УДК 519.866: 338.27

Д.С. Ревенко, В.М. Вартанян

Параметрический синтез модели экспоненциального сглаживания для случая неопределенности исходных данных

Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского «ХАИ»

Рассмотрены теоретические вопросы получения гибридной модели экспоненциального сглаживания для случая неопределенности исходных данных. В качестве теоретической основы для учета факторов неопределенности был предложен метод интервального анализа, рассмотрены его основные положения, операции и свойства. Указано, что интервальные операции дают значительное расширение интервала прогноза, в качестве предотвращения негативного действия этого свойства интервальных операций предложен метод расчета «зоны качества интервального прогноза».

Ключевые слова: прогнозирование, экспоненциальное сглаживание, интервальный анализ, гибридная модель, параметр сглаживания, зона прогноза.

Постановка проблемы в общем виде

Современные динамические условия развития общества и экономики требуют непрерывного развития и усовершенствования методов прогнозирования. В настоящее время действия специалистов в области прогнозирования нацелены на получение оценок высокого качества прогноза и минимизацию его ошибок. Особое внимание уделяется учету фактора «неопределенности» при расчете прогноза. Одним из таких методов «учета» неопределенности является метод наложения интервальных операций на оптимальную прогнозную модель. Интервальное представление факторов неопределенности привлекает все большее внимание инженеров и экономистов, как именно ограничительный и наиболее адекватный метод прогнозирования, отвечающий многим практическим постановкам задач.

Анализ исследований и публикаций

Интервальные вычисления имеют достаточно богатую историю. Первые попытки регулярного использования интервального подхода к решению конкретных задач численного анализа относятся к рубежу 50 - 60-х гг. прошлого века. Решающим шагом на пути оформления идеи в самостоятельное математическое направление стала написанная в 1966 году основополагающая монография американского математика Романа Мура [2]. Первоначально это направление получило название «интервальный анализ», а затем чаще стал употребляться термин «интервальная математика». Такие авторы, как Л.Г. Раскин, Р. Каерфот, Б.С. Добронец, Л. Жолен, М. Кифер, Э. Дидри, Э. Вальтер, С.П. Шарый, Ю.И. Шокин, внесли неоценимый вклад в развитие современного этапа интервальной математики.

Выделение нерешенной проблемы

Практика показывает, что прогнозирование достаточно сложно. Иногда прогноз основывается на хорошо изученных закономерностях и осуществляется наверняка. Однако в социально-экономической области обычно не удается дать однозначный обоснованный прогноз. Причины – неопределенности в различных аспектах производственной и экономической ситуации.

Представление прогнозных моделей в качестве интервальных данных является одним из подходов к решению задач, связанных с прогнозированием процессов, имеющих неопределенность исходных данных.

Решение поставленной задачи

Результатом интервальных расчетов являются интервалы (*интервал* – это замкнутый числовой промежуток), в которых могут находиться итоги вычислений. Применение интервальных вычислений имеет преимущество перед детерминированными или вероятностными методами вычислений – не требуется знание вероятностных характеристик факторов, которые на практике редко бывают точно известными. Фактически вместо них используют их статистические оценки. В этом случае требуется кроме положения центра рассеивания указывать двусторонние границы получаемых результатов. Например, интервал между *2* и *3* содержит все вещественные числа между *2* и *3*, включая их самих, и обозначается как *[2,3]*. Соответственно, интервальная неопределенность – это состояние неполного (частичного) знания об интересующей нас величине, когда мы можем лишь указать ее принадлежность данному интервалу. Иными словами, мы можем предъявить только границы возможных значений этой величины (либо пределы ее изменения), и ширина получающегося интервала является естественной мерой нашей неопределенности (неоднозначности).

1. Аппарат интервального анализа

Интервальная арифметика имеет свою специфику, которая выражается в свойствах интервальных чисел и в операциях над ними.

Под правильным интервалом $X = [\overline{x}, \underline{x}]$, $\underline{x} \le \overline{x}$ понимается замкнутое ограниченное подмножество вещественных чисел вида

$$X = \{x \mid x \in \Re,\ \underline{x} \le x \le \overline{x}\}, \qquad (1)$$

где $\underline{x}, \overline{x}$ – левые и правые концы (нижняя и верхняя границы) интервала X соответственно. Множество всех правильных интервалов обозначается через $\Im\Re$. Элементы множества $\Im\Re$ называются также интервальными числами.

