УДК 536.21+539.3

Т.В. Денисова, В.С. Проценко, Я.П. Бузько

Задача стационарной теплопроводности для полуполосы с круговым отверстием

Харьковский национальный экономический университет
Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского «ХАИ»

Краевая задача стационарной теплопроводности для полуполосы с круговым отверстием сведена к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений, которая допускает применение метода редукции.

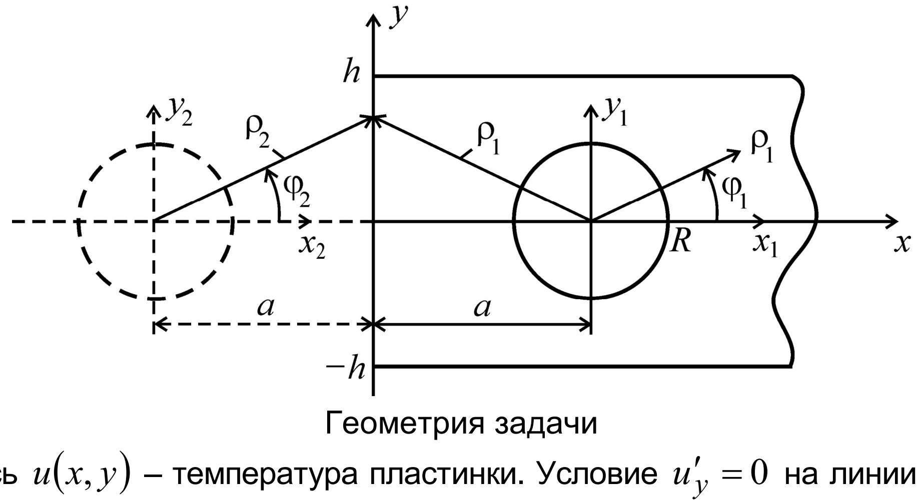
Ключевые слова: задача теплопроводности, смешанные условия, теоремы сложения.

Задача теплопроводности для полуполосы с круговым отверстием, насколько известно авторам настоящей статьи, аналитическим методом ранее никем не изучалась [1, 2]. В работе предложен метод решения этой задачи при смешанных условиях на ее границе. Он основан на теоремах сложения гармонических функций и сводит задачу к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений. Доказано, что полученную бесконечную систему можно решать методом усечения [3] при условии, что окружность не касается границы полуполосы и не пересекает её. При определенной трактовке граничных условий задача описывает антиплоскую деформацию упругой полуполосы, защемленной по торцу.

Проблема формулируется так: в полуполосе $(S):\{x \geq 0, |y| \leq h\}$ найти решение уравнения Лапласа $\Delta u = 0$ при условиях на границе

$$u(0,y)=0,\quad u'_y(x,\pm h)=0,\quad u(x,y)\big|_l = f(\varphi_1),\quad |u(x,y)| \text{ – ограничена.} \tag{1}$$

Будем рассматривать случай, симметричный относительно оси Ox (рисунок); кососимметричный вариант задачи рассматривается аналогично.



Геометрия задачи

Здесь $u(x,y)$ – температура пластинки. Условие $u'_y = 0$ на линии $y=h$ есть условие отсутствия теплового потока во внешнюю относительно пластинки среду.

Введем дополнительную систему координат (x_2, y_2), расположенную симметрично системе (x_1, y_1) относительно оси Oy. Решение задачи будем искать в виде

$$u = \mathrm{Re}\sum_{n=1}^{\infty} a_n\left(\rho_1^{-n} e^{in\varphi_1} + (-1)^{n+1}\rho_2^{-n} e^{-in\varphi_2}\right) + a_0 \ln\left(\frac{\rho_1}{\rho_2}\right) + u_1(x,y), \tag{2}$$

где $$u_1(x,y)=\int\limits_0^\infty A(\lambda)\cdot \mathrm{ch}\lambda y\cdot \sin\lambda x\, d\lambda\,. \qquad (3)$$

Нетрудно проверить, что решение (2) удовлетворяет условию $u(0,y)=0$. Действительно, на оси Oy $\rho_1=\rho_2$, $\varphi_1=\pi-\varphi_2$, $(-1)^{n+1}e^{-in\varphi_2}=-e^{in\varphi_1}$ и $\ln(\rho_1/\rho_2)=0$.

