

Решение основной бигармонической проблемы в трапециевидной области

Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского «ХАИ»

В замкнутом виде получено приближенное аналитическое решение основной краевой задачи для бигармонического уравнения в трапециевидной области. Решение построено с помощью метода расширения области до канонической в сочетании с методом наименьших квадратов по границе. Исследованы практическая сходимость и точность полученной аппроксимации неизвестного точного решения.

Ключевые слова: основная бигармоническая проблема, приближенное аналитическое решение, трапециевидная область, расширение области до канонической, метод наименьших квадратов по границе

Теоретической базой метода сопряжения конструктивных элементов [1], посредством которого определяются условия перехода на смежных границах элементов упругих систем при исследовании их устойчивости методом идентификации краевых условий [1], являются неоднородные краевые задачи теории подкрепленных и гладких оболочек и пластин, взаимодействующих в составе системы сложным образом. Анализ работы этих конструктивных элементов выполняется путем построения приближенных аналитических решений краевых задач теории оболочек и пластин, явно выраженных через краевые кинематические функции. Ниже получено решение основной краевой задачи для бигармонического уравнения в трапециевидной области.

Постановка и решение задачи

Рассматривается основная бигармоническая проблема в трапециевидной

области Ω с границей $\Gamma = \bigcup_{j=1}^4 \Gamma_j$:

$$Aw(x, y) \equiv \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\zeta_1 \cdot \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \zeta_2 \cdot \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = 0 \quad (x, y) \in \Omega, \quad (1)$$

$$w|_{\Gamma} = \Phi(s), \quad \frac{\partial w}{\partial n}|_{\Gamma} = \Psi(s), \quad (2)$$

где $w(x, y)$ – искомая функция; (x, y) – безразмерные координаты, связанные с размерными (x_0, y_0) соотношениями $x = x_0/a$, $y = y_0/h$ ($2a, 2h$ – основание и высота трапеции, $h/a = \lambda$); $\zeta_1 = (D_{12} + 2D_{66})/\lambda^2 D_{11}$, $\zeta_2 = D_{22}/\lambda^4 D_{11}$ (D_{ki} – коэффициенты, зависящие от физико-механических характеристик исследуемого объекта); $\Phi(s)$, $\Psi(s)$ – функции соболевского класса $W_2^{(1)}(\Gamma)$; \bar{n} – внешняя нормаль к границе области; s – дуговая координата по границе Γ , изменяющаяся в пределах каждого участка Γ_j в интервале $s_j \in [-1; 1]$ (обход границы – см. рис.1). Параметрические уравнения участков границы имеют следующий вид (α, β – углы при основании трапеции):

$$\Gamma_1: \begin{cases} x = x_1(s_1) = \lambda \cdot (1 - s_1) \cdot \operatorname{ctg} \alpha - 1; \\ y = y_1(s_1) = -s_1; \end{cases} \quad \Gamma_2: \begin{cases} x = x_2(s_2) = s_2; \\ y = y_2(s_2) = -1; \end{cases} \quad \Gamma_3: \begin{cases} x = x_3(s_3) = 1 - \lambda \cdot (s_3 + 1) \cdot \operatorname{ctg} \beta; \\ y = y_3(s_3) = s_3; \end{cases}$$

$$\Gamma_4: \begin{cases} x = x_4(s_4) = \lambda \cdot (\operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{ctg} \beta) - [1 - \lambda \cdot (\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta)] \cdot s_4; \\ y = y_4(s_4) = 1. \end{cases}$$

Систему краевых функций представим в виде двух компонент с явным выделением полинома, принимающего на краях участков Γ_j заданные значения самой функции $w(x, y)$ и ее производных $\frac{\partial w}{\partial x}$, $\frac{\partial w}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$. Для этого введем (по аналогии с работой [2]) функцию:

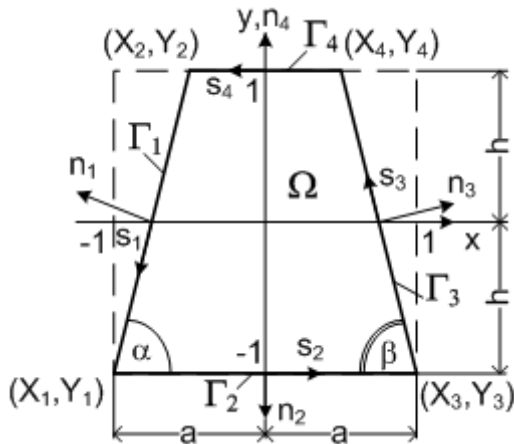


Рис.1. Основные обозначения

$$w_0(x, y) = A_0 + A_1x + A_2y + A_3xy + A_4x^2 + A_5y^2 + A_6xy^2 + A_7x^2y + A_8x^3 + A_9y^3 + A_{10}xy^3 + A_{11}x^3y + A_{12}g_{11}(x, y) + A_{13}g_{12}(x, y) + A_{14}g_{21}(x, y) + A_{15}g_{22}(x, y),$$

где $g_{ik}(x, y)$ – известные функции (см. [2]).

В методе конечных элементов такому представлению соответствует прямоугольник Богнара – Фокса – Шмидта [3].

Коэффициенты $A_k (k = \overline{0, 15})$ определяются из решения линейной системы шестнадцати алгебраических уравнений:

$$w_0(X_i, Y_i) = W_{i,1}; \quad \frac{\partial w_0}{\partial x}(X_i, Y_i) = W_{i,2}; \quad \frac{\partial w_0}{\partial y}(X_i, Y_i) = W_{i,3}; \quad \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y}(X_i, Y_i) = W_{i,4}, \quad (3)$$

$$i = \overline{1, 4},$$

где $W_{i,j}$ – известные значения функции и ее производных в угловых точках.

