

## Передача направленной по полету локальной нагрузки на крыльевую панель. Упрощенная модель первого уровня. Оптимальное подкрепление

*Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е Жуковского «ХАИ»*

Предложена упрощенная математическая модель задачи о передаче локальной нагрузки через бортовой элемент на пластину. Решена задача оптимальной подкрепленной пластины вдоль действия локальной нагрузки. В общем случае последняя задача сведена к интегральному уравнению Фредгольма второго рода, ядром которого является функция Грина.

**Ключевые слова:** крыльевая панель, локальная нагрузка, бортовая балка, бимс, распределение напряжений, оптимальное подкрепление, функция Грина.

### Введение

В работе [1] дан анализ упрощенной модели рассматриваемой задачи.

В данной работе принимаем дополнительное упрощение  $\varepsilon_y = 0$  и, следовательно, считаем, что обшивка воспринимает только касательные напряжения, обеспечивая совместную работу элементов подкрепления. Нормальные напряжения  $\sigma_y$  являются следствием деформации панели в поперечном направлении и имеют незначительный уровень в сравнении с напряжениями  $\sigma(x)$  в ребрах и  $\tau$  в обшивке [1].

Между тем учет поперечных деформаций приводит к необоснованному усложнению модели подкрепленной панели.

И, наконец, в пользу допущения  $\varepsilon_y = 0$  свидетельствуют хорошо зарекомендовавшие себя разделы механики деформируемых тел, такие, как теория тонкостенных стержней, полубезмоментная теория оболочек, и ряд других.

Очевидно, в каждом конкретном случае необходимо обоснованное пренебрежение деформациями  $\varepsilon_y$ . Предположение  $\varepsilon_y = 0$  позволяет наиболее простым методом сформулировать задачу оптимального подкрепления.

### 1. Панель, подкрепленная тремя ребрами жесткости

Итак, положим  $\varepsilon_y = 0$  и вновь рассмотрим панель I, схема которой дана на рис. 1. Исходными являются следующие уравнения:

$$\begin{aligned} N_1' &= -2IS, \quad N_2' = IS, \\ S' &= \frac{Ghl}{b} \left( \frac{N_2}{E_2 F_2} - \frac{N_1}{2E_1 F_1} \right), \quad 2N_2 = 2P - N_1, \end{aligned} \quad (1)$$

которые можно привести к одному дифференциальному уравнению второго (вместо четвертого при  $\varepsilon_y \neq 0$ ) порядка относительно функции  $N_1$ :

$$N_1'' - \alpha^2 N_1 = -2\lambda^2 fP, \quad (2)$$

где  $\alpha^2 = \lambda^2(1+f)$ ,  $\lambda^2 = GhI^2/bE_1F_1$ ,  $f = E_2F_2/E_1F_1$ .

Уравнение (2) должно решаться при граничных условиях:

$$N_1(x=0) = 2P, \quad N_1'(x)/_{x=1} = 0,$$

после выполнения которых получаем следующие простые зависимости:

$$N_1 = 2Pk \left( 1 + \frac{1}{fch\alpha} ch\alpha(1-x) \right), \quad S = 2P \frac{\alpha k}{2lfch\alpha} sh\alpha(1-x), \quad (3)$$

$$N_2/P = 1 - N_1/2P, \quad k = f/(1+f).$$

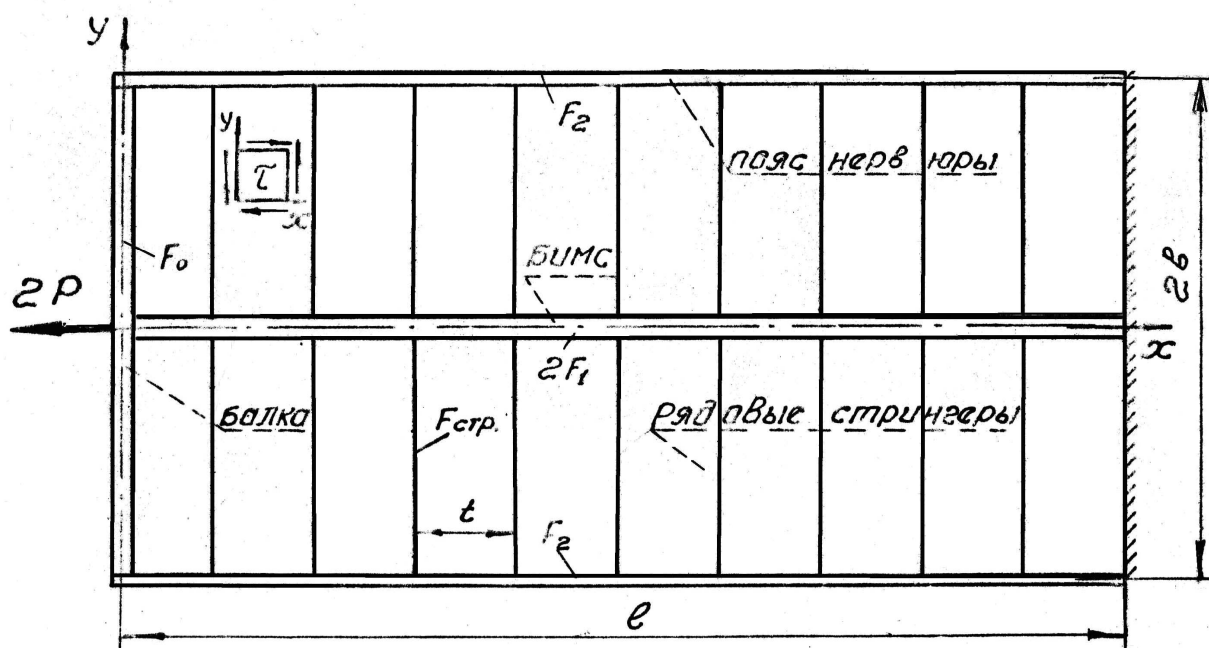


Рис. 1. Схема конструкции (панель 1)

Результаты расчетов, выполненных по формулам (3), изображены на рис. 2 в виде графиков, показанных пунктиром. Как видно из приведенных графиков, погрешность определения нормальных усилий можно принять допустимой, чего нельзя, к сожалению, сказать о касательных напряжениях, уровень которых вблизи нагруженного края пластины оказывается завышенным более чем в три раза (по сравнению с данными теории, учитывающей  $\varepsilon_y$ ). Вдали от нагруженного края результатами расчета можно пользоваться, очевидно, при выполнении проектировочных расчетов, когда на первый план выдвигаются качественные многопараметрические исследования.