Для удовлетворения граничных условий на грани $y=h$ и на окружности $\rho_1=R$ нам понадобятся формулы

$$\mathrm{ch}\lambda y\cdot\sin\lambda x=\sin\lambda a\cdot\mathrm{ch}\lambda y_1\cdot\cos\lambda x_1+\cos\lambda a\cdot\mathrm{ch}\lambda y_1\cdot\sin\lambda x_1=$$
$$=\sin\lambda a\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\lambda^{2n}}{(2n)!}\rho_1^{2n}\cos 2n\varphi_1+\cos\lambda a\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\lambda^{2n+1}}{(2n+1)!}\rho_1^{2n+1}\cos(2n+1)\varphi_1\,, \qquad (4)$$

$$\mathrm{Re}\left(\frac{e^{in\varphi_1}}{\rho_1^n}+(-1)^{n+1}\frac{e^{-in\varphi_2}}{\rho_2^n}\right)=\frac{2}{(n-1)!}\int\limits_0^\infty\lambda^{n-1}e^{-\lambda y}\sin\left(\lambda a+\frac{n\pi}{2}\right)\sin\lambda x\,d\lambda\,, \qquad (5)$$
$$(y>0),$$

$$\frac{e^{-in\varphi_2}}{\rho_2^n}=\sum_{k=0}^{\infty}C_{n+k-1}^k\frac{(-1)^k}{(2a)^{n+k}}\rho_1^k e^{ik\varphi_1}\,,\quad \rho_1<2a. \qquad (6)$$

Формулы (4), (6) позволяют записать решение в окрестности окружности в локальной полярной системе координат (ρ_1,φ_1). Формула (5) дает возможность часть решения, связанную с полярными системами, преобразовать к декартовой системе координат (x,y) и тем самым придать ей форму, удобную для удовлетворения краевым условиям на грани полуполосы $y=h$.

Кроме того, имеем формулы для логарифмического слагаемого

$$\left.\frac{\partial}{\partial y}\ln\left(\frac{\rho_1}{\rho_2}\right)\right|_{y=h}=2\int\limits_0^\infty e^{-\lambda h}\sin\lambda a\cdot\sin\lambda x\,d\lambda\,, \qquad (7)$$

$$\ln\left(\frac{\rho_1}{\rho_2}\right)=\ln\varepsilon+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-\varepsilon)^n}{n}\cos n\varphi_1,\quad \varepsilon=\frac{R}{2a}. \qquad (8)$$

С помощью формул (4) – (8) удовлетворим краевым условиям задачи.

Из краевого условия на линии $y=h$ находим

$$A(\lambda)=\frac{2e^{-\lambda h}}{\mathrm{sh}\lambda h}\left[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{(n-1)!}\lambda^{n-1}\sin\left(n\frac{\pi}{2}+\lambda a\right)+a_0\lambda^{-1}\sin\lambda a\right]. \qquad (9)$$

Условие на окружности $\rho_1=R$ запишем в виде

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_nR^{-n}\cos n\varphi_1+\sum_{m=1}^{\infty}a_m(-1)^{m+1}\sum_{n=0}^{\infty}C_{m+n-1}^n(-1)^n\frac{R^n}{(2a)^{m+n}}\cos n\varphi_1+$$

$$+\int_0^\infty A(\lambda)\left\{\sin\lambda a\sum_{n=0}^\infty\frac{(-1)^n\lambda^{2n}R^{2n}}{(2n)!}\cos 2n\varphi_1+\cos\lambda a\sum_{n=0}^\infty\frac{(-1)^n\lambda^{2n+1}R^{2n+1}}{(2n+1)!}\cos(2n+1)\varphi_1\right\}d\lambda+$$

$$+a_0\left(\ln\varepsilon+\sum_{n=1}^\infty\frac{(-\varepsilon)^n}{n}\cos n\varphi_1\right)=\sum_{n=0}^\infty\alpha_n\cdot\cos n\varphi_1\,,\quad(|\varphi|\le\pi). \tag{10}$$

Приравнивая в (10) коэффициенты при $\cos n\varphi_1$, найдем

$$a_0\ln\varepsilon+\sum_{m=1}^\infty a_m(-1)^{m+1}\frac{1}{(2a)^m}+\int_0^\infty A(\lambda)\sin\lambda a\,d\lambda=\alpha_0\,,$$

$$a_nR^{-n}+\sum_{m=1}^\infty a_m(-1)^{m+1+n}C_{m+n-1}^n\frac{R^n}{(2a)^{m+n}}+\int_0^\infty A(\lambda)G_n(\lambda)d\lambda+$$

$$+a_0\frac{(-\varepsilon)^n}{n}=\alpha_n\,,\quad n\ge1\,. \tag{11}$$

Здесь α_n – коэффициенты разложения функции $f(\varphi_1)$ в ряд Фурье по косинусам,

$$G_n(\lambda)=\frac{(-1)^nR^n\lambda^n}{n!}\begin{pmatrix}\sin\lambda a\\ \cos\lambda a\end{pmatrix}\begin{array}{l}\text{при } n \text{ четном,}\\ \text{при } n \text{ нечетном,}\end{array}\qquad n\ge0\,. \tag{12}$$