Элементы вектор-строки

$$\bar{\mathbf{w}} = \{\bar{w}_k(x, y)\}_{k=1}^{16} = \mathbf{c} \cdot \mathbf{D}^{-1}, \quad (4)$$

где $\mathbf{c} = [1, x, y, xy, x^2, y^2, xy^2, x^2y, x^3, y^3, xy^3, x^3y, g_{11}(x, y), g_{12}(x, y), g_{21}(x, y), g_{22}(x, y)]$ – вектор-строка, \mathbf{D} – матрица системы (3), представляют собой функции формы и описывают распределение функции $w_0(x, y)$ некоторым образом от углов вглубь области при заданных по отдельности в углах $W_{i,j} = 1$.

Тогда,

$$w_0(x, y) = \bar{\mathbf{w}} \cdot \bar{\mathbf{W}}, \quad (5)$$

где $\bar{\mathbf{W}} = [W_{1,1}, W_{1,2}, W_{1,3}, W_{1,4}, W_{2,1}, \dots, W_{4,4}]^T$ – вектор-столбец узловых значений.

Функция (5), вообще говоря, не удовлетворяет уравнению (1) и должна быть уточнена с помощью функции $\bar{w}_0(x,y) = \bar{\omega} \cdot \bar{W}$, где $\bar{\omega} = \{\bar{\omega}_k(x,y)\}_{k=1}^{16}$ – некоторые функции, дополняющие функции формы $\bar{\omega}_k(x,y)$ до бигармонических. Функция $\bar{w}_0(x,y)$ определяется из решения краевой задачи:

$$A\bar{w}_0(x,y) = -A w_0(x,y) \text{ в } \Omega^* = \{(x,y): |x| < 1, |y| < 1\}; \bar{w}_0|_{\Gamma^*} = \frac{\partial \bar{w}_0}{\partial n}|_{\Gamma^*} = 0, \Gamma^* = \partial\Omega^*.$$

Функция $\bar{w}_0(x,y)$, которая строится с помощью процедуры Ритца со специальной координатной системой $\{H_m(x) \cdot H_n(y)\}_{m,n=0}^{M,N}$ (подробнее см. ниже), обеспечивает на границе Γ условия, отличные от однородных, не влияя при этом на условия в углах области Ω .

Покажем на численном примере, что поправку $\bar{w}_0(x,y)$ можно не учитывать вообще, или, что тоже самое, что функции формы весьма близки к бигармоническим полиномам. Если $W_{1,1} = 1$ и другие $W_{i,j}$ в углах отсутствуют, то $w_0(x,y) = \bar{\omega}_1(x,y)$, $\bar{w}_0(x,y) = \bar{\omega}_1(x,y)$. На графиках рис.2 представлено распределение в области Ω^* функций $\bar{\omega}_1(x,y)$ и $\bar{\omega}_1(x,y)$, а также их вид на стороне Γ_1 . Пренебрежимая малость компоненты $\bar{\omega}_1(x,y)$ не требует комментария. То же касается остальных $\bar{\omega}_k(x,y)$.

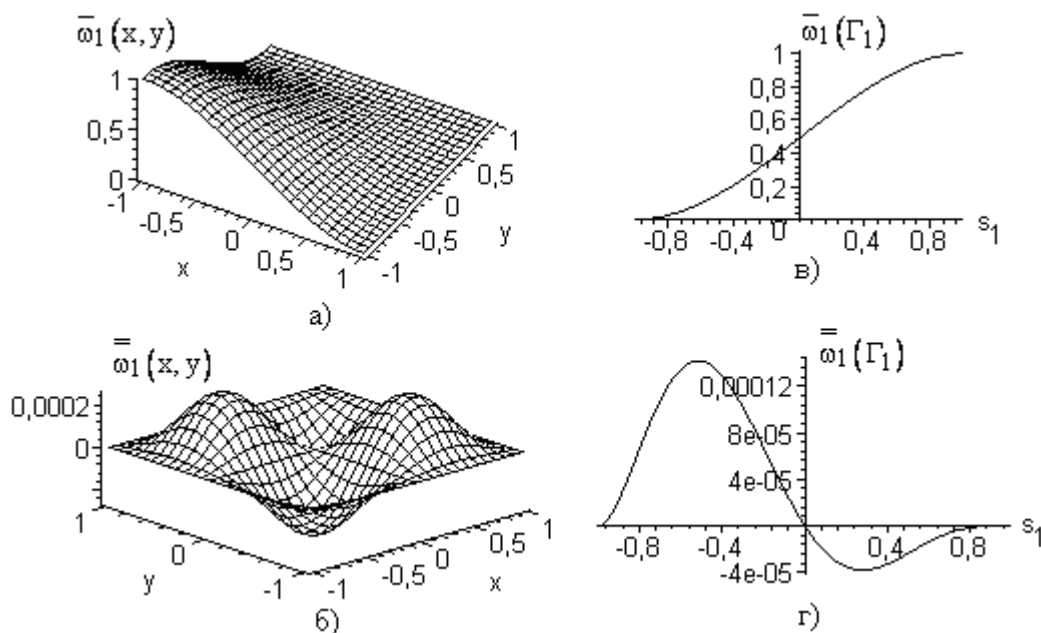


Рис.2. К обоснованию малости функций $\bar{\omega}_k(x,y)$

а – $\bar{\omega}_1(x,y)$, $(x,y) \in \Omega^*$; б – $\bar{\omega}_1(x,y)$, $(x,y) \in \Omega^*$; в – $\bar{\omega}_1(\Gamma_1)$; г) – $\bar{\omega}_1(\Gamma_1)$

Теперь краевые условия (2) можно записать следующим образом:

$$w|_{\Gamma} = \Phi(s) = \Phi_0(s) + \Phi_1(s),$$

$$\left. \frac{\partial w}{\partial n} \right|_{\Gamma} = \Psi(s) = \Psi_0(s) + \Psi_1(s),$$