Два интервала (интервальных числа) считаются равными, если их одноименные концы совпадают, т.е.:

$$X = Y \Leftrightarrow \underline{x} = \underline{y}, \overline{x} = \overline{y}. \qquad (2)$$

Отношение порядков на множестве $\Im\Re$ определяется следующем образом:

$$\begin{aligned} X \subseteq Y &\Leftrightarrow \underline{x} = \underline{y}, \overline{x} = \overline{y}, \\ X < Y &\Leftrightarrow \overline{x} < \underline{y}, \\ X \le Y &\Leftrightarrow \underline{x} \le \underline{y}, \overline{x} \le \overline{y}. \end{aligned} \qquad (3)$$

Пересечение двух интервалов X и Y пусто, $X \cap Y = Ш$, если $X < Y$ или $Y < X$. Если X, Y – интервалы с непустым пересечением, то

$$X \cap Y = [max\{\underline{x}, \underline{y}\},\ min\{\overline{x}, \overline{y}\}],$$
$$X \cup Y = [min\{\underline{x}, \underline{y}\},\ max\{\overline{x}, \overline{y}\}]. \tag{4}$$

Операции взятия точной нижней $X \wedge Y = inf_{\subseteq}\{X, Y\})$ и точной верхней $X \vee Y = sup_{\subseteq}\{X, Y\})$ границей по включению определяются следующим образом

$$X \wedge Y = [max\{\underline{x}, \underline{y}\},\ min\{\overline{x}, \overline{y}\}],$$
$$X \vee Y = [min\{\underline{x}, \underline{y}\},\ max\{\overline{x}, \overline{y}\}]. \tag{5}$$

Замечание 1. Если X, Y есть одномерные интервалы с ненулевым пересечением, то $X \wedge Y$ и $X \vee Y$ совпадают с $X \cap Y$ и $X \cup Y$ соответственно. Однако в общем случае это не так.

Симметричным называется интервал X, где $\underline{x} = \overline{x}$.

Шириной интервала X называется величина

$$widX = \overline{x} - \underline{x}. \tag{6}$$

Середина интервала X есть полусумма его концов

$$midX = \frac{\underline{x} + \overline{x}}{2}. \tag{7}$$

Расстояние между интервалами X, Y не $\Im\Re$ вводится равенством

$$dist(X, Y) = max\{|\underline{x} - \underline{y}|, |\overline{x} - \overline{y}|\}. \tag{8}$$

Знак интервала X определяется как

$$sgn\,X = \begin{cases} 1, & X > 0, \\ -1, & X < 0, \\ \text{не определен}, & 0 \in X. \end{cases} \tag{9}$$

Вещественные числа $X \in \Re$ отождествляется с интервалами нулевой ширины (вырожденными интервалами) $X = [\underline{x}, \overline{x}]$.

Интервальная арифметика. Классическая интервальная арифметика является алгебраической системой $(\Im\Re,\ +,\ -,\ \cdot,\ /)$, носитель которой есть множество правильных интервалов $\Im\Re = \{X = [\underline{x}, \overline{x}] \mid \underline{x \le \overline{x},\ \underline{x},\ \overline{x} \in \Re}\}$, а бинарные операции: сложение, вычитание, умножение, деление, определены следующим образом:

$$X \,\&\, Y = \{x \,\&\, y \mid x \in X, y \in Y\}, \tag{10}$$

где $\& = \{+, /, \cdot, /\}$. Развернутое определение интервальных арифметических операций имеет такой вид:

$$X + Y = [\underline{x} + \underline{y}, \overline{x} + \overline{y}], \tag{11}$$

$$X - Y = [\underline{x} - \underline{y}, \overline{x} - \overline{y}], \tag{12}$$

$$X \cdot Y = [min\{\underline{x} \cdot \underline{y}, \underline{x} \cdot \overline{y}, \overline{x} \cdot \underline{y}, \overline{x} \cdot \overline{y}\}, max\{\underline{x} \cdot \underline{y}, \underline{x} \cdot \overline{y}, \overline{x} \cdot \underline{y}, \overline{x} \cdot \overline{y}\}], \tag{13}$$

$$X/Y = [min\{\underline{x} / \underline{y}, \underline{x} / \overline{y}, \overline{x} / \underline{y}, \overline{x} / \overline{y}\}, max\{\underline{x} / \underline{y}, \underline{x} / \overline{y}, \overline{x} / \underline{y}, \overline{x} / \overline{y}\}], \tag{14}$$

