac{1}{v} \frac{\partial y}{\partial \tau} \right]$$

$$m_z = \left(I_m \frac{\partial^2 \beta}{\partial \tau^2} - m \sigma \frac{\partial^2 y}{\partial \tau^2} \right) - \frac{\partial c_{mE}}{\partial \alpha} \cdot \rho v^2 t^2 \left[\beta + \frac{t}{v} \left(\frac{3}{4} - \frac{x_0}{t} - \frac{\pi}{16} \frac{\partial c_{mE}}{\partial \alpha} \right) \cdot \frac{\partial \beta}{\partial \tau} - \frac{1}{v} \frac{\partial y}{\partial \tau} \right]$$

Если для y , β , M_x , M_z применить те же подстановки, что и в изгибно-крутильных колебаниях, и v заменить на $v_{кр}$, то сохранятся уравнения 66 и 68, а уравнения 67 и 69 заменятся соответственно нижеприводимыми уравнениями:

$$\frac{d^2 M_x}{dz^2} = -m p^2 (-f_z + \sigma \Theta_z) - \frac{\partial c_y}{\partial \alpha} \cdot \rho \cdot v_{кр}^2 t \left[\Theta_z + \frac{t}{v_{кр}} \left(\frac{3}{4} - \frac{x_0}{t} \right) \cdot i p - f_z \cdot i p \right] \quad (70)$$

$$\frac{dM_z}{dz} = p^2 (-I_m \cdot \Theta_z + m \sigma f_z) - \frac{\partial c_{mE}}{\partial \alpha} \cdot \rho t^2 \left[\Theta_z \cdot v_{кр}^2 + \Theta_z \cdot t \left(\frac{3}{4} - \frac{x_0}{t} - \frac{\pi}{16} \frac{\partial c_{mE}}{\partial \alpha} \right) i p v_{кр} - f_z \cdot i p v_{кр} \right]. \quad (71)$$

Во всем остальном решение протекает подобно решению изгибно-крутильных колебаний с тем, однако, отличием, что в детерминанте окончательной системы однородных уравнений необходимо приравнять нулю в отдельности мнимую и действительную часть детерминанта. В результате получается два уравнения относительно p и $v_{кр}$.

Д. Учет присоединенных сосредоточенных масс

Так как решения изгибных и крутильных колебаний могут быть получены как частные случаи решения изгибно-крутильных колебаний, то мы свои рассуждения относительно учета присоединенных сосредоточенных масс будем относить к изгибно-крутильным колебаниям, как к общему случаю колебаний.

В этом случае поперечная составляющая сил инерций и сосредоточенный крутящий момент определяются по формулам:

$$Q_i = -p^2 m_i f_{z,i} + p^2 m_i \eta_i \Theta_{z,i} \quad (72)$$

$$M_{z,i} = p^2 m_i \eta_i f_{z,i} - p^2 I_{m_i} \Theta_{z,i} \quad (73)$$

Пользуясь выражениями для Q_i и $M_{z,i}$, мы можем обычными приемами построить эпюры¹ изгибающихся моментов и крутящих моментов для балки или крыла при любом количестве присоединенных сосредоточенных масс.

Эти эпюры необходимо присоединить к эпюрам от собственной массы балки, после чего решение протекает по ранее изложенному плану.

К преимуществам графоаналитического метода надо отнести простоту учета переменных параметров EI_x , $GI_{кр}$, m , I_m , а также и простоту учета присоединенных сосредоточенных масс.

§ 5. О другом варианте применения графоаналитического метода

Вычисления в графоаналитическом методе могут быть значительно сокращены, если действительные кривые M_x и M_z (в изгибно-крутильных колебаниях) заменять не схематичными ломаными линиями, как это было указано в предыдущем параграфе, а кривыми линиями, соответствующими первым членам какого-либо ряда. Например, предположить, что:

$$M_x = A_0 + A_1x + A_2x^2 + A_3x^3 + A_4x^4 + \dots$$

$$M_z = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + \dots^2,$$

после чего крыло разбить на количество участков, соответствующее количеству членов вышеупомянутого уравнения.

Тогда однородные уравнения относительно M_x и M_z обратятся в однородные уравнения относительно коэффициентов A_m и a_m . Из условия, что действительная и мнимая часть детерминанта однородных уравнений равны нулю, составляем уравнения относительно p и $\nu_{кр}$.

Разложение M_x и M_z в ряд разрешает уменьшить количество участков, на которые разбивается крыло, по сравнению с количеством участков, когда применяются схематичные ломаные линии для M_x и M_z , при сохранении той же точности.

Уменьшение же количества участков приводит к сокращению всей вычислительной работы, необходимой для определения p и $\nu_{кр}$.

Применяя ряды для M_x и M_z , мы можем графоаналитический метод вычислений заменить аналитическим, т. е. подставив в левые и правые части уравнений 70 и 71 выражения f , Θ^3 , M_x и M_z , приравняв нулю коэффициенты при одинаковых степенях x , что приведет к системе однородных уравнений.

Из условия равенства нулю мнимой и действительной части детерминанта этой системы мы составим уравнения относительно p и $\nu_{кр}$.

§ 6. Решение в конечных разностях

Это решение мы будем излагать лишь для крыла с прямолинейной осью жесткости.

Принцип решения сохраняется и для крыла с криволинейной осью жесткости.

¹ Эти эпюры будут содержать неизвестные $f_{z,i}$, $\Theta_{z,i}$ и p^2 .

² Подразумевается, что ряды подобраны с учетом выполнения конечных условий для M_x и M_z . Тут в случае необходимости может быть применен метод начальных параметров. Кроме того, следуя Рэлею, принять для M_x и M_z выражения, подобные выражениям M_x и M_z в статическом состоянии.