где

$$\Phi_0(s) = w_0|_{\Gamma}, \quad \Psi_0(s) = \left. \frac{\partial w_0}{\partial n} \right|_{\Gamma}, \quad (6)$$

а краевые функции $\Phi_1(s) = \Phi(s) - \Phi_0(s)$, $\Psi_1(s) = \Psi(s) - \Psi_0(s)$, обращающиеся вместе со своими первыми производными в нуль на краях участков Γ_j , могут при необходимости быть представлены в виде разложения по полной ортонормированной в метрике $L_2(-1,1)$ системе многочленов $H_n(s_j)$ [4]:

$$\Phi_1(s_j) = \sum_{k_j=0}^{K_j} \phi_{j,k_j} \cdot H_{k_j}(s_j), \quad \Psi_1(s_j) = \sum_{k_j=0}^{K_j} \psi_{j,k_j} \cdot H_{k_j}(s_j), \quad j = \overline{1,4}.$$

Искомое решение задачи (1)-(2) состоит, таким образом, из двух компонент:

$$w(x, y) = w_0(x, y) + w_1(x, y),$$

где $w_1(x, y)$ – решение краевой задачи:

$$Aw_1(x, y) = 0 \quad (x, y) \in \Omega, \quad (7)$$

$$w_1|_{\Gamma} = \Phi_1(s), \quad \left. \frac{\partial w_1}{\partial n} \right|_{\Gamma} = \Psi_1(s). \quad (8)$$

Для построения полного решения задачи (1)-(2) расширим исходную область Ω до канонической, в качестве которой примем прямоугольник.

Отыщем функцию $\bar{w}(x, y)$, удовлетворяющую бигармоническому уравнению в области $\Omega^* = \{(x, y) : |x| < 1, |y| < 1\}$, при произвольно заданных на границе $\Gamma^* = \partial\Omega^*$ значениях самой функции и ее нормальных производных при условии, что в углах области они отсутствуют:

$$\begin{aligned} \bar{w}(x, -1) &= \sum_{m_1=0}^{M_1} A_{1,m_1} H_{m_1}(x); & \bar{w}(x, 1) &= \sum_{m_2=0}^{M_2} A_{2,m_2} H_{m_2}(x); \\ \frac{\partial \bar{w}}{\partial y}(x, -1) &= \sum_{m_3=0}^{M_3} A_{3,m_3} H_{m_3}(x); & \frac{\partial \bar{w}}{\partial y}(x, 1) &= \sum_{m_4=0}^{M_4} A_{4,m_4} H_{m_4}(x); \\ \bar{w}(-1, y) &= \sum_{n_1} B_{1,n_1} H_{n_1}(y); & \bar{w}(1, y) &= \sum_{n_2} B_{2,n_2} H_{n_2}(y); \\ \frac{\partial \bar{w}}{\partial x}(-1, y) &= \sum_{n_3} B_{3,n_3} H_{n_3}(x); & \frac{\partial \bar{w}}{\partial x}(1, y) &= \sum_{n_4} B_{4,n_4} H_{n_4}(x). \end{aligned} \quad (9)$$

Введем в рассмотрение четыре функции:

$$\begin{aligned} \eta_1(z) &= \frac{1}{4}(2 - 3z + z^3), & \eta_2(z) &= \frac{1}{4}(2 + 3z - z^3), \\ \eta_3(z) &= \frac{1}{4}(1 - z - z^2 + z^3), & \eta_4(z) &= \frac{1}{4}(-1 - z + z^2 + z^3), \end{aligned}$$

такие, что:

$$\begin{aligned} \eta_1(-1) &= 1, \quad \eta_1(1) = 0, \quad \eta_1'(-1) = 0, \quad \eta_1'(1) = 0; & \eta_3(-1) &= 0, \quad \eta_3(1) = 0, \quad \eta_3'(-1) = 1, \quad \eta_3'(1) = 0; \\ \eta_2(-1) &= 0, \quad \eta_2(1) = 1, \quad \eta_2'(-1) = 0, \quad \eta_2'(1) = 0; & \eta_4(-1) &= 0, \quad \eta_4(1) = 0, \quad \eta_4'(-1) = 0, \quad \eta_4'(1) = 1. \end{aligned}$$

Функция $\bar{w}(x, y)$ представляется в виде суммы двух слагаемых:

$$\bar{w}(x, y) = \bar{w}_0(x, y) + \bar{w}_1(x, y) ,$$

где компонента

$$\bar{w}_0(x, y) = \sum_{i=1}^4 \eta_i(y) \sum_{m_i} A_{i,m_i} H_{m_i}(x) + \sum_{j=1}^4 \eta_j(x) \sum_{n_j} B_{j,n_j} H_{n_j}(y)$$

точно выполняет условия на границе, а функция $\bar{w}_1(x, y)$ отыскивается из решения краевой задачи:

$$A \bar{w}_1(x, y) = -A \bar{w}_0(x, y), (x, y) \in \Omega^* , \tag{10}$$

$$\bar{w}_1 \Big|_{\Gamma^*} = \frac{\partial \bar{w}_1}{\partial n} \Big|_{\Gamma^*} = 0 . \tag{11}$$

Вводя вектор-столбец

$$\mathbf{W} = \{W_k\}_{k=1}^{\sum (M_j+N_j+2)} = \left[\{A_{1,m_1}\}_{m_1=0}^{M_1}, \dots, \{A_{4,m_4}\}_{m_4=0}^{M_4}, \{B_{1,n_1}\}_{n_1=0}^{N_1}, \dots, \{B_{4,n_4}\}_{n_4=0}^{N_4} \right]^T$$