Отметим еще два существенных момента. Во-первых, из данной модели следует, что полное выравнивание нормальных усилий возможно только для очень длинных (фактически - бесконечно длинных) панелей, и, во-вторых, касательные напряжения по этой теории в закрепленном сечении всегда обращаются в нуль, что никак не очевидно. И все же простота расчетных формул и качественно правильное отображение главных свойств реальных конструкций делают эту модель весьма привлекательной.

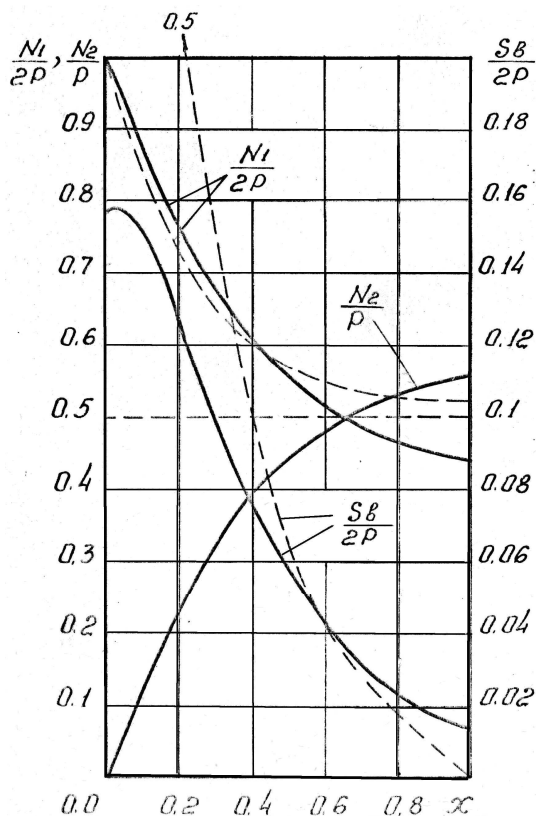


Рис. 2. Изменения усилий в элементах панели 1

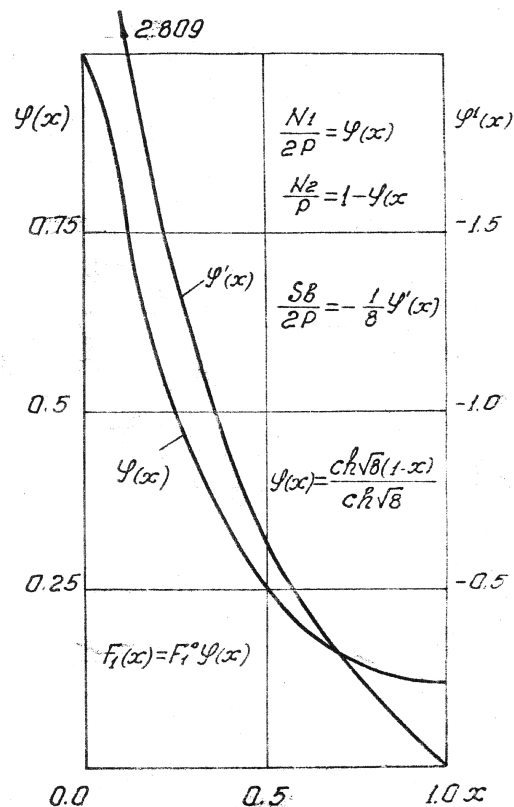


Рис. 3. Оптимальное подкрепление панели 1

В рамках данной модели довольно просто решается вопрос об оптимальном подкреплении в следующем смысле. Потребуем, чтобы какой-либо один элемент системы (обычно - наиболее ответственный, например, бимс) был равнопрочным, т.е. чтобы выполнялось постоянство отношения  $N_i/F_i = const$ . Требуется найти распределение площади  $F_i(x)$  по длине элемента, обеспечивающее выполнение данного соотношения. Примем, например, чтобы было выполнено равенство

$$N_1(x) / 2F(x) = const \quad (4)$$

Тогда на основе уравнений (3) с учетом равенства (4) в правой части которого содержится постоянная величина (например, расчетное напряжение) скажется лишь на назначении площади поперечного сечения бимса при  $x=0$ , т.е. на величине  $F_1^0$ , приходим к дифференциальному уравнению второго порядка относительно искомой функции:

$$\varphi''(x) - \lambda_0^2 \varphi(x) = -\lambda_0^2 (1 - f_0), \quad (5)$$

которое должно решаться при граничных условиях

$$\varphi(0) = 1, \quad \varphi(x) /_{x=1} = 0, \quad (6)$$

вытекающих из граничных условий исходной задачи.

В уравнении (5) обозначено:

$$F_1(x) = F_1^0 \varphi(x), \quad f_0 = E_2 F_2 / E_1 F_1^0, \quad \lambda_0^2 = G h e^2 / b E_2 F_2.$$

Функция  $\varphi(x)$  после выполнения условий (6) имеет вид

$$\varphi(x) = 1 - f_0 \left( 1 - \frac{1}{ch \lambda_0} ch \lambda_0 (1-x) \right), \quad (7)$$

где при данных рассматриваемого постоянного примера  $\lambda_0 = \sqrt{8}$ ,  $f_0 = 1$ , т.е.

$$\varphi(x) = \frac{1}{ch \sqrt{8}} ch \sqrt{8(1-x)}. \quad (8)$$

Для компонент напряженного состояния получаем следующие зависимости:

$$N_1 / 2P = \varphi(x), \quad N_2 / P = 1 - \varphi(x), \quad Sb / 2P = -\frac{1}{8} \varphi'(x). \quad (9)$$

Графики функций  $\varphi(0)$  и  $\varphi'(x)$  показаны на рис. 3, из которых с учетом зависимости (9) можно сделать следующие выводы:

- максимальная величина касательных напряжений (при  $x = 0$ ) значительно снизилась: вместо  $S = 0,5 \frac{2P}{b}$  для случая  $F_1 = const$  получается

$$S = \frac{2,8}{8} \cdot \frac{2P}{b} \approx 0,35 \frac{2P}{b};$$

- условия работы поясов нервюр значительно ухудшились. Вместо  $N_2(x=1) = 0,56P$  при  $F_1 = const$  имеем  $N_2(x=1) = 0,88P$ .

Следовательно, спроектированный элемент считать оптимальным можно совершенно условно, так как вся система в целом получается далеко не оптимальной. Поэтому имеет смысл решать задачу выбора переменного сечения в общей постановке, не ограничиваясь лишь требованием (4). Этот вопрос будет рассмотрен далее.