³ f и Θ находятся интегрированием уравнений 66 и 68.

А. Общие основы решения в конечных разностях

Производные функции F_z в конечных разностях мы составляем, исходя из замены отрезков кривых параболлами 2-го порядка, проходящими через три точки заменяемого отрезка кривой¹.

Если крыло разбить на ряд участков $o-s$, $s-p$, $m-k$, $k-n$ и т. д. (см. рис. 6), то производные функции F_z в точке k выразятся в конечных разностях в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} F'_k &= \frac{F_n - F_m}{2\Delta z} \\ F''_k &= \frac{F_n - 2F_k + F_m}{\Delta z^2} \\ F'''_k &= \frac{-2F_n + 2F_m + F_q - F_p}{2\Delta z^3} \\ F^{IV}_k &= \frac{6F_k - 4F_n - 4F_m + F_q + F_p}{\Delta z^4} \end{aligned} \right\} \quad (74)$$

Производная 3-го порядка получается заменой в производной 2-го порядка ординат F кривой F_z производными F_z первого порядка в соответствующих точках.

Производная 4-го порядка получается заменой в производной 2-го порядка ординат F производными F_z 2-го порядка в соответствующих точках.

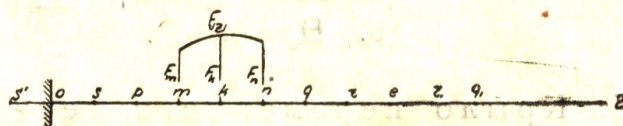


Рис. 6

Для крыла с прямолинейной осью изгиба и с постоянной жесткостью дифференциальные уравнения функций f и Θ представляются в следующем виде:

$$f^{IV} - \lambda_1 \cdot f - \lambda_2 \cdot \Theta = 0 \quad (75)$$

$$\Theta'' - \lambda_3 \cdot f - \lambda_4 \cdot \Theta = 0. \quad (76)$$

Уравнения 75 и 76 в конечных разностях при образовании производных по формулам 74 переписываются в нижеприведенной форме.

$$\frac{6f_k - 4f_n - 4f_m + f_q + f_p}{\Delta z^4} - \lambda_1 \cdot f_k - \lambda_2 \cdot \Theta_k = 0$$

$$\frac{\Theta_n - 2\Theta_k + \Theta_m}{\Delta z^2} - \lambda_3 \cdot f_k - \lambda_4 \cdot \Theta_k = 0$$

или

$$f_k \cdot (6 - \lambda_1 \cdot \Delta z^4) - 4f_n - 4f_m + f_q + f_p - \lambda_2 \cdot \Delta z^4 \cdot \Theta_k = 0 \quad (77)$$

$$-\Theta_k (2 + \lambda_4 \cdot \Delta z^2) + \Theta_n + \Theta_m - \lambda_3 \cdot \Delta z^2 \cdot f_k = 0. \quad (78)$$

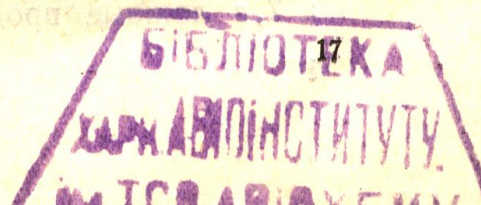
Уравнения, подобные уравнениям 77 и 78, составляем для каждой точки, в которых отыскиваются значения функций f и Θ . В результате получается система однородных уравнений относительно ординат функций f и Θ .

Из условия равенства нулю детерминанта этих уравнений составляем уравнение относительно частоты колебаний. При составлении уравнений 77 и 78 в точке e и в точке z вовлекаются соответственно ординаты f_r , f_q и f_s в точках ложных продолжений балки, обозначенных пунктиром на рис. 6.

Величина этих ординат, вернее связь их с ординатами точек действительной балки, устанавливается из заданных условий на концах балки.

¹ См. Бай: „Расчет балок стенок“.

Ш. Е. Микеладзе: „Численные методы интегрирования дифференциальных уравнений“.



Условия на свободном конце крыла (т. е. в точке e рис. 6) заключаются в следующем:

$$1. f_e'' = \frac{M_{x,e}}{EI_{x,e}} = 0 \quad \text{или} \quad \frac{fr_1 - 2f_e + f_r}{\Delta z^2} = \frac{M_{x,e}}{EI_{x,e}} = 0 \quad (79)$$

$$2. f_e''' = \frac{Q_e}{EI_{x,e}} = 0 \quad \text{или} \quad \frac{-2fr_1 + 2f_r + f_{q_1} - f_q}{2\Delta z^3} = \frac{Q_e}{EI_{x,e}} = 0. \quad (80)$$

Из совместного решения уравнений 79 и 80 вытекает:

$$f_{q_1} = f_q + 4f_e - 4f_r \quad (81)$$

$$f_{r_1} = -f_r + 2f_e. \quad (82)$$

$$3. \Theta_e' = \frac{M_{z,e}}{GI_{кр,e}} = 0 \quad \text{или} \quad \frac{\Theta_{r_1} - \Theta_r}{2\Delta z} = \frac{M_{z,e}}{GI_{кр,e}} = 0, \quad \text{откуда} \quad \Theta_{r_1} = \Theta_r. \quad (83)$$

Условия в закрепленном сечении крыла (т. е. в сечении s , см. рис. 6) заключаются в следующем:

$$4. f_0 = 0 \quad (84)$$

$$5. f_0' = 0 \quad \text{или} \quad \frac{f_{s_1} - f_s}{2\Delta z} = 0, \quad \text{откуда} \quad f_{s_1} = f_s \quad (85)$$

$$6. \Theta_0 = 0. \quad (86)$$

Б. Крыло переменного сечения с жестко-присоединенными сосредоточенными массами

Крыло переменного сечения мы будем заменять крылом со ступенчато-меняющимся сечением, имеющим осередненные размеры в пределах каждой ступеньки или участка крыла. Кроме того, крыло переменного сечения можно решать так же, как и крыло постоянного сечения, если взамен уравнений 75 и 76 применить уравнения 26 и 27 после применения подстановок 28 и 29.