и вектор-строку

$$\boldsymbol{\omega}_0 = \{\omega_{0,k}(x, y)\}_{k=1}^{\sum (M_j+N_j+2)} = \left[\{\eta_1(y) H_{m_1}(x)\}_{m_1=0}^{M_1}, \dots, \{\eta_4(y) H_{m_4}(x)\}_{m_4=0}^{M_4}, \{\eta_1(x) H_{n_1}(y)\}_{n_1=0}^{N_1}, \dots, \{\eta_4(x) H_{n_4}(y)\}_{n_4=0}^{N_4} \right] ,$$

функцию $\bar{w}_0(x, y)$ перепишем в виде

$$\bar{w}_0(x, y) = \boldsymbol{\omega}_0 \cdot \mathbf{W} .$$

Приближенное решение задачи (10)-(11) строится методом Бубнова – Галеркина по координатной системе $\{H_m(x) \cdot H_n(y)\}_{m,n=0}^{M,N}$, полной в пространстве положительно определенного оператора A [4]:

$$\bar{w}_1(x, y) = \mathbf{H} \cdot \mathbf{C} ,$$

где

$\mathbf{C} = \{C_k\}_{k=1}^{(M+1)(N+1)} = [C_{0,0}, \dots, C_{0,N}, \dots, C_{M,0}, \dots, C_{M,N}]^T$ – вектор-столбец, составленный из неизвестных коэффициентов разложения;

$\mathbf{H} = \{h_k(x, y)\}_{k=1}^{(M+1)(N+1)} = [H_0(x)H_0(y), \dots, H_0(x)H_N(y), \dots, H_M(x)H_0(y), \dots, H_M(x)H_N(y)]$ – вектор-строка, элементы которой – соответствующие координатные функции.

Процедура Бубнова – Галеркина приводит к системе линейных уравнений

$$\mathbf{b} \cdot \mathbf{C} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{W} ,$$

где

$$\mathbf{b} = \{\alpha_{i,j}\} = \left\{ \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 h_i(x, y) \cdot A h_j(x, y) dx dy \right\}_{i,j=1}^{(M+1)(N+1)} ,$$

$$\mathbf{v} = \{\beta_{i,k}\} = \left\{ - \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 h_i(x, y) \cdot A \omega_{0,k}(x, y) dx dy \right\}_{i,k=0}^{(M+1)(N+1), \sum_{j=1}^4 (M_j+N_j+2)} .$$

Координатная система $\{H_m(x) \cdot H_n(y)\}_{m,n=0}^{M,N}$ является сильно минимальной системой в метрике энергетического пространства оператора краевой задачи, откуда следует устойчивость вычислительного процесса [4,5].

Тогда компонента решения, дополняющая функцию $\bar{w}_0(x, y)$ до бигармонической, записывается в виде

$$\bar{w}_1(x, y) = \mathbf{w}_1 \cdot \mathbf{W}, \quad (12)$$

где

$$\mathbf{w}_1 = \left\{ \omega_{1,k}(x, y) \right\}_{k=1}^{\sum_{j=1}^4 (M_j + N_j + 2)} = \mathbf{H} \cdot \mathbf{b}^{-1} \cdot \mathbf{v}.$$

Сходимость решения (12) численно продемонстрируем на примере, когда $\bar{w}_1(x, y) = \omega_{1,1}(x, y)$, т.е. при условии, что $W_1 = 1$ и все прочие $W_k = 0$. В таблице 1 приведены расстояния между элементами фундаментальной последовательности $\omega_{1,1}^{M,N}(x, y)$ (графики которых в сечениях $x = 0$, $y = 0$ приведены на рис.3) в смысле

$$L_2(\Omega^*): \rho^2 \left(\omega_{1,1}^{M,N}, \omega_{1,1}^{\bar{M},\bar{N}} \right) = \int_{\Omega^*} \left(\omega_{1,1}^{M,N} - \omega_{1,1}^{\bar{M},\bar{N}} \right)^2 d\Omega^*.$$

В той же таблице для возможности относительной оценки величины ρ^2 приведено отношение $\chi = \rho^2 \left(\omega_{1,1}^{M,N}, \omega_{1,1}^{\bar{M},\bar{N}} \right) / \left\| \omega_{1,1}^{M,N} \right\|_{L_2(\Omega^*)}^2$.

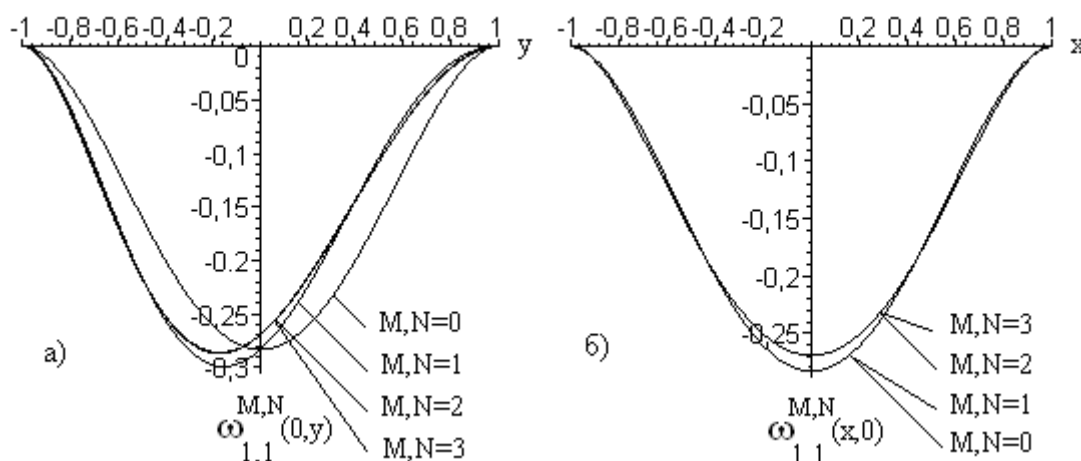


Рис. 3. Демонстрация сходимости функции $\omega_{1,1}(x, y)$ ($\lambda = 1$) при различном числе M, N координатных функций в сечениях $x = 0$ (а) и $y = 0$ (б)