## 2. Анализ напряженного состояния панели, подкрепленной пятью поясами

Полагая  $\varepsilon_y = 0$ , рассмотрим напряженное состояние панели, изображенной на рис.4. Исходными являются следующие уравнения:

$$N_1^1 = -2lS_1, \quad N_2^1 = e(S_1 - S_2), \quad N_1 + 2N_2 + 2N_3 = 2P \quad (10)$$

$$S_1 = \frac{Gh}{b}(u_2 - u_1), \quad S_2 = \frac{Gh}{b}(u_3 - u_2); \quad (11)$$

$$N_1 = \frac{2E_1 F_1}{l} u_1', \quad N_2 = \frac{E_2 F_2}{l} u_2', \quad N_3 = \frac{E_2 F_2}{l} u_3'; \quad (12)$$

$$N_1(x=0) = 2P, \quad N_2(x=0) = N_3(x=0) = 0, \quad u_1(x=1) = u_2(x=1) = 0. \quad (13)$$

Из уравнений (10.) - (12.) получаем систему

$$N_1'' = -2\lambda^2(2fN_2 - N_1),$$

$$N_2'' = \lambda^2(4fN_2 - 2fN_3 - N_1),$$

$$2N_3 = 2P - N_1 - 2N_2.$$

которую, в свою очередь, можно свести к одному дифференциальному уравнению четвертого порядка относительно функции  $N_1(x)$ :

$$N_1^{IV} - 2\lambda^2(1+3f)N_1'' + 4(2+f)f\lambda^4N_1 = 8f^2\lambda^4P. \quad (14)$$

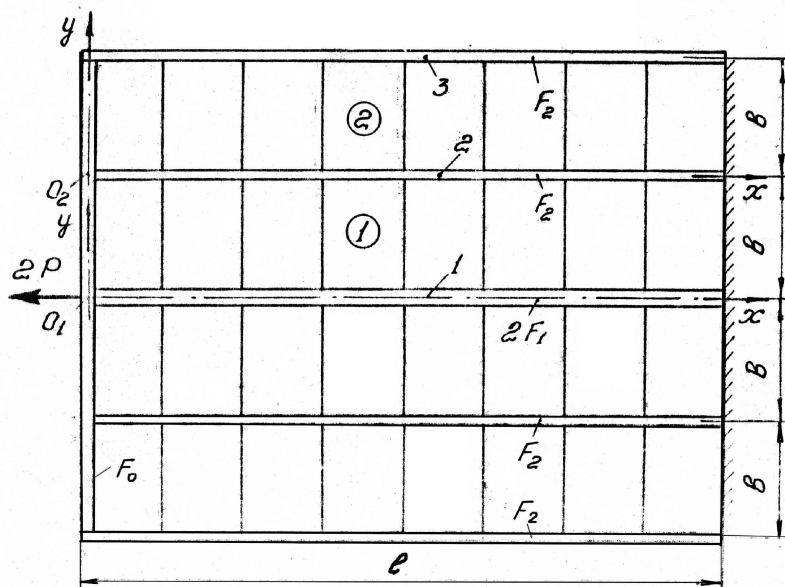


Рис. 4. Схема конструкций (панель 2)

Ранее были приняты такие обозначения для безразмерных параметров:

$$\lambda^2 = \frac{Ghl^2}{2bE_1F_1}, \quad f = E_1F_1 / E_2F_2.$$

Решение дифференциального уравнения (14) должно быть подчинено граничным условиям, следующим из условий (13):

$$N_1(x=0) = 2P, \quad N_2(x=0) = 0, \quad (15)$$

$$N_1' /_{x=1} = 0, \quad N_2' /_{x=1} = 0.$$

Функция  $N_2(x)$  определяется через  $N_1(x)$ :

$$N_2 = -\frac{1}{4f\lambda^2} (N_1'' - 2\lambda^2 N_1). \quad (16)$$

Из выражения для корней соответствующего характеристического уравнения

$$\bar{r} = \pm \lambda \sqrt{1+3f \pm \sqrt{(1-f)^2 + 4f^2}} \quad (17)$$

следует, что корни всегда являются действительными и различными, так что решение всегда записываем в виде

$$N_1^0 = C_1 e^{rx} + C_2 e^{-rx} + C_3 e^{sx} + C_4 e^{-sx}, \quad (18)$$

где  $r$  и  $s$  равны двум различным модулям  $\bar{r}$ .

В рассматриваемом примере  $f = 1$ ,  $\lambda = 2$  и  $r = 2\sqrt{2}$ ,  $S = 2\sqrt{6}$ .

Подчиняя решение (18) крайевым условиям (15) с учетом выражения (16), получаем решения и необходимые для расчета зависимости в окончательном виде:

$$\begin{aligned} N_1 &= C_1 e^{rx} + C_2 e^{-rx} + C_4 e^{-sx} + \frac{1}{3} 2P, \quad N_1' = C_1 r e^{rx} - C_2 r e^{-rx} - C_4 s e^{-sx}, \\ N_2 &= \frac{1}{3} P (1 - e^{-sx}), \quad N_2' = \frac{1}{3} P 2\sqrt{6} e^{-sx}, \\ C_1 &= 2P \frac{1}{6} \frac{3 + \sqrt{3} e^{r-s}}{e^{2r} - 1}, \quad C_2 = P - C_1, \quad C_4 = \frac{1}{6} 2P. \end{aligned} \quad (19)$$

Касательные напряжения  $S_1$ ,  $S_2$  определяем по формулам (10) с учетом зависимостей (19). Результаты расчетов показаны на рис. 5 и 6.

Кривые на рис.5, представленные сплошными линиями соответствуют решению данной задачи (штриховой линией дано суммарное значение усилий в поясах нервюр), штрихпунктирными линиями для сравнения приведены графики, соответствующие решению задачи данные в работе [1] при  $F_1 = const$  и показанные на рис.2. Отметим, что размеры данной панели не изменились (по-прежнему  $l = 4b$ ), отличие состоит лишь в постановке двух дополнительных ребер. Сравнение двух кривых для продольного усилия  $N_1$  показывает, что наличие дополнительных ребер несущественно влияет на работу основного элемента конструкции, но некоторая нагрузка этого дополнительного элемента все же имеет место, т.е. работа элементов в составе системы как бы выравнивается, хотя это выравнивание не очень существенно. Что касается дополнительных ребер (отмечены индексом 2) и крайних ребер (индекс 3), то они работают в более благоприятных условиях и перераспределение нагрузки для них значительно.

Характер выравнивания усилий по длине системы остается прежним, хотя в элементах 2 и 3 установление продольных сил наблюдается несколько ранее, чем в элементе 1, в особенности это касается дополнительных ребер.

