

Проф. КСАНДРОВ Д. Н.

НАПРЯЖЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА ПРИ КРУЧЕНИИ СТЕРЖНЯ ПРЯМОУГОЛЬНОГО СЕЧЕНИЯ

Печатаемая нами работа является частью диссертации „Напряжения 2-го порядка“, имеющей целью изучить причины возникновения напряжений 2-го порядка, законы их распределения по сечениям и по длине стержней; создать новые, более точные и многогранные концепции о сущности самого явления, которые должны заменить упрощенные представления явлений, излагаемые в сопротивлении материалов; разработать практические методы расчета с учетом напряжений 2-го порядка; выяснить те случаи, когда эти напряжения, развиваясь, перерастают свой класс и, следовательно, необходимо их учитывать, и те случаи, когда ими можно пренебречь, а также внести коррективы в те представления и расчеты, которые изучаются в теории сопротивления материалов¹.

Таким образом в настоящей работе изложены уточненные многогранные концепции явлений, даны выводы и законы распределения напряжений 2-го порядка по сечениям, построены эпюры напряжений, выяснены случаи, когда необходимо вести расчет с учетом напряжений 2-го порядка, разработаны методы расчета, и указано, какие коррективы необходимо внести в более примитивные представления, изучаемые в сопротивлении материалов.

Так, например, с точки зрения теории напряжений 1-го порядка геометрическое место „центров кручения“ (ось центров кручения) — прямая, параллельная оси бруса, в действительности же, если учесть напряжения и 2-го порядка, — геометрическое место центров кручения очень близко к прямой, но все таки кривая. При скручивании очень тонкой пластинки ведется расчет на ограничение наибольших тангенциальных напряжений τ_{\max} , возникающих посредине длинной стороны сечения, а в действительности стержень разрушается от наибольших нормальных напряжений, возникающих на ребрах граней, и т. д.

Уже из этих примеров уясняется значение разработанной нами теории, помещаемой в настоящем сборнике ХАИ.

Напряжения 2-го порядка при кручении стержня прямоугольного сечения

Допустим, что мы вырезали элемент длины стержня прямоугольного сечения, работающего на кручение. Пусть размеры сечения большей стороны — b , меньшей стороны — c и длина элемента — dx . Обозначим ось бруса OO , действующий момент кручения M_t (фиг. 12).

Из теории упругости и сопротивления материалов известно, что в этом случае плоскость сечения при закручивании деформируется в некоторую поверхность. Это обстоятельство усложняет решение вопроса кручения бруса прямоугольного сечения.

Тангенциальное напряжение τ любой точки K (фиг. 13) с координатами (z, y) можно разложить на составляющие — τ_y , перпендикулярное к оси OY , и τ_z , перпендикулярное к оси OZ .

¹ В сборнике № 3 напечатана 1-ая часть работы „Напряжения 2-го порядка при изгибе“; в сборнике № 4 напечатана 2-ая часть „Напряжения 2-го порядка при кручении“ (стержень круглого сечения) и, наконец, настоящая работа посвящается изучению тех же напряжений 2-го порядка стержня прямоугольного сечения; кроме того, подготовлена к печати 4-ая часть „Напряжения 2-го порядка стержня эллиптического сечения“ и „тонкой пластинки“ и 5-ая часть — „Напряжения 2-го порядка при сдвиге“.

Величины этих напряжений приближенно определяются выражениями:

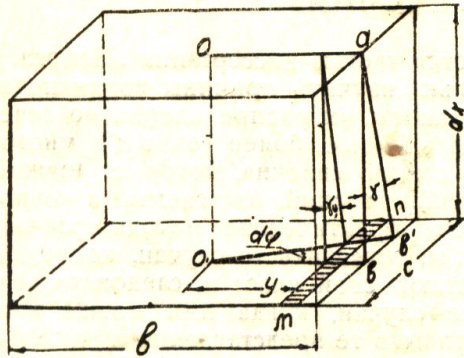
$$\tau_y = \frac{9M_t}{cb^3} \left[1 + \left(\frac{2z}{c} \right)^2 \right] y \quad \text{и} \quad \tau_z = \frac{9M_t}{bc^3} \left[1 + \left(\frac{2y}{b} \right)^2 \right] z. \quad (58)$$