Сосредоточенные массы крыла мы будем полагать приложенными на границе двух соседних ступенек.

Каждую ступеньку или иначе участок крыла рассматриваем самостоятельно, как прямоугольное крыло постоянной жесткости, несущее в общем случае присоединенную сосредоточенную массу на конце.

Уравнение колебаний для каждого участка крыла, несущего присоединенную сосредоточенную массу на конце, сохраняется таким же, как и для крыла постоянной жесткости с учетом начальных условий в начале участка в точке приложения присоединенной сосредоточенной массы.

Кроме того, уравнения для каждого участка крыла должны быть составлены с соблюдением условий сопряжения участков.

Для того чтобы все наши дальнейшие рассуждения конкретизировать, мы перейдем к составлению формул для некоторых частных случаев.

1. Двухступенчатое крыло без присоединенной сосредоточенной массы (см. рис. 7, а)

Получение уравнения для p^2 будет достигнуто по следующему плану:

а) Составление системы уравнений колебаний.

Каждый участок рассматривается самостоятельно с причерченными к нему ложными продолжениями (правым и левым, на рис. 7, б и 7, в ложные продолжения обозначены пунктиром).

Пользуясь типовыми уравнениями 77 и 78, составляем уравнения колебаний для точки 1 и точки 2. При этом точка 1 относится к первому участку, а точка 2 — ко второму участку.

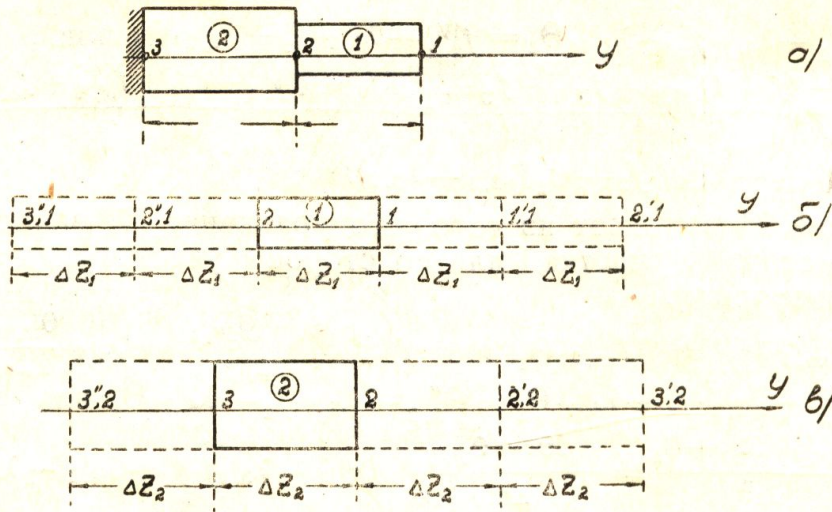


Рис. 7

Точка 1

$$\left. \begin{aligned} f_1(6 - \lambda_{1,1} \cdot \Delta z^4) - 4f_{1',1} - 4f_2 + f_{2',1} + f_{2'',1} - \lambda_{2,1} \cdot \Delta z^4 \cdot \Theta_1 &= 0 \\ -\Theta_1(2 + \lambda_{4,1} \cdot \Delta z^2) + \Theta_{1',1} + \Theta_2 - \lambda_{3,1} \cdot \Delta z^2 \cdot f_1 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (87)$$

Точка 2

$$\left. \begin{aligned} f_2(6 - \lambda_{1,2} \cdot \Delta z^4) - 4f_{2',2} - 4f_3 + f_{3',2} - \lambda_{2,2} \cdot \Delta z^4 \cdot \Theta_2 &= 0 \\ -\Theta_2(2 + \lambda_{4,2} \cdot \Delta z^2) + \Theta_{2',2} + \Theta_3 - \lambda_{3,2} \cdot \Delta z^2 \cdot f_2 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (88)$$

В уравнениях 79 и 80 коэффициенты, относящиеся к участкам 1 и 2, снабжены соответственно индексами 1 и 2.

б) Выражение ординат точек ложных продолжений через f_1 , f_2 и Θ_1 , Θ_2 на основе заданных конечных условий балки и условий сопряжения участков и составление уравнений колебаний, содержащих только ординаты f_1 , f_2 и Θ_1 , Θ_2 .

Пользуясь равенствами 81, 82, 83, 85, выражаем ординаты $f_{1',1}$, $f_{2',1}$, $f_{3'',2}$ соответственно через f_1 и f_2 , а ординату $\Theta_{1',1}$ через Θ_2 .