Весьма существенное изменение претерпевают потоки касательных сил. Если опираться на данные, полученные при решении задачи с тремя ребрами без учета  $\varepsilon_y$  (эти данные показаны на рис. 2 пунктирными линиями), то

максимальные величины снижаются с уровня  $S = 0,5 \cdot \frac{2P}{b}$  до уровня

$S \approx 0,275 \cdot \frac{2P}{b}$ . При этом основную работу на сдвиг выполняют средние клетки

панели, где уровень  $S_{max}$  в крайних клетках почти втрое ниже уровня  $S_{max}$  в средних клетках. Небезынтересно отметить, что  $S_{max}$  в крайних клетках достигается не при  $x = 0$ , а на некотором удалении от края ( $x \approx 0,075$ ). В связи с

этим в крайних клетках должны иметь место значительные нормальные напряжения  $\sigma_y$ , которые в данной модели остаются неопределенными.

В заключение анализа данных представляется не лишним отметить, что главные особенности передачи нагрузки на панель и общий характер работы отдельных ее элементов можно заметить, рассматривая лишь панель с тремя ребрами. Учет отдаленных от места приложения сосредоточенного воздействия продольных элементов вносит в расчет малооправданные усложнения и становится излишним при проектировании.

### 3. Оптимальное подкрепление. Приближенный подход

Как показано в разделе 1 требование (4) - постоянства напряжений по длине бимса, который в системе является наиболее ответственным элементом, может привести к ухудшению условий работы других элементов. Поэтому от такого требования во многих случаях приходится отказываться, а вместо условия (4) выдвигать другие условия. Можно, например, потребовать, чтобы усилия  $N_1(x)$  изменялись по данному закону, и необходимо определить закон изменения  $F_1(x)$ . В другом случае по заданной функции следует определить  $F_1(x)$  - это решение прямой задачи. Предмет обратной задачи составляет определение закона изменения площади поперечных сечений  $F_1(x)$ .

Ясно, что в обеих задачах можно найти (подобрать) такие исходные данные, чтобы добиться оптимальных в определенном смысле условий работы всех элементов системы, т.е. задача проектирования здесь решается интерактивным путем, что естественно.

Рассмотрим решение прямой задачи. Пусть задана функция  $F_1(x) = F_1^0 \varphi(x)$ , где  $F_1^0$  - некоторый нормирующий множитель. Если, например, положить  $F_1^0 = F_1(x=0)$ , то функция  $\varphi(x)$  должна удовлетворять условию  $\varphi(x=0) = 1$ , и, кроме того,  $\varphi(x) > 0 \forall x \in [0;1]$ . Решая задачу, исходя из соотношений (10) - (13), приходим к уравнению с переменными коэффициентами относительно  $N_1(x)$ .

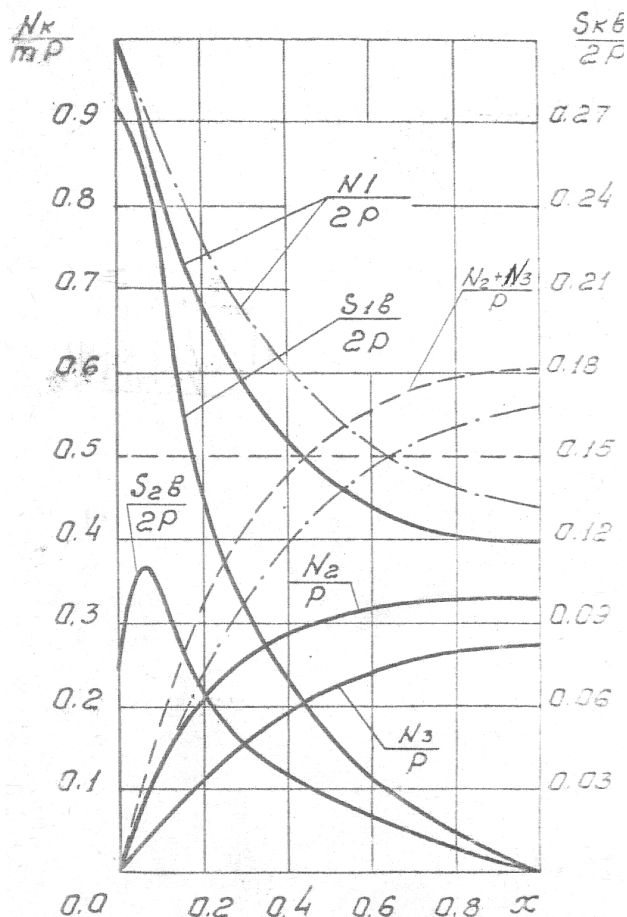


Рис. 5. Изменение усилий в элементах панели 2

$$N_1^{IV} - 2\lambda^2(\theta N_1)'' - 6f\lambda^2 N_1'' + 4f\lambda^4(2\theta + f)N_1 = 8\lambda^4 f^2 P, \quad (20)$$

где  $\theta = \theta(x) = 1/\varphi(x)$  - заданная функция.

Из уравнения (20) при  $\theta(x) \equiv 1$  следует уравнение (14), соответствующее  $F_1(x) = F_1 = const$ . Функция  $N_1(x)$  должна удовлетворять граничным условиям:

$$\begin{aligned} N_1(x=0) &= 2P, & N_1''(x)/_{x=0} &= 16P, \\ N_1'(x)/_{x=1} &= 0, & N_1'''(x)/_{x=1} &= 24N_1(x=1). \end{aligned} \quad (21)$$

Если в уравнение (20) подставить  $N_1(x) = 2\delta^0 F_1^0 \varphi(x)$  и учесть, что  $\varphi(x) = I/\theta(x)$ , то придем к уравнению относительно  $\varphi(x)$  - обратная задача. Таким образом, прямая и обратная задача эквивалентны.

Уравнение (20) в замкнутом виде в общем случае не интегрируется. Определим приближенное решение уравнения с учетом условий (21), для чего положим

$$N_1(x) = 2P \left( (1-2x)^2 - \frac{4}{3}x^3 \right) + \mathfrak{R}(12x - 16x^3 + 9x^4), \quad (22)$$

где первая функция в правой части удовлетворяет условиям (21), а вторая - однородным условиям, следующим из условий (21),  $\mathfrak{R}$  - неопределенный коэффициент. Для определения  $\mathfrak{R}$  подставим решение (22) в уравнение (20) и выполним ортогонализацию полученного конечного соотношения по схеме Галеркина-Петрова, в результате чего придем к линейному уравнению относительно параметра  $\mathfrak{R}$ . Таким путем получим приближенное решение поставленной задачи.