Таблица 1

Расстояния между элементами фундаментальной последовательности $\omega_{1,1}^{M_j, N_j}$

$M_j, N_j; \bar{M}_j, \bar{N}_j$	0	1	2	3	4
$\rho^2 \left(\omega_{1,1}^{M_j, N_j}, \omega_{1,1}^{\bar{M}_j, \bar{N}_j} \right)$	$2,38 \cdot 10^{-3}$	$1,08 \cdot 10^{-4}$	$9,58 \cdot 10^{-7}$	$1,74 \cdot 10^{-8}$	
$\chi, \%$	4,9%	0,2%	$1,7 \cdot 10^{-5}\%$	$3,2 \cdot 10^{-7}\%$	

В конечном итоге искомая функция, выраженная через неопределенные коэффициенты краевых условий (9), представляется следующим образом:

$$\bar{w}(x, y) = \mathbf{w} \cdot \mathbf{W},$$

где $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_0 + \boldsymbol{\omega}_1 = \{\omega_k(x, y)\}_{k=1}^{\sum_{j=1}^4 (M_j + N_j + 2)}$ – вектор-строка, элементы-функции которой являются (приближенно) бигармоническими полиномами и описывают распределение в области Ω^* функции $\bar{w}(x, y)$ при действии отдельных единичных факторов, определяемых величинами $\{W_k\}$, иными словами $\bar{w}(x, y) = \omega_{\bar{K}}(x, y)$ при $W_{\bar{K}} = 1$ и прочих $W_k = 0$ для любого $k \neq \bar{K}$ (рис.4).

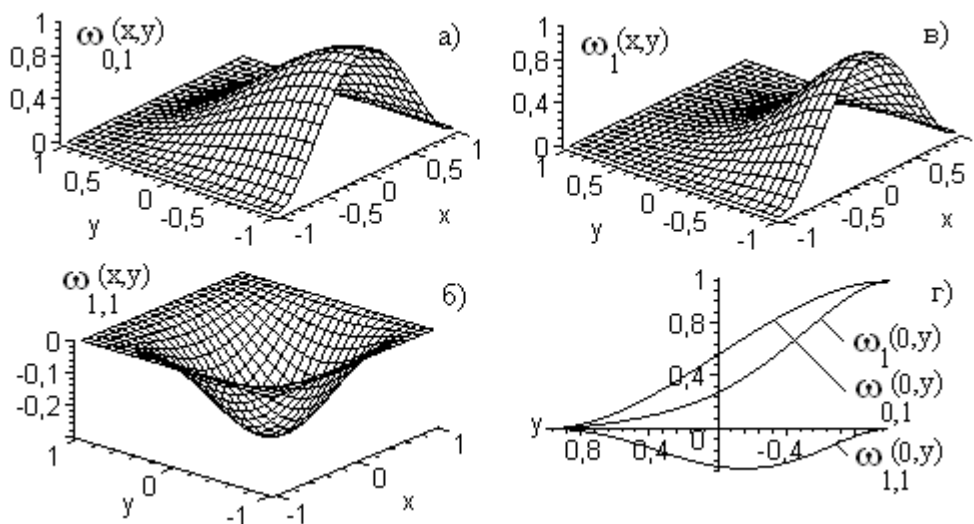


Рис. 4. Распределение в области Ω^* компонент решения $\bar{w}(x, y) = \omega_1(x, y) = \omega_{0,1}(x, y) + \omega_{1,1}(x, y)$, соответствующего крайевым условиям:
 $\bar{w}|_{\Gamma_2^*} = H_0(x)$, $\bar{w}|_{\Gamma_1^*, \Gamma_3^*, \Gamma_4^*} = \partial \bar{w} / \partial n|_{\Gamma^*} = 0$ ($\lambda = 1$, $D_{11} = D_{22} = D_{12} + 2D_{66} = D$)
 а – $\omega_{0,1}(x, y)$; б – $\omega_{1,1}(x, y)$; в – $\omega_1(x, y)$; г – $\omega_1(0, y), \omega_{0,1}(0, y), \omega_{1,1}(0, y)$

Положим теперь, что $w_1(x, y) = \bar{w}(x, y)$. Тогда функция $w_1(x, y)$ удовлетворяет бигармоническому уравнению всюду в области Ω (поскольку $\Omega \subset \Omega^*$) для произвольных значений постоянных W . Определим эти постоянные из условия, что на границе Γ функция $w_1(x, y)$ приближает крайевые условия (8) наилучшим возможным способом в смысле наименьших квадратов:

$$\int_{\Gamma} (w_1 - \Phi_1)^2 ds + \int_{\Gamma} \left(\frac{\partial w_1}{\partial s} - \frac{\partial \Phi_1}{\partial s} \right)^2 ds + \int_{\Gamma} \left(\frac{\partial w_1}{\partial n} - \Psi_1 \right)^2 ds \rightarrow \min. \tag{13}$$