Кроме того, $f_3 = 0$ и $\Theta_3 = 0$.

$$\left. \begin{aligned} f_{1',1} &= 2f_1 \\ f_{2',1} &= 3f_1 \\ f_{3'',2} &= f_2 \\ f_3 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (89)$$

$$\left. \begin{aligned} \Theta_{1',1} &= \Theta_2 \\ \Theta_3 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (90)$$

Значения ординат $f_{2'',1}$, $f_{2',2}$, $f_{3',2}$, $f_{3'',1}$, $\Theta_{2'',1}$, $\Theta_{2',2}$ мы находим, пользуясь следующими условиями сопряжения участков:

$$1. \quad f_{2',1} = f_{2',2} \quad \text{или} \quad \frac{f_1 - f_{2'',1}}{2\Delta z_1} = \frac{f_{2',2}}{2\Delta z_2} \quad (91)$$

$$2. \quad EI_1 \cdot f_{2'',1} = EI_2 \cdot f_{2'',2} \quad \text{или} \quad I_1 \cdot \frac{f_1 - 2f_2 + f_{2'',1}}{\Delta z_1^2} = I_2 \cdot \frac{f_{2',2} - 2f_2}{\Delta z_2^2} \quad (92)$$

$$3. EI_1 \cdot f_{2,1}''' = EI_2 \cdot f_{2,2}''' \text{ или } I_1 \cdot \frac{2f_{2',1}'' + f_{1',1} - f_{3'',1}}{2\Delta z_1^3} = I_2 \cdot \frac{-2f_{2',2} + f_{3'',2}}{2\Delta z_2^3} \quad (93)$$

$$4. f_{2,1}^{IV} - \lambda_{1,1} \cdot f_2 - \lambda_{2,1} \cdot \Theta_2 = f_{2,2}^{IV} - \lambda_{1,2} \cdot f_2 - \lambda_{2,2} \cdot \Theta_2 \text{ или} \\ \frac{6f_2 - 4f_1 - 4f_{2'',1} + f_{1',1} + f_{3'',1}}{\Delta z_1^4} = \frac{6f_2 - 4f_{2',1} - 4f_3 + f_{3',2} + f_{3'',2}}{\Delta z_2^4} + \\ + (\lambda_{1,1} - \lambda_{1,2}) \cdot f_2 + \Theta_2 (\lambda_{2,1} - \lambda_{2,2}). \quad (94)$$

(Условие 94 вытекает из того, что уравнение 77, записанное для точки 2 со стороны участка 1 или со стороны участка 2, должно оказаться одинаковым).

$$5. GI_{кр,1} \cdot \Theta_{2,1}' = GI_{кр,2} \cdot \Theta_2 \text{ или } I_{кр,1} \cdot \frac{\Theta_1 - \Theta_{2'',1}}{2\Delta z_1} = I_{кр,2} \cdot \frac{\Theta_{2',2}}{2\Delta z} \quad (95)$$

$$6. \Theta_{2,1}'' - \lambda_{3,1} \cdot f_2 - \lambda_{4,1} \cdot \Theta_2 = \Theta_{2,2}'' - \lambda_{3,2} \cdot f_2 - \lambda_{4,2} \cdot \Theta_2 \text{ или} \\ \frac{\Theta_{2'',1} - 2\Theta_2 + \Theta_1}{\Delta z_1^2} = \frac{-2\Theta_2 + \Theta_{2',2}}{\Delta z_2^2} + (\lambda_{3,1} - \lambda_{3,2}) \cdot f_2 + (\lambda_{4,1} - \lambda_{4,2}) \cdot \Theta_2. \quad (96)$$

(Условие 96 вытекает из того, что уравнение 78, записанное для точки 2 со стороны участка 1 или со стороны участка 2, должно оказаться одинаковым).

Решив совместно уравнения 91 — 96 относительно $f_{2'',1}$, $f_{2',2}$, $f_{3',2}$, $f_{3'',1}$, $\Theta_{2'',1}$, $\Theta_{2',2}$, находим:

$$f_{2',2} = 2 \frac{f_1 - (1 - \alpha_2) \cdot f_2}{\alpha_1 + \alpha_2}$$

$$f_{2'',1} = \frac{(\alpha_2 - \alpha_1) \cdot f_1 + 2\alpha_1 (1 - \alpha_2) \cdot f_2}{2}$$

$$f_{3',2} = -\frac{1}{\alpha_3 + \alpha_4} \cdot \left\{ f_1 \cdot \left[-\frac{4(\alpha_3 + \alpha_4)}{\alpha_1 + \alpha_2} + (\alpha_2 - \alpha_1) + 2 \right] + \right. \\ \left. + f_2 \left[4 \frac{1 - \alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2} (\alpha_3 + 2\alpha_4) + \alpha_3 + 7\alpha_4 + 2\alpha_1 (1 - \alpha_2) + \Delta z_1^4 (\lambda_{1,1} - \lambda_{1,2}) \right] + \right. \\ \left. + \Theta_2 \cdot \Delta z_1^4 (\lambda_{2,1} + \lambda_{2,2}) \right\}$$

$$f_{3'',1} = \frac{1}{\alpha_3 + \alpha_4} \left\{ f_1 \left[2\alpha_3 + (\alpha_2 - \alpha_1) (2\alpha_3 + \alpha_4) - 4 \frac{\alpha_3 \alpha_4}{\alpha_1 + \alpha_2} \right] + \right. \\ \left. + f_2 \left[4\alpha_3 \alpha_4 \frac{1 - \alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2} + 6\alpha_3 (\alpha_4 - 1) + 2\alpha_1 (1 - \alpha_2) (\alpha_4 - 2\alpha_3) + \right. \right. \\ \left. \left. + \alpha_3 \cdot \Delta z_1^4 (\lambda_{1,1} - \lambda_{1,2}) \right] + \Theta_2 \cdot \Delta z_1^4 (\lambda_{2,1} - \lambda_{2,2}) \cdot \alpha_3 \right\}$$

$$\Theta_{2',2} = \frac{1}{\beta_1 + \beta_2} \{ \Theta_1 + (\lambda_{3,1} - \lambda_{3,2}) \cdot \Delta z_1^2 \cdot f_2 + [(\lambda_{4,1} - \lambda_{4,2}) \cdot \Delta z_1^2 - 2(1 - \beta_2)] \cdot \Theta_2 \}$$

$$\Theta_{2'',1} = \frac{1}{\beta_1 + \beta_2} \{ \beta_2 \Theta_1 + [2(1 - \beta_2) + (\lambda_{4,1} - \lambda_{4,2}) \cdot \Delta z_1^2] \cdot \beta_1 \cdot \Theta_2 - \\ - \beta_1 (\lambda_{3,1} - \lambda_{3,2}) \cdot \Delta z_1^2 \cdot f_2 \},$$