В общем случае решение для  $N_1(x)$  необходимо задавать в виде

$$N_1(x) = 2P \left( (1-2x)^2 - \frac{4}{3}x^3 \right) + \sum_{k=1}^n \mathfrak{R}_k w_k(x), \quad (23)$$

где  $w_k(x), k = \overline{1, n}$  образуют независимую систему функций, каждая из которых удовлетворяет однородным условиям:

$$w_k(x=0) = 0, \quad w_k''(x=0) = 0, \quad w_k'(x=1) = 0, \quad w_k'''(x=1) - 24w_k(x=1) = 0 \quad (24)$$

Подстановка решения (23) и ортогонализация полученного конечного соотношения по схеме Галеркина-Петрова приведет к системе линейных алгебраических уравнений порядка  $n$  относительно параметров  $\mathfrak{R}_k, k = \overline{1, n}$ . В качестве полной системы при ортогонализации можно брать систему  $x^{k-1}, k = \overline{1, n}$ , если число  $n$  невелико, и систему смещенных многочленов Лежандра  $P_{k-1}(x), k = \overline{1, n}, |2|$ .

Ограничиваясь приближением (22), для  $\mathfrak{R}$  получаем

$$\mathfrak{R} = 2P \frac{19}{3 \cdot 81}.$$



При этом было принято  $\theta = 3x + 1$ , т.е.  $F_1(x) = F_1^0 \frac{1}{3x + 1}$ .

Результаты расчетов и закон изменения площадей поперечных сечений вдоль оси  $x$ , (при  $x = 0, F_1 = F_1^0$ , при  $x = 1, F_1 = \frac{1}{4} F_1^0$ ) показаны на рис. 6.

Сразу необходимо отметить, что второе ребро, ближайшее к центральному оказывается выключенным из работы, а крайнее перегружено, и при удалении от края более чем на четверть длины два крайних ребра воспринимают большую часть нагрузки, в корневом же сечении почти вся нагрузка приходится на эти ребра. Таким образом, подбором закона изменения площадей поперечных сечений центрального ребра можно управлять напряженным состоянием системы. В рассматриваемом случае оказалось возможным «раздать» нагрузку на периферийную зону, что в ряде случаев может привести к определенной выгоде. Данный результат объясняется тем, что потоки касательных сил  $S_1$  и  $S_2$ , перепад которых воспринимается промежуточными ребрами, незначительно разнятся между собой, а при  $x \geq 0,3$  они практически одинаковы, как это следует из соответствующих кривых на рис. 6. Крайние же ребра нагружены полным потоком  $S_2$ , что и вызывает в них значительные продольные усилия.

Здесь, как и в разделе 1, уровни касательных напряжений весьма значительны. Вообще, рост уровня касательных напряжений при передаче нагрузки через ребро переменного сечения в сравнении с их уровнем ребра постоянного сечения является правилом. Поэтому применение ребер переменного сечения должно каждый раз тщательно обосновываться, в случае достаточно жесткой обшивки применять такие ребра не целесообразно.

На рис. 7 показаны отношения  $N_k(x)$ , имеющие место в ребрах переменного сечения к  $N_k(x)$  в случае постоянных сечений, и такие же отношения потоков  $S_k$ :

$$\eta_k = \frac{N_k(F - var)}{N_k(F = const)}, \quad \zeta = \frac{S_k(F - var)}{S_k(F = const)}$$

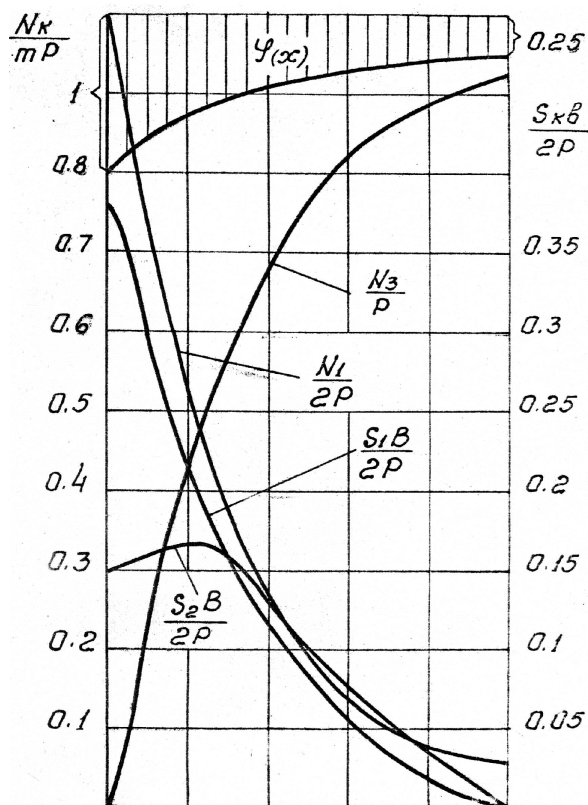


Рис. 6. Изменение усилий в элементах панели 2 при  $F_1 = F_1^0 \varphi(x) = F_1^0 / (3x + 1)$  (оптимальное подкрепление)

Приведенные графики свидетельствуют о том, что, во-первых, уровни величин  $\eta_k$  и  $\zeta_k$  совершенно различны, и, во-вторых, законы их изменения вдоль длины системы очень сложны (за исключением  $\eta_1$ ) - имеются участки резкого возрастания и резкого падения. Ниже отметки, равной единице, расположены графики лишь для функций  $\eta_1(x)$  и  $\eta_2(x)$ , т.е. данный закон изменения площадей поперечных сечений центрального ребра благоприятно сказывается на работе ребер, расположенных в средней зоне, и усложняет условия работы обшивки и периферийных ребер.

Из данного анализа следует, что, выбирая тот или иной закон изменения функций  $F_1(x)$ , можно в значительной степени управлять напряженным состоянием всей системы. При этом особое внимание необходимо обращать на рост касательных напряжений в обшивке.

#### 4. Оптимальное подкрепление. Общий метод решения обратной задачи

Ранее было показано, что если отказаться от условия  $N_1(x)/F_1(x) = \text{const}$ , задача определения функции  $F_1(x)$  при заданной функции  $N_1(x)$  сводится к дифференциальному уравнению с переменными коэффициентами, решение которого при общем виде функции  $N_1(x)$  нельзя найти в замкнутой форме, поэтому приходится обращаться к численным методам. В случае системы с пятью ребрами отмеченное уравнение имело четвертый порядок, с ростом числа ребер порядок уравнения также растет. В связи со сказанным более перспективным оказывается метод сведения задачи к интегральному уравнению.