Отсюда видно, что τ_z при $y=0$ и $z = \frac{c}{2}$, т. е. в точке N (в середине большей стороны b) приобретает значение:

$$\tau_b = \frac{9M_t}{bc^3} \frac{c}{2} = \frac{9M_t}{2bc^2}$$

и соответственно τ_y в точке N' ($z=0, y = \frac{b}{2}$):

$$\tau_c = \frac{9M_t}{2cb^2}.$$



Фиг. 12

Полученные приближенные значения несколько расходятся с точными. В этом легко убедиться, разделив числитель и знаменатель τ_b на 9:

$$\tau_b = \frac{M_t}{2bc^2} = \frac{M_t}{0,222bc^2}.$$

Точное значение τ_b определится выражением:

$$\tau_b = \frac{M_t}{abc^2}.$$

В этом выражении коэффициент α является функцией, зависящей от отношения длин сторон $\frac{b}{c}$; его величина изменяется в пределах от 0,2082 до 0,3333.

Коэффициент 0,2222, полученный для приближенного решения, очень близко подходит к точному значению $\alpha = 0,2231$, соответствующему отношению сторон сечения $\frac{b}{c} = 1,3$.

Определим момент всех напряжений рассматриваемого сечения, параллельных оси OZ ; с этой целью составим выражение элементарного усилия, действующего на площадке $dF = dy dz$, выделенной у точки K :

$$\tau_y dy dz.$$

Желая получить элементарный крутящий момент, умножим элементарное усилие на плечо y :

$$dM_b = \tau_y y \cdot dy \cdot dz.$$

Проинтегрировав элементарный момент по площади сечения, получим искомый момент M_b :

$$M_b = \int_{-c/2}^{c/2} dz \int_{-b/2}^{b/2} \tau_y y dy = \int_{-c/2}^{c/2} dz \int_{-b/2}^{b/2} \frac{9M_t}{cb^3} \left[1 - \frac{4z^2}{c^2} \right] y^2 dy.$$

Это выражение получено путем подстановки значения τ_y по зависимости (58). Интеграция по y приводит к следующей зависимости:

$$\begin{aligned} M_b &= \frac{9M_t}{cb^3} \int_{-c/2}^{c/2} dz \left(\frac{y^3}{3} - \frac{4z^2 y^3}{3c^2} \right)_{-b/2}^{b/2} = \frac{9M_t}{cb^3} \int_{-c/2}^{c/2} dz \left(\frac{b^3}{3 \cdot 4} - \frac{4z^2 b^3}{3 \cdot 4 \cdot c^2} \right) = \\ &= \frac{9M_t}{cb^3} \left(\frac{b^3 c}{12} - \frac{b^3 c^3}{3 \cdot c^2 \cdot 3 \cdot 4} \right) = \frac{9M_t}{cb^3} \frac{b^3 c}{36} (3 - 1) = \frac{M_t}{2}, \end{aligned} \quad (59)$$

Определим относительный угол закручивания в отдельности от M_b и M_c .

$$\Theta_b = \frac{M_b}{\beta bc^3 G} \quad \text{и} \quad \Theta_c = \frac{M_c}{\beta bc^3 G}.$$

При одновременном действии M_b и M_c относительный угол закручивания выразится суммой:

$$\Theta = \Theta_b + \Theta_c = \frac{1}{\beta bc^3 G} (M_b + M_c) = \frac{M_t}{\beta bc^3 G},$$

так как $M_b = M_c = \frac{M_t}{2}$, то $M_b + M_c = M_t$.