где

$$\alpha_1 = \frac{\Delta z_1}{\Delta z_2}, \quad \alpha_2 = \frac{I_2}{I_1} \alpha_1^2, \quad \alpha_3 = \frac{I_2}{I_1} \alpha_1^3, \quad \alpha_4 = \alpha_1^4$$

$$\beta_1 = \frac{I_{кр,2}}{I_{кр,1}} \cdot \alpha_1.$$

Подставив в уравнения 87, 88 значения f и Θ , соответствующие точкам ложных продолжений участков, мы получаем однородную систему четырех уравнений, содержащих значения f и Θ исключительно в точках 1 и 2.

Из условия, что детерминант этих уравнений равен нулю, мы составляем уравнение относительно p^2 .

2. Двухступенчатое крыло с присоединенной сосредоточенной массой $m_{p,2}$, приложенной на расстоянии Δz_1 от свободного конца балки с выносом η_2 впереди оси жесткости

Задача решается во всем подобно предыдущей, меняются лишь условия 93 и 95 сопряжения участков — 1 и 2. Эти условия в рассматриваемом случае записываются в следующем виде:

$$EI_1 \cdot f_{2,1}''' = EI_2 \cdot f_{2,2}''' + P_2 \quad (97)$$

$$GI_{кр,1} \cdot \Theta_{2,1}' = GI_{кр,2} \cdot \Theta_{2,2}' + M_{z,2}, \quad (98)$$

где P_2 — поперечная составляющая сил инерции массы $m_{p,2}$ в виде сосредоточенной перерезывающей силы и $M_{z,2}$ — сосредоточенный крутящий момент от тех же сил — определяются соответственно из общих формул:

$$\bar{Q}_i = m \cdot \left(\frac{\partial^2 y}{\partial \tau^2} \right)_{y_i} - m_i \cdot \eta_i \cdot \left(\frac{\partial^2 \beta}{\partial \tau^2} \right)_{y_i} \quad (99)$$

$$\bar{M}_{z,i} = -m_i \cdot \eta_i \left(\frac{\partial^2 y}{\partial \tau^2} \right)_{y_i} + Im_i \left(\frac{\partial^2 \beta}{\partial \tau^2} \right)_{y_i} \quad (100)$$

После подстановки выражений $y = f \cdot e^{ip\tau}$, $\beta = \Theta \cdot e^{ip\tau}$, и имея в виду, что в уравнениях 99 и 100 $e^{ip\tau}$ сокращается¹, находим:

$$Q_i = -p^2 \cdot m_i f_i + p^2 m_i \eta_i \Theta_i \quad (101)$$

$$M_{z,i} = p^2 m_i f_i - p^2 Im_i \Theta_i \quad (102)$$

Стало быть, согласно формулам 101 и 102 имеем:

$$P_2 = p^2 m_{p,2} \cdot f_2 + p^2 \cdot \eta_2 \cdot \Theta_{2,1} \quad (103)$$

$$M_{z,2} = p^2 m_{p,2} \cdot \eta_2 \cdot f_2 - p^2 Im_2 \cdot \Theta_{2,1} \quad (104)$$

(В формулах 103 и 104 можно $\Theta_{2,1}$ заменить на $\Theta_{2,2}$, поскольку $\Theta_{2,1} = \Theta_{2,2}$).

§ 7. Совместное применение метода конечных разностей и метода Галеркина

Функции f и Θ заимствуются из решения изгибно-крутильных колебаний в конечных разностях².

После чего функция Θ умножается на A , а функция f на B . Для определения коэффициентов A и B составляются уравнения по методу Галеркина. Так как эти уравнения однородны, то из условия равенства нулю детерминанта этих уравнений составляется уравнение относительно частоты колебаний и критической скорости.

Таким же путем метод Галеркина может быть применен совместно с графоаналитическим методом.

§ 8. Другой вариант применения метода конечных разностей

Если в основу решения задачи флаттер в конечных разностях положить уравнения 56, 60, 70, 71, то упростится решение этой задачи для крыла переменного сечения, поскольку эти уравнения верны для крыла переменного и постоянного сечения.

¹ Что равносильно отысканию Q_i и $M_{z,i}$ при $\tau = 0$.

² Тогда данный вариант выгодно применить, если решение в конечных разностях выполнить при двух или трех точках. В этом случае применение метода Галеркина окажется средством для повышения точности результатов, полученных из решения по методу конечных разностей.