В дальнейшем понадобится функция Грина краевой задачи

$$w'' - \alpha^2 w = 0, \quad x \in (0,1), \quad w(x=0) = w'(x=1) = 0 \quad (25)$$

Для построения функции Грина  $\Gamma_0(x, \xi)$  разобьем интервал  $(0,1)$  на два интервала  $(0; \xi)$  и  $(\xi; 1)$  обозначим через  $w_1(x, \xi)$  и  $w_2(x, \xi)$  решения уравнения (25) на этих интервалах.

Для введенных функций  $w_k(x, \xi), k = 1, 2$ , имеем

$$w_1(x, \xi) = C_1(\xi) \operatorname{sh} \alpha x + C_2(\xi) \operatorname{ch} \alpha x, \quad w_2(x, \xi) = B_1(\xi) \operatorname{sh} \alpha x + B_2(\xi) \operatorname{ch} \alpha x. \quad (26)$$

Выполняя граничные условия  $w_1(0) = 0$  и  $w_2'(1) = 0$ , получаем

$$C_2 \equiv 0, \quad B_1 = -B_2 \operatorname{th} \alpha. \quad (27)$$

Далее по определению функции Грина имеют место условия сопряжения при  $x = \xi$ :

$$w_1(x = \xi, \xi) = w_2(x = \xi, \xi), \quad w_2'(x = \xi + 0, \xi) - w_1'(x = \xi - 0, \xi) = 1, \quad (28)$$

выполняя которые и учитывая равенства (27), получаем окончательно:

$$\begin{aligned}
 w_1(x, \xi) &= -\frac{1}{\alpha \operatorname{ch} \alpha} \operatorname{ch} \alpha (1 - \xi) \operatorname{sh} \alpha x, & 0 \leq x \leq \xi, \\
 w_2(x, \xi) &= -\frac{1}{\alpha \operatorname{ch} \alpha} \operatorname{sh} \alpha \xi \operatorname{ch} \alpha (1 - x), & \xi \leq x \leq 1.
 \end{aligned} \tag{29}$$

Функцию Грина запишем теперь в виде

$$\Gamma_0(x, \xi) = \begin{cases} w_1(x, \xi), & 0 \leq x \leq \xi \\ w_2(x, \xi), & \xi \leq x \leq 1 \end{cases} \tag{30}$$

Нетрудно видеть, что  $\Gamma_0(x, \xi)$  является симметричной функцией своих аргументов, т.е.  $\Gamma_0(x, \xi) = \Gamma_0(\xi, x)$ .

Ниже решение задачи будет дано двумя методами, пользоваться которыми можно по личному усмотрению в зависимости от удобств расчета и вида исходной информации.

В первом методе обратная задача сводится к обыкновенному дифференциальному уравнению с постоянными коэффициентами, во втором - получается интегральное уравнение Фредгольма второго порядка с симметрическим ядром, которое содержит функцию Грина (30).

Рассмотрим систему с тремя ребрами, для которой имеют место уравнения

$$N_1'(x) = -2eS(x), \quad 2N_2 = 2P - N_1, \quad S'(x) = \frac{Ghe}{b} \left( \frac{N_2}{E_2F_2} - \frac{N_1}{2E_1F_1} \right) \tag{31}$$

Пусть считается известным закон изменения нормальных напряжений  $\sigma(x)$  по длине центрального ребра (бимса). Тогда  $N_1(x) = 2F_1(x) \cdot \sigma(x)$ , причем  $N_1(0) = 2F_1^0 \sigma^0 = 2P$ .

$$P = F_1^0 \sigma^0 \tag{32}$$

Последнее условие связывает два параметра, равные значениям соответствующих функций при  $x = 0$ , с величиной нагрузки. Примем далее

$$F_1(x) = F_1^0 \varphi(x), \tag{33}$$

где  $\varphi(x)$  - безразмерная функция, подлежащая определению. Тогда  $N_1(x)$  выражается через две функции, одна из которых  $\sigma(x)$  известна (задается), а вторую требуется определить:

$$N_1(x) = 2F_1(x) \cdot \varphi(x), \quad \tau(x) = 2F_1(x) \cdot \tau(x), \tag{34}$$

где  $\tau(x) = \varphi_1(x) \cdot \sigma(x)$  - основная функция. Формулой (34) будем пользоваться в том виде, в каком это будет удобно. Зная  $\tau(x)$ , функцию  $\varphi(x)$ , строго положительную по физическому смыслу, определим из равенства

$$\varphi(x) = \frac{\tau(x)}{\sigma(x)}. \tag{35}$$

Здесь необходимо сделать очень существенную оговорку: на функцию  $\varphi(x)$  не накладываются никаких ограничений, т.е. она может принимать любые

значения - положительные, отрицательные и даже нулевые. Но поскольку функция  $\varphi(x) \geq 0$ , то для того, чтобы равенство (35) имело смысл искомая функция  $\tau(x) \geq 0$  должна на всем интервале изменения аргумента удовлетворять условию

$$\text{sign } \tau(x) = \text{sign } \sigma(x). \quad (36)$$

Если это условие будет нарушено хотя бы в одной точке, то поставленная задача при заданной функции решения не имеет. Если же функция  $\sigma(x)$  имеет нуль в некотором точке  $x = x_0$ , то в той же точке должна иметь нуль и функция  $\tau(x)$ , в противном случае задача не имеет решения. И, наконец, пусть нули функций  $\tau(x)$  и  $\sigma(x)$  совпадают, тогда равенство (35) понимается в смысле предельного значения отношения в правой части:

$$\varphi(x = x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\tau(x)}{\delta(x)}, \quad (37)$$

и если этот предел не существует, то поставленная задача не имеет решения. Во всех остальных случаях, не попавших в оговорку, решение обратной задачи единственно.

Теперь выражению для производной от потока касательных сил  $S(x)$  в (31) можно придать следующий вид:

$$S'(x) = \frac{Ghe}{bE_1} (f\delta^0 - \delta(x) - f\tau(x)), \quad (38)$$

где  $f = E_2 F_2 / E_1 F_1^0$

Дифференцируя первое уравнение в (31), с учетом (38) получаем искомое уравнение

$$\tau'' - \lambda^2 f \tau = -\lambda^2 (f\delta^0 - \delta), \quad (39)$$

где  $\lambda^2 = Ghl^2 / bE_1 F_1^0$ .