На основании этого легко получить:

$$\Theta_b = \Theta_c = \frac{\Theta}{2} = \frac{M_t}{2\beta bc^3 G}. \quad (60)$$

Предположим, что точка b' до закручивания занимала положение b (см. фиг. 12); в таком случае продольное волокно ab удлинилось в ab' ; абсолютное удлинение волокна ab равно разности ab' и ab :

$$\overline{ab'} - \overline{ab} = \frac{\overline{ab}}{\cos \gamma} - \overline{ab} = \overline{ab} \left(\frac{1}{\cos \gamma} - 1 \right).$$

Воспользуемся зависимостью (4) $\frac{1}{\cos \gamma} = 1 + \frac{1}{2} \gamma^2$.

Подстановка этой величины приводит к выражению:

$$\overline{ab'} - \overline{ab} = \overline{ab} \left(1 + \frac{1}{2} \gamma^2 - 1 \right) = \frac{\overline{ab}}{2} \gamma^2.$$

Чтобы получить относительное удлинение волокна достаточно найденное абсолютное удлинение отнести к первоначальной длине волокна ab :

$$\epsilon_{y \max} = \frac{\overline{ab'} - \overline{ab}}{\overline{ab}} = \frac{\gamma^2}{2}. \quad (61)$$

Это относительное удлинение обозначено индексом \max , так как оно получается при наибольшем значении γ .

Желая выразить относительный угол сдвига γ через относительный угол закручивания Θ , определим bb' из $\triangle abb'$:

$$\overline{bb'} = \overline{ab} \operatorname{tg} \gamma,$$

по малости угла γ напишем вместо $\operatorname{tg} \gamma$ его аргумент:

$$\overline{bb'} = \overline{ab} \gamma,$$

С другой стороны эту же величину определим из $\triangle obb'$:

$$bb' = \overline{ob} \operatorname{tg} d\varphi = \frac{b}{2} d\varphi.$$

Приравняв оба выражения $\overline{bb'}$, найдем соотношение:

$$\overline{bb'} = \overline{ab} \operatorname{tg} \gamma = d\lambda \gamma = \frac{b}{2} d\varphi,$$

отсюда определим γ :

$$\gamma = \frac{b}{2} \frac{d\varphi}{dx} = \frac{b}{2} \Theta. \quad (62)$$

Подставляя значение γ в (61), получим относительное удлинение:

$$\epsilon_{y \max} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} b^2 \Theta^2. \quad (63)$$

Если выделим волокно, отстоящее на произвольном расстоянии y от центра тяжести сечения бруса, то соответствующий относительный угол сдвига γ_y определится зависимостью:

$$\gamma_y = y\theta. \quad (64)$$

Это выражение получено из (62) путем замены $b/2$ игроком.

Подставляя значение γ_y (61), найдем:

$$\epsilon_y = \frac{1}{2} y^2 \theta^2. \quad (65)$$

Взяв отношение (65) и (63), выразим произвольное относительное удлинение через $\epsilon_{y \max}$:

$$\frac{\epsilon_y}{\epsilon_{y \max}} = \frac{4y^2}{b^2} = \left(\frac{2y}{b}\right)^2; \quad \epsilon_y = \epsilon_{y \max} \left(\frac{2y}{b}\right)^2, \quad (66)$$

т. е. удлинения волокон (ϵ_y и $\epsilon_{y \max}$) относятся между собою как квадраты расстояния их от оси.

Выражение (66) показывает, что относительное удлинение произвольного волокна находится в параболической зависимости расстояния его от оси бруса.

При $y=0$, $\epsilon_y=0$, т. е. волокно, лежащее на оси бруса, не растягивается; при $y=b/2$, $\epsilon_y = \epsilon_{y \max}$.

Желая обобщить сделанный вывод, рассмотрим случай, когда точка волокна ab не лежит ни на одной из главных осей.