$$c \cdot X = \begin{cases} [c \cdot \underline{x}, c \cdot \overline{x}], & если \quad c \geq 0, \\ [c \cdot \overline{x}, c \cdot \underline{x}], & если \quad c < 0, \end{cases} \quad c \in \Re, \tag{15}$$

$$X^2 = \begin{cases} [min\{\underline{x}^2 \overline{x}^2\}, max\{\underline{x}^2 \cdot \overline{x}^2\}] & если \quad \underline{x} \cdot \overline{x} > 0 \\ [0, max\{\underline{x}^2 \cdot \overline{x}^2\}] & если \quad \underline{x} \cdot \overline{x} < 0 \end{cases}, \tag{16}$$

$$X^{-1} = [\frac{1}{\underline{x}}, \frac{1}{\overline{x}}] \quad только \; если \quad \overline{x} \cdot \underline{x} > 0. \tag{17}$$

При этом через интервал $(-X)$ обозначается $(-1) \cdot X$, точка для обозначения умножения, как правило, опускается.

Свойства интервально-арифметических операций. Перечислим основные алгебраические свойства классической интервальной арифметики:

1. *Ассоциативность и коммутативность*. Для любых интервалов $X, Y, Z \in \Im\Re$ имеют место равенства (18):

$$\begin{gathered} X + (Y + Z) = (X + Y) + Z, \\ X + Y = Y + X, \\ X \cdot (Y \cdot Z) = (X \cdot Y) \cdot Z, \\ X \cdot Y = Y \cdot X. \end{gathered} \tag{18}$$

Нулевым сложением является число 0, а единицей умножения – число 1 (которые, как отмечалось, отождествляются с вырожденными интервалами $[0,0]$, $[1,1]$). Другими словами,

$$X + 0 = 0 + X = X,$$

$$X \cdot 1 = 1 \cdot X = X.$$

2. Если один из операндов является невырожденным интервалом, то и результат арифметической операции – также невырожденный интервал. Исключение составляет умножение на $0 = [0,0]$. Следовательно, для невырожденного интервала X не существует обратных по сложению и умножению элементов (так как, если $X + Y = 0$, $Z \cdot X = 1$, то интервалы X, Y, Z должны быть вырожденными). Таким образом, вычитание не обратно сложению, деление не обратно умножению, т.е. $X - X \neq 0$, $X / X \neq 1$ при $widX > 0$. Однако всегда выполняются включения $0 \in X - X$, $1 \in X / X$.

3. *Субдистрибутивность*. Для любых интервалов $X, Y, Z \in \Im\Re$ выполнено включение

$$X(Y + Z) \subseteq X \cdot Y + X \cdot Z. \tag{19}$$

Дистрибутивность (когда включение обращается в точное равенство):

$$X(Y + Z) = X \cdot Y + X \cdot Z. \tag{20}$$

Имеет место в некоторых частных случаях, например, если:

- $X = x \in \Re$ (интервал X – вырожденный);
- $Y \cdot Z \geq 0$ (знаки интервалов Y, Z совпадают);
- Y, Z – симметричные интервалы.

4. *Монотонность по включению*. Если $X \subseteq X'$, $Y \subseteq Y'$, то

$$X \& Y \subseteq X' \& Y', \tag{21}$$

где $\& \in \{+, /, \cdot, /\}$.

Проблемы классической интервальной арифметики. Классическая интервальная математика охватывает довольно широкий круг задач. Однако существуют задачи, которые неразрешимы (или не всегда разрешимы) в терминах классического аппарата вследствие слабых алгебраических свойств классической интервальной арифметики:

- Все интервалы с ненулевой шириной, т.е большинство элементов $\Im\Re$, не имеют ни противоположных, ни обратных элементов;
- Арифметические операции связаны друг с другом довольно слабыми соотношениями (например, субдистрибутивности), а полноценная дистрибутивность умножения и деления относительно сложения и вычитания не имеет места.

Но, несмотря на отмеченные недостатки классической интервальной математики, она позволяет решать задачи, связанные с построением прогнозных моделей.

2. Сущность метода экспоненциального сглаживания

Одним из наиболее эффективных методов краткосрочного и среднесрочного прогнозирования является прогнозирование на основе экспоненциального сглаживания. Почти все эффективные методы краткосрочного прогнозирования основываются на экспоненциальном сглаживании. Исторически метод был открыт Р. Брауном в 1956 г. [1]. Основные доработки в теорию моделирования на основе экспоненциального прогнозирования были также привнесены К. Льюисом.