Введем безразмерные функции  $\tilde{\tau}(x) = \tau(x) / \sigma^0$ ,  $\tilde{\delta}(x) = \delta(x) / \sigma^0$ , и перепишем уравнение (39) в окончательном виде

$$\tilde{\tau}''(x) - \lambda^2 f \tilde{\tau}(x) = -\lambda^2 (f - \tilde{\delta}(x)). \quad (40)$$

Решение уравнения (40) должно быть подчинено краевым условиям, следующим из условий для  $N_1$ :

$$\tilde{\tau}(x=0) = 1, \quad \tilde{\tau}'(x=1) = 0. \quad (41)$$

Получим решение краевой задачи (40)-(41) при произвольной краевой части, для чего определим фундаментальное решение, удовлетворяющее следующим данным Коши:

$$\tilde{\tau}_*(0) = 0, \quad \tilde{\tau}'_*(0) = 1. \quad (42)$$

Имеем  $\tilde{\tau}_* = A_1 \text{sh } \alpha x + A_2 \text{ch } \alpha x$ ,  $\alpha = \lambda \sqrt{f}$ .

Из условий (42) определим  $A_1$  и  $A_2$ , в результате получим

$$\tilde{\tau}_*(x) = \frac{1}{\alpha} sh \alpha x \quad (43)$$

С помощью решения  $\tilde{\tau}_*(x)$  можно записать частное решение уравнения (40) следующим образом:

$$\tilde{\tau}_{\text{частн.}}(x) = -\frac{\lambda^2}{\alpha} \int_0^x (f - \tilde{\sigma}(t)) sh \alpha(x-t) dt. \quad (44)$$

Решение рассматриваемой краевой задачи имеет вид

$$\tilde{\tau}(x) = C_1 sh \alpha x + C_2 ch \alpha x + \tilde{\tau}_{\text{частн.}}(x). \quad (45)$$

Удовлетворяя краевым условиям (41), получим значения постоянных  $C_1$  и  $C_2$ :

$$C_2 = 1, \quad C_1 = \frac{\lambda^2}{\alpha ch \alpha} \int_0^1 (f - \tilde{\sigma}(t)) ch \alpha(1-t) dt - th \alpha. \quad (46)$$

Этим решение задачи завершается. Компоненты напряженного состояния определяются формулами

$$N_1(x) = 2F_1^0 \tau(x), \quad S = -\frac{1}{2e} N_1', \quad 2N_2 = 2P - N_1.$$

Для панели с пятью ребрами приведем окончательный результат. Дифференциальное уравнение и краевые условия:

$$\begin{aligned} \tilde{\tau}^{IV} - 6f\lambda^2 \tilde{\tau}'' + 4f\lambda^4 \tilde{\tau} &= 2\lambda^2 \tilde{\sigma}'' - 8f\lambda^4 \tilde{\sigma} + 4f^2 \lambda^4, \\ \tilde{\tau}(0) = 1, \quad \tilde{\tau}'(1) = 0, \quad \tilde{\tau}''(0) = 2\lambda^2, \quad \tilde{\tau}'''(1) = 2\lambda^2 \tilde{\sigma}'(1). \end{aligned} \quad (47)$$

Здесь  $\lambda^2$  определяется так:  $\lambda^2 = Ghl^2/2E_1 F_1^0 b$ ; формуле же для  $f$  имеет прежний вид:  $f = E_2 F_2 / E_1 F_1^0$ . Запишем решение краевой задачи (47):

$$\tilde{\tau}(x) = C_1 sh r x + C_2 ch r x + C_3 shs x + C_4 chs x + \tilde{\tau}_{\text{частн.}}(x), \quad (48)$$

где  $r = \lambda \sqrt{f' \sqrt{3 + \sqrt{5}}}$ ,  $s = \lambda \sqrt{f' \sqrt{3 - \sqrt{5}}}$ ,

$$\tilde{\tau}_{\text{частн.}} = \frac{2\lambda^2}{rs(r^2 - s^2)} \int_0^x f(t) (ssh r(x-t) - rshs(x-t)) dt,$$

$$f(t) = \tilde{\sigma}''(t) - 4f\lambda^2 \tilde{\sigma}(t) + 2f^2 \lambda^2,$$

$$C_1 = \frac{B - S^2 A}{r(r^2 - s^2) chr}, \quad C_3 = \frac{r^2 A - B}{S(r^2 - s^2) chs},$$

$$C_2 = (2\lambda^2 - s^2)/(r^2 - s^2), \quad C_4 = (r^2 - 2\lambda^2)/(r^2 - s^2),$$

$$A = -\tilde{\tau}'_{\text{частн.}}(1) - C_2 rshr - C_4 sshs,$$

$$B = 2\lambda^2 \tilde{\sigma}(1) - \tilde{\tau}'''_{\text{частн.}}(1) - C_2 r^3 shr - C_4 s^3 shs,$$

$$\tilde{\tau}'_{\text{частн.}}(1) = \frac{2\lambda^2}{r^2 - s^2} \int_0^1 f(t) (chr(1-t) - chs(1-t)) dt,$$

$$\tilde{\tau}'''_{\text{частн.}}(1) = \frac{2\lambda^2}{r^2 - s^2} \int_0^1 f(t) (r^2 chr(1-t) - s^2 chs(1-t)) dt.$$

После определения функции  $\tilde{\tau}(x)$  вычисляем следующие функции:

$$\begin{aligned} \tau(x) &= \tilde{\tau}(x)\sigma^0, \quad \varphi(x) = \frac{\tau(x)}{\sigma(x)}, \quad F_1(x) = F_1^0\varphi(x), \\ N_1(x) &= 2F_1^0\tau(x), \quad N_2(x) = -\frac{1}{4f\lambda^2} \left( N_1''(x) - 2\lambda^2 \frac{N_1(x)}{\varphi(x)} \right), \\ S_1(x) &= -\frac{1}{2l} N_1'(x), \quad S_2(x) = S_1(x) - \frac{1}{l} N_2'(x), \\ 2N_3(x) &= 2P - 2N_2(x) - N_1(x). \end{aligned}$$

Рассмотрим второй способ решения обратной задачи на примере панели с пятью ребрами. Здесь будем считать заданную функцию продольных сил  $N_1(x)$ . Требуется определить соответствующий закон изменения площадей поперечных сечений центрального ребра (бимса):

$$F_1(x) = F_1^0\varphi(x), \quad F_1^0 = P / \sigma^0, \quad \varphi(0) = 1. \quad (49)$$

Исходим из системы дифференциальных уравнений, записанных относительно  $N_1(x)$  и  $N_2(x)$ :

$$\begin{aligned} N_1''(x) - 2\lambda^2\theta(x)N_1(x) &= -4f\lambda^2 N_2(x) \\ N_2''(x) - 6f\lambda^2 N_2(x) &= \lambda^2(f - \theta(x))N_1(x) - 2\lambda^2 fP. \end{aligned} \quad (50)$$

Функции  $N_1(x)$  и  $N_2(x)$  удовлетворяют краевым условиям

$$N_1(0) = 2P, \quad N_1'(1) = 0, \quad N_2(0) = 0, \quad N_2'(1) = 0, \quad (51)$$

а функция  $\theta(x)$  равна  $1/\varphi(x)$ .