Пример. Определить критическую скорость флаттера для модели прямоугольного крыла постоянной жесткости и массы и при следующих данных:

$$EI_x = 1,481 \text{ кг} \cdot \text{м}^2.$$

$$GI_{кр} = 0,25 \text{ кг} \cdot \text{м}^2.$$

$$m = 0,0461 \frac{\text{кг} \cdot \text{сек}^2}{\text{м}^2}.$$

$$I_m = 0,0001072 \text{ кг} \cdot \text{сек}^2.$$

$$\sigma = 0,017 \text{ м}.$$

$$l = 0,55 \text{ м}.$$

$$t = 0,12 \text{ м}; \frac{x_0}{t} = 0,32.$$

$$\frac{\partial c_y}{\partial \alpha} = 2,33; \quad \frac{\partial c_m}{\partial z} = -0,254;$$

$$\frac{\partial c_{mE}}{\partial \alpha} = \frac{\partial c_y}{\partial \alpha} \cdot \left(\frac{\partial c_m}{\partial z} + \frac{x_0}{t} \right) = 0,1538.$$

$$\rho = 0,125 \text{ кг/м}^4.$$

Ось жесткости — прямая линия.

Для решения данного примера применяем метод конечных разностей совместно с методом Галеркина.

Решение примера находим по следующему плану:

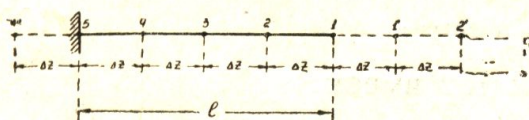


Рис. 8

1. Разделение крыла на участки и запись уравнений 77 и 78 применительно к точкам участков крыла.

Крыло делим на четыре участка¹ (см. рис. 8).

Пользуясь типовыми уравнениями 77 и 78, записываем следующие уравнения колебаний в конечных разностях для точек 1, 2, 3, 4:

$$\left. \begin{aligned} f_1(6 - \lambda_1 \cdot \Delta z^4) - 4f_{1'} - 4f_2 + f_{2'} + f_3 + \lambda_2 \cdot \Delta z^4 \cdot \Theta_1 &= 0 \\ -\Theta_1(2 + \lambda_4 \cdot \Delta z^2) + \Theta_{1'} + \Theta_2 - \lambda_3 \cdot \Delta z^2 \cdot f_1 &= 0 \\ f_2(6 - \lambda_1 \cdot \Delta z^4) - 4f_1 - 4f_3 + f_{1'} + f_4 - \lambda_2 \cdot \Delta z^4 \cdot \Theta_2 &= 0 \\ -\Theta_2(2 + \lambda_4 \cdot \Delta z^2) + \Theta_1 + \Theta_3 - \lambda_3 \cdot \Delta z^2 \cdot f_2 &= 0 \\ f_3(6 - \lambda_1 \cdot \Delta z^4) - 4f_2 - 4f_4 + f_1 + f_5 - \lambda_2 \cdot \Delta z^4 \cdot \Theta_3 &= 0 \\ -\Theta_3(2 + \lambda_4 \cdot \Delta z^2) + \Theta_2 + \Theta_4 - \lambda_3 \cdot \Delta z^2 \cdot f_3 &= 0 \\ f_4(6 - \lambda_1 \cdot \Delta z^4) - 4f_3 - 4f_5 + f_2 + f_{4''} - \lambda_2 \cdot \Delta z^4 \cdot \Theta_4 &= 0 \\ -\Theta_4 \cdot (2 + \lambda_4 \cdot \Delta z^2) + \Theta_3 + \Theta_5 - \lambda_3 \cdot \Delta z^2 \cdot f_4 &= 0 \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{точка 1} \\ \text{точка 2} \\ \text{точка 3} \\ \text{точка 4} \end{array} \quad (A)$$

2. Вычисление значений $f_{1'}$, $f_{2'}$, $\Theta_{1'}$; f_5 , $f_{4''}$, Θ_5 , исходя из конечных условий крыла, и соответствующее преобразование уравнений А,

Пользуясь равенствами 81, 82, 83, 84, 85, 86, находим:

$$f_{1'} = 2f_1 - f_2$$

$$f_{2'} = -4f_2 + 4f_1$$

$$f_{4''} = f_4; \quad f_5 = 0$$

$$\Theta_{1'} = \Theta_2; \quad \Theta_5 = 0.$$

Подставив полученные значения $f_{1'}$, $f_{2'}$, $f_{4''}$, f_5 ; $\Theta_{1'}$, Θ_5 в уравнения А, находим:

¹ В практических расчетах достаточно делить на три участка.

$$\left. \begin{aligned} f_1 \cdot (2 - \lambda_1 \cdot \Delta z^4) - 4f_2 + f_3 - \lambda_2 \cdot \Delta z^4 \cdot \Theta_1 &= 0 \\ -f_1 \cdot \lambda_3 \cdot \Delta z^2 - (2 + \lambda_4 \cdot \Delta z^2) \cdot \Theta_1 + 2\Theta_2 &= 0 \\ -2f_1 + (5 - \lambda_1 \cdot \Delta z^4) \cdot f_2 - 4f_3 + f_4 - \lambda_2 \cdot \Delta z^4 \cdot \Theta_2 &= 0 \\ -f_2 \cdot \lambda_3 \cdot \Delta z^2 + \Theta_1 - (2 + \lambda_4 \cdot \Delta z^2) \cdot \Theta_2 + \Theta_3 &= 0 \\ f_1 - 4f_2 + (6 - \lambda_1 \cdot \Delta z^4) \cdot f_3 - 4f_4 - \lambda_2 \cdot \Delta z^4 \cdot \Theta_3 &= 0 \\ -\lambda_3 \cdot \Delta z^2 \cdot f_3 + \Theta_2 - (2 + \lambda_4 \cdot \Delta z^2) \cdot \Theta_3 + \Theta_4 &= 0 \\ f_2 - 4f_3 + (7 - \lambda_1 \cdot \Delta z^4) \cdot f_4 - \lambda_2 \cdot \Delta z^4 \cdot \Theta_4 &= 0 \\ -\lambda_3 \cdot \Delta z^2 \cdot f_4 + \Theta_3 - (2 + \lambda_4 \cdot \Delta z^2) \cdot \Theta_4 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (\text{Б})$$

3. Вычисление детерминанта уравнений Б и определение частоты p колебаний крыла в пустоте.