Для коэффициентов W функции, на которой достигается этот минимум, получаем систему

$$\mathbf{B} \cdot \mathbf{W} = \mathbf{B}, \tag{14}$$

где

$$\mathbf{A} = \{a_{m,k}\} = \left\{ \sum_{i=1}^4 \int_{\Gamma_i} \left\{ \omega_k(s_i) \omega_m(s_i) + \frac{\partial \omega_k}{\partial s_i}(s_i) \frac{\partial \omega_m}{\partial s_i}(s_i) + \frac{\partial \omega_k}{\partial n_i}(s_i) \frac{\partial \omega_m}{\partial n_i}(s_i) \right\} ds_i \right\}_{m,k=1}^{\sum_{j=1}^4 (M_j + N_j + 2)},$$

$$\mathbf{B} = \{b_m\} = \left[\left\{ \sum_{i=1}^4 \int_{\Gamma_i} \left\{ \Phi_1(s_i) \omega_m(s_i) + \frac{\partial \Phi_1(s_i)}{\partial s_i} \frac{\partial \omega_m(s_i)}{\partial s_i} + \Psi_1(s_i) \frac{\partial \omega_m(s_i)}{\partial n_i} \right\} ds_i \right\}_{m=1}^{\sum_{j=1}^4 (M_j + N_j + 2)} \right]^T.$$

В последних выражениях следует полагать:

$$\omega_t(s_i) = \omega_t(x_i(s_i), y_i(s_i)); \quad \frac{\partial \omega_t(s_i)}{\partial s_i} = \frac{\partial \omega_t}{\partial x} \Big|_{x=x_i(s_i)} \cdot x_i'(s_i) + \frac{\partial \omega_t}{\partial y} \Big|_{y=y_i(s_i)} \cdot y_i'(s_i);$$

$$\frac{\partial}{\partial n_i}(s_i) = \frac{\partial}{\partial n_i} \Big|_{x=x_i(s_i), y=y_i(s_i)}; \quad \frac{\partial}{\partial n_1} = -\frac{\partial}{\partial x} \sin \alpha + \frac{\partial}{\partial y} \cos \alpha; \quad \frac{\partial}{\partial n_2} = -\frac{\partial}{\partial y}; \quad \frac{\partial}{\partial n_3} = \frac{\partial}{\partial x} \sin \beta + \frac{\partial}{\partial y} \cos \beta; \quad \frac{\partial}{\partial n_4} = \frac{\partial}{\partial y}.$$

Определитель матрицы \mathbf{A} системы (14) является определителем Грама для линейно независимых функций $\omega_1(x, y), \omega_2(x, y), \dots$ в пространстве С.Л. Соболева $\mathbf{W}_2^{(1)}(\Gamma)$ со скалярным произведением

$$(\omega_k, \omega_j)_{\Gamma} = (\omega_k, \omega_j)_{L_2(\Gamma)} + \left(\frac{\partial \omega_k}{\partial s}, \frac{\partial \omega_j}{\partial s} \right)_{L_2(\Gamma)} + \left(\frac{\partial \omega_k}{\partial n}, \frac{\partial \omega_j}{\partial n} \right)_{L_2(\Gamma)}.$$

Следовательно, $\det \mathbf{A} \neq 0$, и рассматриваемая система (14) однозначно разрешима. Тогда

$$w_1(x, y) = \mathbf{w} \cdot \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{B}.$$

Поскольку Ω – односвязная область с границей Липшица, а $\Phi_1 \in \mathbf{W}_2^{(1)}(\Gamma)$, $\Psi_1 \in L_2(\Gamma)$, то метод наименьших квадратов на границе для задачи (7)-(8) сходится (теорема 43.1, [6]). В [6, стр.527] отмечено, что для определения коэффициентов \mathbf{W} можно использовать условие (13), в котором опущен второй интеграл, однако при этом оговаривается, что в таком случае сходимость метода, вообще говоря, не гарантирована. Численные исследования нашей задачи показали, что опустить второй интеграл в функционале (13) можно, при этом сходимость приближенного решения не исчезает, но скорость сходимости ухудшается.

Таким образом, все компоненты функции $w(x, y)$ построены, и задача (1)-(2) решена.

Численный анализ сходимости и точности решения

Пример 1. Рассмотрим изгиб изотропной пластины ($\lambda = 1, \alpha = \beta = 80^\circ$), рис.5, на боковых сторонах которой перемещения заданы по линейному закону, на меньшем основании перемещения – константа, большее основание защемлено:

$$\Phi(s_1) = \frac{1}{2}(1-s_1), \quad \Phi(s_2) = 0, \quad \Phi(s_3) = \frac{1}{2}(1+s_3), \quad \Phi(s_4) = 1; \quad \Psi(s) = 0.$$

Представление краевых условий в виде $\Phi_0(s) = w_0|_{\Gamma}$, $\Phi_1(s) = \Phi(s) - \Phi_0(s)$ дает:

$$\Phi_0(s_1) = \frac{1}{4} \cdot s_1^3 - \frac{3}{4} \cdot s_1 + \frac{1}{2}; \quad \Phi_0(s_3) = -\frac{1}{4} \cdot s_3^3 + \frac{3}{4} \cdot s_3 + \frac{1}{2}; \quad \Phi_0(s_4) = 1;$$

$$\Phi_1(s_1) = \frac{1}{4} \cdot (s_1 - s_1^3); \quad \Phi_1(s_3) = \frac{1}{4} \cdot (s_3^3 - s_3); \quad \Phi_1(s_4) = 0.$$

Распределение функций прогибов, соответствующих краевым функциям $\Phi_0(s)$ и $\Phi_1(s)$, представлено в области $\Omega^* = \{(x, y) : |x| < 1, |y| < 1\}$ на графиках рис.6. Там же

представлено выполнение решениями $w_0(x,y)$ и $w_1(x,y)$ (при $M_j, N_j = 4$) краевых условий по перемещениям на стороне Γ_1 .