Преимущество метода экспоненциального сглаживания при краткосрочном прогнозировании состоит главным образом в том, что он достаточно прост и удобен в использовании по сравнению с другими методами. Кроме того, экспоненциальное сглаживание обеспечивает быстрое реагирование прогноза на все события, происходящие на протяжении определенного периода, что позволяет построить т.н. «адаптивную прогнозную модель» (возможность учета весов исходной информации). Такая модель значительно лучше учитывает случайную колеблемость функции, чем, например, трендовая модель. Тем не менее, прогнозирование спроса методом экспоненциального сглаживания будет более точным, если факторы, определяющие спрос, не подвержены резким колебаниям.

Метод экспоненциального сглаживания дает возможность получить оценку параметров тренда, характеризующих не средний уровень процесса, а тенденцию, сложившуюся к моменту последнего наблюдения.

При использовании методики экспоненциального сглаживания более поздним данным уделяется большее внимание, чем ранним. Такой метод обеспечивает быстрое получение прогноза на один период вперед, при этом автоматически корректируя любой прогноз при отличиях фактических результатов от прогнозируемых. Простая и прагматическая модель временного ряда имеет вид

$$X_t = b + \varepsilon_t, \tag{22}$$

где b - константа;

ε_t - случайная ошибка.

Константа b относительно стабильна на каждом временном интервале, но может также медленно изменяться во времени. Один из интуитивно ясных способов выделения b состоит в том, чтобы использовать сглаживание скользящим средним, в котором последним наблюдением приписываются большие веса, чем предпоследним, предпоследним – большие веса, чем предпоследним, и т.д. Простое экспоненциальное сглаживание именно в этом и состоит. Здесь более старым наблюдениям приписывают экспоненциально убывающие веса, при этом в отличие от скользящего среднего учитывают все предыдущие наблюдения ряда, а не те, что попали в определенное окно. Модель экспоненциального сглаживания можно представить следующим образом:

$$F_{t+1} = \alpha \cdot D_t + (1+\alpha) \cdot F_t, \tag{23}$$

где α – константа сглаживания;

F_{t+1} – прогноз на следующий период;

F_t – прогноз на текучий период;

D_t – фактический спрос на текущий период.

Константу сглаживания α выбирают в диапазоне от 0 до 1. Величина константы зависит от специфики данных. Если величина α ближе к 0, это значит, что прогноз на следующий период будет в основном зависеть от данных прошлых периодов, в значительной меньшей степени учитывая последние фактические данные. Если же величина α стремится к 1, то на прогноз в большей степени влияет фактический спрос в текущем периоде, чем данные прошлых периодов.

Одним из методов получения константы α является расчет по формуле соотношения Брауна:

$$\alpha = \frac{2}{n-1}, \tag{24}$$

где n – число точек (наблюдений), для которых динамика ряда считается однородной и устойчивой (число точек в интервале сглаживания).

3. Интервальная модель экспоненциального сглаживания

Для получения необходимого решения предлагается использовать математический аппарат интервальных вычислений. Обозначим $X=[\underline{x},\overline{x}]$ – интервальное число, где $\underline{x}<x<\overline{x}$, тогда модель экспоненциального сглаживания можно представить следующим выражением:

$$\begin{gathered}[\underline{F_t},\overline{F_t}] = [\underline{\alpha},\overline{\alpha}] \cdot [\underline{A_{t-1}},\overline{A_{t-1}}] + \\ +\sum_{i=1}^{t-2}[\underline{\alpha},\overline{\alpha}] \cdot (1-[\underline{\alpha},\overline{\alpha}])^i \cdot [\underline{A_{t-(i+1)}},\overline{A_{t-(i+1)}}]\end{gathered}. \tag{25}$$

Следует также заметить, что интервальные вычисления, а именно операции умножения и деления, дают большое расширение интервала результата прогноза. В целях получения качественного прогнозного интервала предлагается применять следующий метод проведения расчетов:

1. Определение реально возможного диапазона значений прогнозируемой величины по периодам. На данном этапе получаем обобщенные экспертные оценки группы экспертов. Каждый специалист выдает оценку «своего» участка проблемной сети в виде интервала. Реальный возможный диапазон (РВД) – полный интервал реально возможных значений, в котором с практически 100%-й вероятностью (наверняка) окажется, по мнению эксперта, соответствующая характеристика. Эксперт для этого определяет экстремальные значения показателя (нижнюю и верхнюю границу) исходя из крайних сценариев развития исследуемого объекта.

2. Наложение интервальных границ на модель простого экспоненциального сглаживания.