Ввиду того, что уравнения Б являются неполными уравнениями, детерминант этих уравнений легко сводится к следующему детерминанту третьего порядка:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

где

$$\begin{aligned} a_{11} &= -(24 + 8\lambda_1 \cdot \Delta z^4 + \lambda_2 \cdot \lambda_3 \cdot \Delta z^6) \\ a_{12} &= -9\lambda_2 \cdot \Delta z^4 - \frac{2 + \lambda_4 \cdot \Delta z^2}{\lambda_3 \cdot \Delta z^2} \cdot (21 - 10\lambda_1 \cdot \Delta z^4) - \\ &\quad - \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \Delta z^8 - \frac{\lambda_1}{\lambda_3} \Delta z^2 (2 - \lambda_1 \cdot \Delta z^4) (2 + \lambda_4 \cdot \Delta z^2) \\ a_{13} &= -\lambda_2 \cdot \lambda_4 \cdot \Delta z^6 - 6\lambda_2 \cdot \Delta z^4 + \frac{26}{\lambda_3 \cdot \Delta z^2} + 2 \frac{\lambda_1}{\lambda_3} \Delta z^2 (-16 - \lambda_1 \cdot \Delta z^4) \\ a_{21} &= -92 - 3\lambda_3 \lambda_2 \cdot \Delta z^6 - \lambda_1 \cdot \Delta z^4 (4 + \lambda_1 \cdot \Delta z^4) \\ a_{22} &= -\lambda_2 \lambda_4 \cdot \Delta z^6 - 6\lambda_2 \cdot \Delta z^4 - \lambda_2 \lambda_3 \cdot \Delta z^{10} + \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \Delta z^8 (2\lambda_1 + \lambda_4 \cdot \Delta z^2) - \\ &\quad - 4 \frac{(2 - \lambda_1 \cdot \Delta z^4) (2 + \lambda_4 \cdot \Delta z^2)}{\lambda_3 \cdot \Delta z^2} - (7 - \lambda_1 \cdot \Delta z^4) \left[-4\lambda_2 \cdot \Delta z^4 + \right. \\ &\quad \left. + 2 \frac{2 + \lambda_4 \cdot \Delta z^2}{\lambda_3 \cdot \Delta z^2} \cdot (-2 + \lambda_4 \cdot \Delta z^2 + 2\lambda_1 \cdot \Delta z^4) \right] \\ a_{23} &= -\lambda_2 \cdot \Delta z^4 [(2 + \lambda_4 \cdot \Delta z^2)^2 - 1] + (4 + \lambda_3 \cdot \lambda_2 \cdot \Delta z^6) \cdot \frac{2(2 - \lambda_1 \cdot \Delta z^4)}{\lambda_3 \cdot \Delta z^2} - \\ &\quad - (7 - \lambda_1 \cdot \Delta z^4) \left(-\lambda_2 \cdot \Delta z^4 + 4 \frac{3 - 2\lambda_1 \cdot \Delta z^4}{\lambda_3 \cdot \Delta z^2} \right) \\ a_{31} &= -\lambda_3 \cdot \Delta z^2 [11 + (2 + \lambda_4 \cdot \Delta z^2)^2] + \lambda_2 \lambda_3 (2 + \lambda_4 \cdot \Delta z^2) \cdot \Delta z^6 \\ a_{32} &= -1 + (2 + \lambda_4 \cdot \Delta z^2)^2 (-1 + \lambda_1 \cdot \Delta z^4) + (2 + \lambda_4 \cdot \Delta z^2) (-2\lambda_2 \lambda_3 \cdot \Delta z^6 - \\ &\quad - \lambda_2 \lambda_4 \cdot \Delta z^6 + 2\lambda_4 \cdot \Delta z^2 + 4\lambda_1 \cdot \Delta z^4 - 4) - 4\lambda_2 \lambda_3 \cdot \Delta z^6 \\ a_{33} &= 26 - (2 + \lambda_4 \cdot \Delta z^2)^2 (4 + \lambda_2 \cdot \lambda_3 \cdot \Delta z^6) - 2\lambda_1 \lambda_4 \cdot \Delta z^6 - 12\lambda_1 \cdot \Delta z^4 + 4\lambda_4 \cdot \Delta z^2. \end{aligned}$$

Дальнейшее раскрытие детерминанта D в общем виде вряд ли целесообразно.

Этот детерминант может быть использован как для решения задачи об изгибно-крутильных колебаниях в пустоте, так и об изгибно-крутильных колебаниях в воздушном потоке, для чего следует лишь применять соответствующие выражения λ_m ($m = 1, 2, 3, 4$).

Определение частоты p и критической скорости $v_{кр}$ (в случае решения задачи флаттер) рекомендуется производить попытками, т. е. задаваясь наперед значениями p и $v_{кр}$, проверять обращение в нуль мнимой и действительной части детерминанта.

Самым грубым первым приближением будет $v_{кр} = 0$, а значение p равно значению частоты изгибно-крутильных колебаний в пустоте.

При подстановке в детерминант $v_{кр} = 0$ и $p^2 = 22180$, получаем: $D = 40230 - 40160 = 70$ (отклонение от нуля 0,01%), а при $v_{кр} = 0$ и $p^2 = 4250$

$D = 269700 - 268900 = 800$ (отклонение от нуля 0,02%).