С помощью функции Грина  $\Gamma_0(x, \xi)$ , в которой необходимо положить  $\alpha = \lambda\sqrt{6f}$ , определяем  $N_2(x)$ :

$$N_2(x) = \lambda^2 \int_0^1 (f - \theta(\xi))N_1(\xi)\Gamma_0(x, \xi)d\xi - 2\lambda^2 fP \int_0^1 \Gamma_0(x, \xi)d\xi, \quad (52)$$

при этом два последних условия в (51) выполнены. Поскольку функция  $N_1(x)$  считается заданной, то первые два условия в (51) должны быть выполнены заранее.

Подстановка (52) в первое уравнение системы (50) приводит к искомому интегральному уравнению с вырожденным ядром относительно функции  $\theta(x)$ :

$$\theta(x) = f(x) + \mu \int_0^1 \theta(\xi)\Gamma(x, \xi)d\xi, \quad (53)$$

где  $\mu = 2f\lambda^2$ ,

$$f(x) = \frac{N_1''(x)}{2\lambda^2 N_1(x)} + \frac{\mu}{N_1(x)} \int_0^1 N_1(\xi)\Gamma_0(x, \xi)d\xi - 2f\mu P \int_0^1 \Gamma_0(x, \xi)d\xi.$$

Функция  $\Gamma_0(x, \xi)$  определена выше (30), а ядро  $\Gamma(x, \xi)$  интегрального уравнения Фредгольма второго рода (54) определяется формулой

$$\Gamma(x, \xi) = -\frac{N_1(\xi)}{N_1(x)} \Gamma_0(x, \xi). \quad (54)$$

Функция  $N_1(x)$  по постановке задачи считается заданной и строго положительной; случай произвольной функции  $N_1$  требует специального рассмотрения.

Таким образом, в том случае, когда требуется выдержать заданное распределение напряжений в бимсе, воспринимающем и распределяющем внешнюю нагрузку, задача определения закона изменения площадей поперечных сечений бимса сведена к краевой задаче для обыкновенного дифференциального уравнения (48) – в случае пяти ребер и (40) – в случае трех ребер. Даны решения этих краевых задач при произвольном законе распределения напряжений, определяемом функцией  $\sigma(x)$ . Случай задания продольных усилий  $N_1(x)$  сведен к интегральному уравнению (53), решение которого можно получить различными способами. Поскольку ядро интегрального уравнения зависит от заданной функции  $N_1(x)$ , то получить его решение при произвольной  $N_1(x)$  затруднительно.

Задание закона изменения напряжений наиболее физично, поэтому предпочтение следует отдать данному подходу, тем более, что соответствующие краевые задачи доведены до полного решения, что отражено выше в приведенных формулах.

Автор считает своим долгом выразить благодарность С.А. Халилову за постановку задачи, конструктивную критику и постоянную помощь в работе.

#### Список литературы

1. Халилов С.А. Передача направленной по полету локальной нагрузки на крыльевую панель. Модель первого уровня. / С.А. Халилов, С.И. Весельский // Открытые информационные и компьютерные интегрированные технологии: сб. науч. тр. Нац. Аэрокосм. ун-та им. Н.Е. Жуковского «ХАИ» Х., – 2009. – Вып. 42. – 2009. – С. 87-96.

**Рецензент:** д. ф.-м. н., проф., зав. каф. А.Г. Николаев, Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского «ХАИ», г. Харьков.

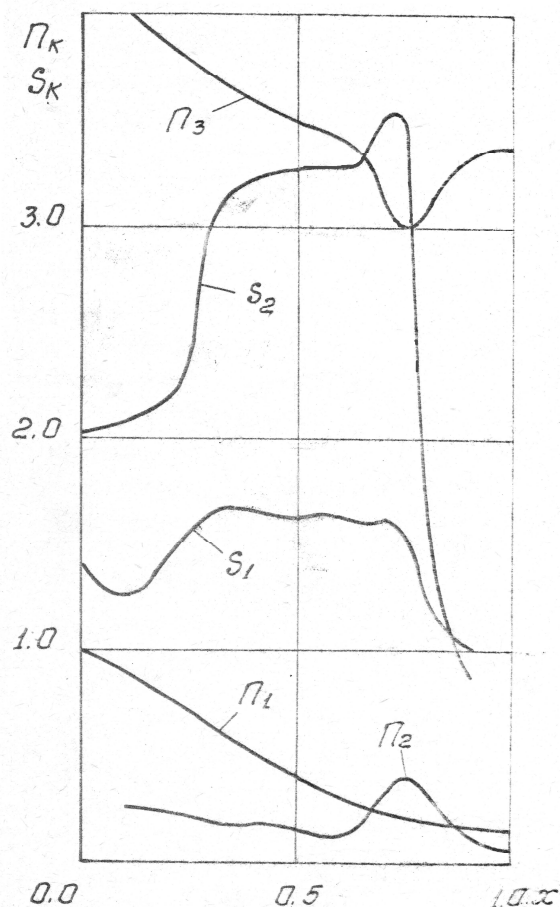


Рис. 7. Изменение величин  $\Pi_k$  и  $S_k$  вдоль длины системы

Поступила в редакцию 01.09.09

**Передача спрямованого за польотом локального  
навантаження на панель крила.  
Спрощена модель першого рівня.  
Оптимальне підкріплення**

Запропоновано спрощену математичну модель задачі про передачу локального навантаження через бортовий елемент на пластину. Розв'язано задачу про оптимальне підкріплення пластини вздовж дії локального навантаження. В загальному випадку цю задачу зведено до інтегрального рівняння Фредгольма другого роду, ядром якого є функція Гріна.

**Ключові слова:** панель крила, локальне навантаження, бортова балка, бімс, розподіл напружень, оптимальне підкріплення, функція Гріна.

**Transfer directed on flight local loading on the wing panel.  
The simplified model of the first level.  
Optimum reinforcement**

The simplified mathematical model of a problem about transfer of local loading through an onboard element on a plate is offered. The problem optimum reinforcements of a plate along action of local loading is solved. Generally last problem is shown to Fredholm integrated equation of the second sort which nucleus is Green's function.

**Keywords:** wing panel, local load, borne beam, beam, stress pattern, optimal stabilization, Green's function.