Допустим, что мы имеем волокно, совпадающее с прямою KK' (фиг. 13). Пусть точка K имеет координаты (y, z) . По уравнению (65) относительное удлинение волокна kk' , как отстоящего на y от оси z , выразится соотношением:

$$\epsilon_y = \frac{1}{2} y^2 \theta^2. \quad (65)$$

Относительное удлинение того же волокна kk' , как отстоящего на z от оси y , напишется по аналогии с (65) путем замены y на z :

$$\epsilon_z = \frac{1}{2} z^2 \theta^2. \quad (66)$$

Суммарное относительное удлинение получится путем сложения ϵ_y и ϵ_z :

$$\epsilon' = \epsilon_y + \epsilon_z = \frac{1}{2} y^2 \theta^2 + \frac{1}{2} z^2 \theta^2 = \frac{1}{2} \theta^2 (y^2 + z^2), \quad (67)$$

т. е. относительное удлинение произвольного волокна kk' прямо пропорционально квадрату относительного угла закручивания и квадрату расстояния волокна от оси бруса, так как $y^2 + z^2 = (ok)^2 = r^2$.

Складывая его с относительным укорочением ϵ_0 , получим результирующее относительное удлинение:

$$\epsilon = \epsilon_y + \epsilon_z - \epsilon_0 = \frac{1}{2} \theta^2 (y^2 + z^2) - \epsilon_0. \quad (68)$$

Умножая ϵ на модуль упругости E , найдем нормальное напряжение σ :

$$\sigma = E \left[\frac{1}{2} \theta^2 (y^2 + z^2) - \epsilon_0 \right]. \quad (69)$$

Желая составить выражение элементарного усилия, умножим σ на элемент площади $dF = dy dz$:

$$\sigma dF = E \left[\frac{1}{2} \theta^2 (y^2 + z^2) - \epsilon_0 \right] dy dz. \quad (70)$$

Проинтегрировав это выражение по всей площади сечения бруса, найдем нормальное усилие:

$$N = \int_{-c/2}^{c/2} dz \int_{-b/2}^{b/2} \sigma dy = \int_{-c/2}^{c/2} dz \int_{-b/2}^{b/2} E \left[\frac{1}{2} \Theta^2 (y^2 + z^2) - \epsilon_0 \right] dy = \\ = \frac{Ebc}{12} \left[\frac{1}{2} \Theta^2 (b^2 + c^2) - 12\epsilon_0 \right]. \quad (71)$$

Но так как внешние нормальные воздействия отсутствуют, то и внутренние нормальные усилия в сумме равны нулю, поэтому полученное выражение приравняем нулю:

$$\frac{Ebc}{12} \left[\frac{1}{2} \Theta^2 (b^2 + c^2) - 12\epsilon_0 \right] = 0. \quad (72)$$

Отсюда по сокращению на постоянный множитель определяем ϵ_0 :

$$\epsilon_0 = \frac{\Theta^2}{2 \cdot 12} (b^2 + c^2). \quad (73)$$

Найденное значение ϵ_0 подставляем в выражение нормального напряжения:

$$\sigma = E \left[\frac{1}{2} \Theta^2 (y^2 + z^2) - \frac{\Theta^2}{2} \cdot \frac{b^2 + c^2}{12} \right] \quad (74)$$

или

$$\sigma = \frac{1}{2} E \Theta^2 \left[y^2 + z^2 - \frac{b^2 + c^2}{12} \right], \quad (74')$$

т. е. нормальное напряжение изменяется по сечению бруса по закону параболоида вращения. Подставляя координаты центра сечения ($y=0, z=0$), найдем напряжение в центре сечения; здесь оно достигает минимума:

$$\sigma_{\min} = -E \frac{\Theta^2}{2} \frac{b^2 + c^2}{12}. \quad (75)$$

Наибольшего значения σ достигает при $y = \frac{b}{2}$ и $z = \frac{c}{2}$:

$$\sigma_{\max} = E \left[\frac{1}{2} \Theta^2 \frac{b^2 + c^2}{4} - \frac{1}{2} \Theta^2 \frac{b^2 + c^2}{12} \right] = \frac{E\Theta^2}{12} (b^2 + c^2). \quad (76)$$

Сравнение величин σ_{\max} и σ_{\min} приводит к заключению, что σ_{\max} по абсолютной величине в два раза больше σ_{\min} .