Стало быть, частоты $p^2 = 22180$ и $p^2 = 4250$ следует принять за частоты изгибно-крутильных колебаний рассматриваемого крыла в пустоте.

Эти значения частоты p^2 совпадают с точным решением.

Таким образом, если разбить крыло на четыре участка, то получаемое решение по методу конечных разностей не отличается от точного решения.

В дальнейшем мы используем частоту $p^2 = 22180$, так как этой частоте соответствует меньшая критическая скорость.

4. *Определение значений $f_1, f_2, f_3, f_4; \theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4$ в предположении, что колебания крыла происходят в пустоте.*

Полагаем $f_1 = 1$. Исключая первое из уравнений Б, решаем оставшиеся семь уравнений относительно $f_2, f_3, f_4; \theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4$ и находим:

$$\bar{f}_2 = 0,6652$$

$$\bar{f}_3 = 0,3425$$

$$\bar{f}_4 = 0,0982$$

$$\bar{\theta}_1 = 28,25$$

$$\bar{\theta}_2 = 25,7$$

$$\bar{\theta}_3 = 19,45$$

$$\bar{\theta}_4 = 10,78.$$

5. *Составление уравнений по методу Галеркина.*

В уравнения 30 и 31 вместо f и θ подставляем $A\bar{f}$ и $B\bar{\theta}$; после чего умножив уравнение 30 на $\bar{f}dz$ и уравнение 31 на $\bar{\theta}dz$, составляем следующие уравнения по методу Галеркина:

$$\left. \begin{aligned} A \cdot b_{11} + B \cdot b_{12} &= 0 \\ A \cdot b_{21} + B \cdot b_{22} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (B)$$

где

$$b_{11} = \int_0^l (\bar{f}^{IV} - \lambda_1 \cdot \bar{f}) \cdot \bar{f} dz$$

$$b_{12} = -\lambda_2 \cdot \int_0^l \bar{\theta} \bar{f} dz$$

$$b_{21} = -\lambda_3 \cdot \int_0^l \bar{f} \cdot \bar{\theta} \cdot dz$$

$$b_{22} = \int_0^l (\bar{\theta}'' - \lambda_4 \cdot \bar{\theta}) \cdot \bar{\theta} \cdot dz.$$

Интегрирование выполняем по Симпсону (учитывая, что $f_5^{IV} = \theta_5'' = 0$. Последнее вытекает из применения уравнений 30 и 31 к точке 5, в которой $f_5 = \theta_5 = 0$) и находим:

$$\left. \begin{aligned} b_{11} &= 0,71048 \cdot 10^3 - 3,0466\lambda_1 \\ b_{12} &= -114,2\lambda_2 \\ b_{21} &= -114,2\lambda_3 \\ b_{22} &= -(7,589 \cdot 10^4 + 4,66205 \cdot 10^5 \cdot \lambda_4). \end{aligned} \right\} \quad (B_1)$$

6. Составление уравнений относительно p и $v_{кр}$.

При наших данных и при колебании крыла в воздушном потоке мы находим следующие выражения для коэффициентов $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$:

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= 3,11 \cdot 10^{-2} - 3,51 i v_{кр} \\ \lambda_2 &= -5,29 \cdot 10^{-4} \cdot p^2 + 2,36 \cdot 10^{-2} \cdot v_{кр}^2 + 1,816 \cdot 10^{-1} \cdot i v_{кр} \\ \lambda_3 &= 3,135 \cdot 10^{-3} p^2 + 1,65 \cdot 10^{-1} i v_{кр} \\ \lambda_4 &= -4,28 \cdot 10^{-4} \cdot p^2 - 1,108 \cdot 10^{-3} v_{кр}^2 - 1,676 \cdot 10^{-2} i v_{кр}.\end{aligned}$$

При подстановке найденных значений $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ в выражения B_1 получаем:

$$\left. \begin{aligned}b_{11} &= 0,61578 \cdot 10^3 + 10,69357 i v_{кр} \\ b_{12} &= 604,118 \cdot 10^{-4} p^2 - 2,695 v_{кр}^2 - 20,7387 i v_{кр} \\ b_{21} &= -0,358 p^2 - 18,843 i v_{кр} \\ b_{22} &= -7,589 \cdot 10^4 + 1,995 p^2 + 5,165 v_{кр}^2 - 78,135 i v_{кр}.\end{aligned} \right\} \cdot (\Gamma)$$

Обращаясь к уравнениям В, мы из условия равенства нулю в отдельности мнимой и действительной части детерминанта этих уравнений составляем следующие уравнения относительно p и $v_{кр}$:

$$\left. \begin{aligned}7,554 \cdot 10^5 + 28,194 p^2 + 4,6 v_{кр}^2 &= 0 \\ -5,39 \cdot 10^7 + 8,614 \cdot 10^3 \cdot p^2 + 19,71 \cdot 10^{-1} \cdot p^4 + 49,045 \cdot 10^2 v_{кр}^2 \\ -14,51 \cdot 10^{-1} \cdot p^2 v_{кр}^2 &= 0\end{aligned} \right\} \cdot (\Gamma_1)$$

Решение уравнений Γ_1 :

$$p_{\max}^2 = 25300; \quad p_{\min}^2 = 3380$$

(при колебаниях в пустоте и при преобладании крутильных колебаний $p^2 = 22180$, а при преобладании изгибных колебаний $p^2 = 4250$) и

$$v_{кр}^{\min} = 95 \frac{\text{м}}{\text{сек}}.$$