Введем замену $a_n=x_n\cdot R^n$, $\beta_n=\alpha_n$ при $n\ge1$, $\beta_0=\alpha_0\cdot(\ln\varepsilon)^{-1}$. Тогда систему можно записать в стандартной форме

$$x_n+\sum_{m=0}^\infty x_m\cdot K_{mn}=\beta_n\,,\quad n\ge0\,. \tag{13}$$

В этой системе

$$K_{00}=\frac{2}{\ln\varepsilon}\int_0^\infty g(\lambda)\,\lambda^{-1}\sin^2\lambda a\,d\lambda\,,\qquad K_{0n}=2\int_0^\infty g(\lambda)\,G_n(\lambda)\,\lambda^{-1}\sin^2\lambda a\,d\lambda\,;$$

$$K_{m0}=(-1)^{m+1}\varepsilon^{m+1}(\ln\varepsilon)^{-1}+\frac{2R^m}{(m-1)!\ln\varepsilon}\int_0^\infty g(\lambda)\lambda^{m-1}\sin\left(m\frac{\pi}{2}+\lambda a\right)\sin\lambda a\,d\lambda\,; \tag{14}$$

$$K_{mn}=(-1)^{m+n+1}\varepsilon^{m+n}C_{m+n-1}^n+\frac{2R^m}{(m-1)!}\int_0^\infty g(\lambda)\lambda^{m-1}G_n(\lambda)\sin\left(m\frac{\pi}{2}+\lambda a\right)\sin\lambda a\,d\lambda\,;$$

$$g(\lambda)=\frac{e^{-\lambda h}}{\operatorname{sh}\lambda h}\,,\quad C_m^n \text{ – биномиальные коэффициенты.}$$

Проведем исследование полученной бесконечной системы линейных уравнений (13). Для этого оценим ее матричные элементы.

Для интеграла $I_1=\int_0^\infty g(\lambda)\lambda^{m-1}|G_n(\lambda)|d\lambda$ имеем [4]

$$I_1 \le \frac{R^n}{n!}\int_0^\infty \frac{e^{-\lambda h}}{\mathrm{sh}\lambda h}\lambda^{n+m-1}d\lambda \le \frac{4(m+n-1)!R^n}{n!(2h)^{m+n}}. \qquad (15)$$

Из оценки (15) следует, что

$$\left|K_{mn}\right| < \left(\varepsilon^{m+n} + 8\varepsilon_1^{m+n}\right)\frac{(m+n-1)!}{n!(m-1)!}, \quad \varepsilon_1 = \frac{R}{2h} < \frac{1}{2}, \qquad (16)$$

и, следовательно, двойной ряд элементов K_{mn} сходится абсолютно при условии $R \cdot h^{-1} < 1$, $a \cdot R^{-1} < 1$, т.е. при условии $R < \min(a,h)$. Это есть условие того, что круг не касается границы полуполосы.

Если считать $\alpha_n \in l_2$, то систему (13) можно решать методом усечения и приближенные решения усеченных систем сходятся к точному решению в l_2 [5].

Найденные значения коэффициентов $x_n = a_n \cdot R^n$ определяют согласно формуле (9) функцию $A(\lambda)$. Тем самым формула (2) дает решение поставленной задачи. Последнее условие ограниченности функции $|u(x,y)|$ выполняется в силу свойств функции $A(\lambda)$.

Замечание. Предложенный метод можно применить и в том случае, когда на торце полуполосы задана ненулевая функция. Для решения такой задачи вначале надо решить задачу Дирихле для полуплоскости $x > a$, а затем на нее наложить решение с нулевым значением функции на торце и с обратными по знаку к первой задаче граничными условиями на грани $y = h$.

Другое возможное обобщение – это задача Неймана с нулевым или ненулевым значением функции на торце. Условие на окружности в каждой из этих задач может быть первого, второго или третьего рода.

Можно рассматривать также задачу с несимметричным расположением окружности в полуполосе и случай нескольких окружностей разных размеров.

Список литературы

1. Коренев Б.Г. Задачи теплопроводности и термоупругости / Б.Г. Коренев. – М.: Наука, 1980. – 400 с.

2. Карслоу Г. Теплопроводность твердых тел / Г. Карслоу, Д. Егер. – М.: Наука, 1964. – 488 с.

3. Канторович Л.В. Приближенные методы высшего анализа / Л.В. Канторович, В.И. Крылов. – Л.: Физматгиз, 1962. –708 с.

4. Прудников А.П. Интегралы и ряды / А.П. Прудников, Ю.А. Брычков,. О.И. Маричев. – М.: Наука, 1981. – 800 с.

5. Канторович Л.В. Функциональный анализ / Л.В. Канторович, Г.П. Акилов. – М.: Наука, 1977. – 744 с.

Рецензент: д-р техн. наук, проф., зав. каф. Г.И. Костюк, Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского «ХАИ», Харьков

Поступила в редакцию 12.06.09

Задача стаціонарної теплопровідності для півсмуги з круговим отвором

Крайову задачу стаціонарної теплопровідності для півсмуги з круговим отвором зведено до нескінченної системи лінійних алгебраїчних рівнянь, яка припускає застосування методу редукції.

Ключові слова: крайова задача теплопровідності, мішані умови, теореми додавання.

The problem of stationary thermoconductivity for a semistrip with circular hole

The boundary problem of stationary thermoconductivity for a semistrip with circular hole is brought to the infinite system of linear algebraic equations which makes possible the application of reduction method.

Keywords: the boundary problem of thermoconductivity, mixed conditions, addition theorems.