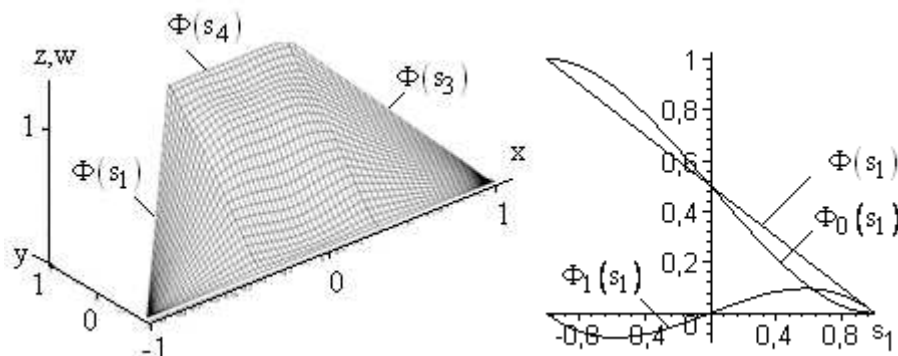


Рис. 5. К примеру 1: двукомпонентное представление краевой функции

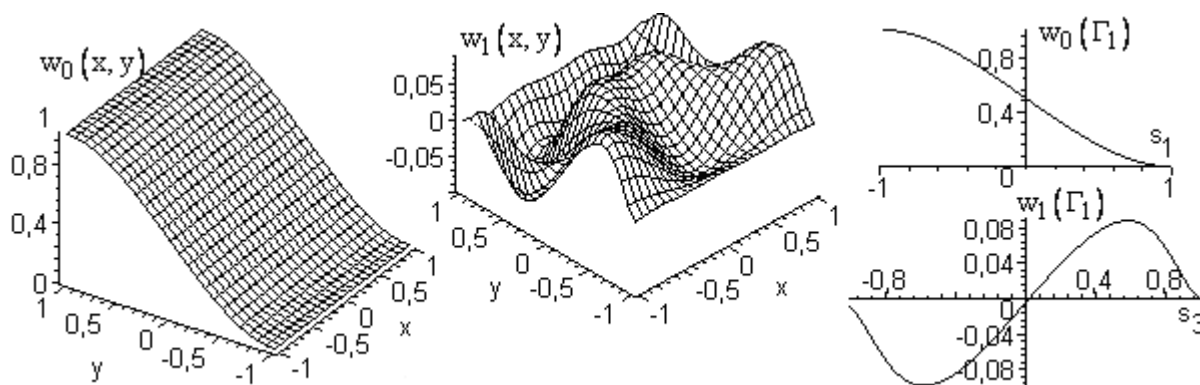


Рис. 6. Решения, соответствующие компонентам краевых условий, для примера 1

Таблица 2

Расстояния между элементами фундаментальной последовательности приближенных решений $w^{M_j, N_j}(x,y)$

$M_j, N_j; \bar{M}_j, \bar{N}_j (j=\overline{1,4})$	0	1	2	3	4	5
$\rho^2(w^{M_j, N_j}, w^{\bar{M}_j, \bar{N}_j})$	1,9605	1,1394	0,0977	0,0313	0,0275	

Пример 2. Рассмотрим изгиб той же пластины, что и в примере 1, при краевых условиях:

$$\Phi|_{\Gamma_1} = 2 \cdot H_0(s_1) + 1,5 \cdot H_1(s_1) + H_2(s_1), \quad \Phi|_{\Gamma_2} = 0, \quad \Phi|_{\Gamma_3} = -\{2 \cdot H_0(s_3) + 1,5 \cdot H_1(s_3) + H_2(s_3)\},$$

$$\Phi|_{\Gamma_4} = H_0(s_4), \quad \Psi(s) = 0.$$

Хорошая сходимость (в среднем) приближенного решения $w(x,y)$ в пространстве $L_2(\Omega)$ иллюстрируется данными, приведенными в таблице 2 и на графиках рис.7-9. Для оценки точности приближенного решения удовлетворимся, как это принято в инженерной практике, вычислением невязок в уравнении (1), которые приведены в таблице 3. Поскольку правая часть уравнения должна обращаться в нуль, то в таблице для каждой точки приведено отношение $\Delta(\%)$ разницы по модулю меж-

ду положительной и отрицательной частями невязки, отнесенной к наименьшей из этих частей. Точность выполнения уравнения не требует комментариев.