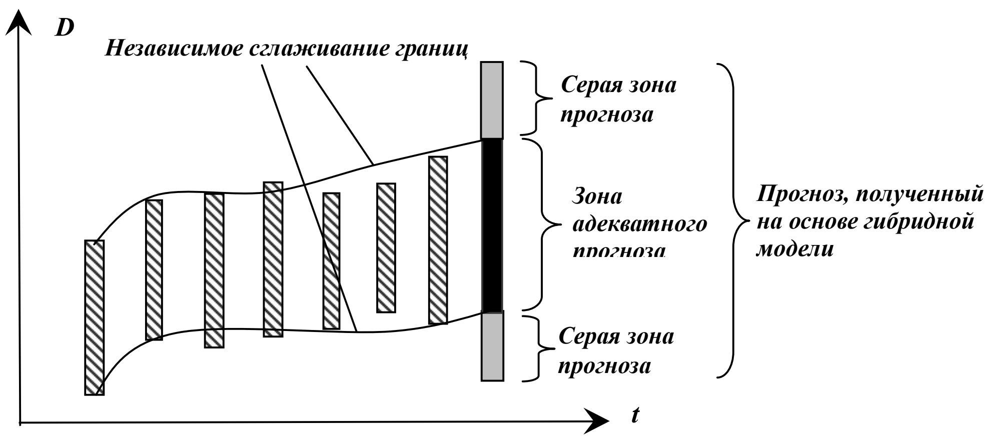
3. Выбор наилучшего коэффициента сглаживания на основе соотношения Брауна.

4. Прогнозирование на основе полученной гибридной модели интервального экспоненциального сглаживания и наилучшего параметра α .

5. Прогнозирование на основе простого экспоненциального сглаживания отдельно нижней и верхней границ интервала.

6. Наложение прогнозных значений независимо определенных верхней и нижней границ интервала на полученный прогнозный результат на основе гибридной модели (рисунок).

7. Визуализация и интерпретация полученного прогноза.



Метод получения зоны адекватного интервального прогноза

Выводы

В статье рассмотрены теоретические основы интервального прогнозирования на основе модели простого экспоненциального сглаживания. Данная модель может быть использованы для прогнозирования краткосрочных процессов с интервальной неопределенностью.

В дальнейшем представляет интерес усовершенствование интервальной модели до вида моделей экспоненциального сглаживания «Холта-Уинтерса» и «Бокса-Дженикса», которые дают возможность прогнозировать в условиях возрастающего или убывающего тренда и присутствия сезонности.

Список литературы

1. Грабовецький Б.Є. Економічне прогнозування та планування / Б.Є.Грабовецький – К.: Центр навчальної літератури, 2003. – 188 с.
2. Прикладной интервальный анализ / Л. Жолен, М. Кифер, О. Дидри, Э. Вальтер – М.: Институт компьютерных исследований, 2007. – 468 с.
3. Бережная Е.В. Математические методы моделирования экономических систем: учеб. пособие / Е.В. Бережная, В.И. Бережной. – М.: Финансы и статистика, 2002. – 378 с.

Рецензент: д.т.н., проф. зав. каф. И.В. Чумаченко, Национальный аэрокосмический университета им. Н.Е. Жуковского «ХАИ», г. Харьков.

Поступила в редакцию 16.06.09

Параметричний синтез моделі експоненціального згладжування для випадку невизначеності вхідних даних

Розглянуто теоретичні питання одержання гібридної моделі експоненціального згладжування для випадку невизначеності вхідних даних. Як теоретичну основу для урахування чинників невизначеності запропоновано методи інтервального аналізу, розглянуто його положення, операції й властивості. Вказано також, що інтервальні операції дають значне розширення інтервалу прогнозу, як запобігання негативній дії цієї властивості інтервальних операцій запропоновано метод розрахунку «зони якості інтервального прогнозу».

Ключові слова: прогнозування, експоненціальне згладжування, інтервальний аналіз, гібридна модель, параметр згладжування, зона прогнозу.

Parametric synthesis of model exponential smoothing for uncertain quantity

Theoretical questions of reception of hybrid model exponential smoothings for a case of uncertainty of initial data are considered. As a theoretical basis for the account of factors of uncertainty the method of the interval analysis has been offered, its substantive provisions, operations and properties are considered. It is specified, that interval operations give considerable expansion of an interval of the forecast, as prevention of negative action of this property of interval operations the calculation method of "a zone of quality of the interval forecast" is offered.

Keywords: forecasting, exponential smoothing, interval analysis, hybrid model, zone of forecasting.