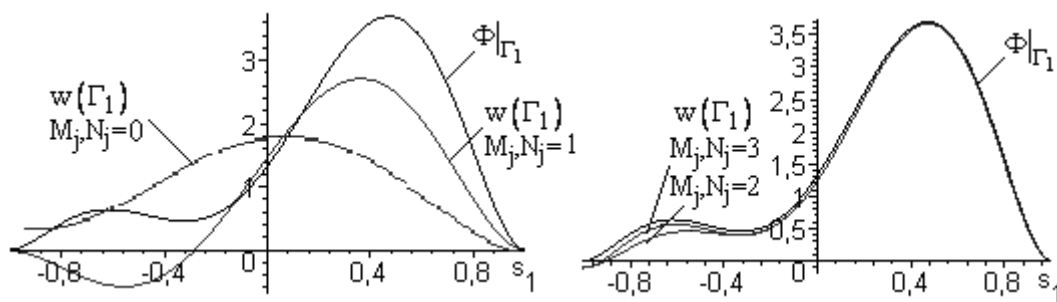


Рис. 7. Сходимость решения $w(x, y)$ к краевой функции $\Phi|_{\Gamma_1}$

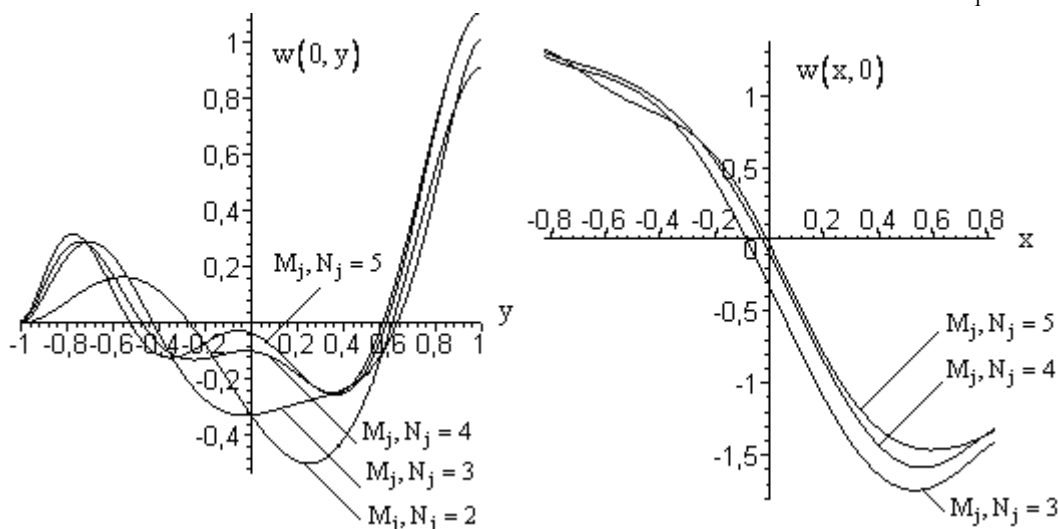


Рис. 8. Сходимость решения $w(x, y)$ на линиях $x=0$ и $y=0$

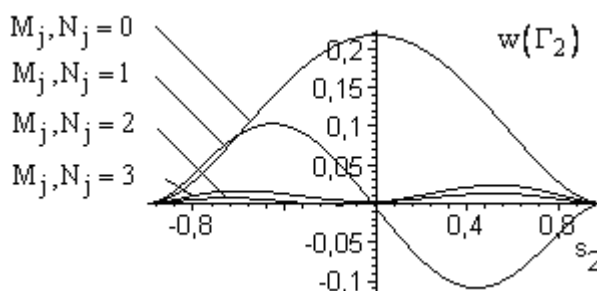


Рис. 9. Сходимость решения $w(x, y)$ к нулевой краевой функции $\Phi|_{\Gamma_2}$

Таблица 3

К оценке точности приближенного решения: невязки бигармонического уравнения в отдельных точках области Ω при $M_j, N_j = 5$ ($j=\overline{1,4}$)

y	-0,95	-0,60	-0,3	0	0,3	0,6	0,95
$\Delta, \% (x=0)$	$1,5 \cdot 10^{-2}$	$7,3 \cdot 10^{-3}$	2,2	1,5	2,7	$6,3 \cdot 10^{-2}$	$3,2 \cdot 10^{-1}$
$\Delta, \% (x=-0,3)$	$7,9 \cdot 10^{-6}$	$9,8 \cdot 10^{-5}$	$1,4 \cdot 10^{-3}$	$2,8 \cdot 10^{-1}$	$6,1 \cdot 10^{-3}$	$2,3 \cdot 10^{-3}$	$3,9 \cdot 10^{-2}$
$\Delta, \% (x=-0,6)$	$8,2 \cdot 10^{-6}$	$4,3 \cdot 10^{-5}$	$7,7 \cdot 10^{-4}$	$3,4 \cdot 10^{-3}$	$3,1 \cdot 10^{-3}$	$1,8 \cdot 10^{-3}$	$9,1 \cdot 10^{-1}$

Список литературы

1. Теоретические основы метода идентификации краевых условий для исследования упругой устойчивости силовой конструкции аэрокосмической техники: отчет о НИР; Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского «ХАИ»/ – №ГР 0103U005070. – Инв. № 0206U002451. – Х., 2006. – 173 с.
2. Халилов С.А. Изгиб прямоугольной ортотропной пластины при заданных на границе перемещениях / С.А. Халилов // Вопросы проектирования и производства конструкций летательных аппаратов: темат. сб. науч. тр. – Х.: ХАИ, 1987. – С. 31-39.
3. Сьерле Ф. Метод конечных элементов для эллиптических задач / Ф. Сьерле. – М.: Мир, 1980. – 512 с.
4. Халилов С.А. Новые системы ортонормированных многочленов, некоторые их свойства и приложения / С.А. Халилов // Прочность конструкций летательных аппаратов. Тематический сборник научных трудов. – Х. ХАИ. – 1978. – Вып. 5. – С.46-56.
5. Михлин С.Г. Численная реализация вариационных методов / С.Г. Михлин.– М.: Наука, 1970. – 432 с.
6. Ректорис К. Вариационные методы в математической физике и технике: пер.с англ. – М.: Мир, 1985. – 590 с.

Рецензент: д-р физ.-мат. наук, проф., зав. каф. Николаев А.Г., Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского «ХАИ», Харьков

Поступила в редакцию .09.09.09.

Розв'язання основної бігармонійної проблеми в трапецієподібній області

У замкнутому вигляді одержано наближений аналітичний розв'язок основної крайової задачі для бігармонійного рівняння у трапецієподібній області. Розв'язок побудовано за допомогою методу розширення області до канонічної у поєднанні з методом найменших квадратів вздовж границі. Досліджено практичну збіжність та точність отриманої апроксимації невідомого точного розв'язку.

Ключові слова: основна бігармонійна проблема, наближений аналітичний розв'язок, трапецієподібна область, розширення області до канонічної, метод найменших квадратів вздовж границі.

Main biharmonic problem solution in trapezoid region

Complete approximate analytical solution of main biharmonic problem in trapezoid region is obtained. The solution is resulted with the method of region expansion and the least-squares method. Numerical investigation of convergence and accuracy of solution is carried out.

Keywords: main biharmonic problem, approximate analytical solution, trapezoid region, method of region expansion to canonic, least-squares method