Крутящий момент напряжений второго порядка — M_{t_2}

Нормальные напряжения второго порядка, как уже об этом упоминалось, не вполне нормальны к сечению, перпендикулярному к оси бруса OO' (фиг. 13). Направление напряжений совпадает с направлением навитого волокна, т. е. в любой точке совпадает с касательной к нему, образующей определенный угол γ_r с образующей LL' .

Вследствие этого обстоятельства напряжения второго порядка проектируются на плоскость сечения перпендикулярного к оси стержня, создавая некоторый крутящий момент, который обозначим — M_{t_2} .

Допустим, что волокно до закручивания стержня занимало положение $K''K''$; во время закручивания то же волокно переместится в положение $K'L'$, образующее угол γ_r с $K''K''$ и с параллельным ему направлением $L'L$.

Чтобы спроектировать напряжение σ , совпадающее с направлением $K'L'$, достаточно σ умножить на $\sin \gamma_r$, как это видно из $\triangle K'L'L$:

$$\sigma \sin \gamma_r.$$

По малости угла заменим $\sin \gamma_r$ его аргументом

$$\sigma \gamma_r.$$

Желая определить γ_r , определим $K'L$ из $\triangle K'L'L$:

$$K'L = LL' \operatorname{tg} \gamma_r = LL' \gamma_r.$$

Ту же величину $K'L$ определим, как дугу из сектора $K'O'L$:

$$K'L = OK'\theta = r\theta = \sqrt{y^2 + z^2} \theta.$$

Приравнивая ранее найденному значению $K'L$, получим выражение для определения γ_r :

$$LL' \gamma_r = \sqrt{y^2 + z^2} \theta.$$

Обозначив угол закручивания θ через относительный угол закручивания, мы тем самым предопределили, что $LL' = 1$ см, так как θ — угол закручивания стержня, равного единице длины.

На основании этого:

$$\gamma_r = \sqrt{y^2 + z^2} \theta.$$

Теперь преобразуем проекцию σ на плоскость сечения:

$$\sigma \gamma_r = \sigma \sqrt{y^2 + z^2} \theta.$$

Подставляя величину σ из выражения (74), найдем:

$$\sigma \sqrt{y^2 + z^2} \theta = \frac{1}{2} E \theta^3 \left[y^2 + z^2 - \frac{b^2 + c^2}{12} \right] \sqrt{y^2 + z^2}.$$

Умножив проекцию σ на плоскость сечения на элемент площади, найдем элементарное тангенциальное усилие:

$$\theta \sigma \sqrt{y^2 + z^2} dy dz = \frac{1}{2} E \theta^3 \left[y^2 + z^2 - \frac{b^2 + c^2}{12} \right] \sqrt{y^2 + z^2} dy dz.$$

Чтобы получить элементарный крутящий момент $dM_{t\sigma}$, умножим полученное выражение на плечо $r = \sqrt{y^2 + z^2}$:

$$dM_{t\sigma} = \sigma \sqrt{y^2 + z^2} r \theta dy dz = \frac{1}{2} E \theta^3 \left[y^2 + z^2 - \frac{b^2 + c^2}{12} \right] (y^2 + z^2) dy dz.$$

Проинтегрировав это выражение по всей площади сечения стержня, найдем $M_{t\sigma}$:

$$M_{t\sigma} = \frac{1}{2} E \theta^3 \int_{-c/2}^{c/2} dz \int_{-b/2}^{b/2} \left[y^2 + z^2 - \frac{b^2 + c^2}{12} \right] (y^2 + z^2) dy.$$

Интеграцию проводим в следующем последовательном порядке:

$$\begin{aligned} M_{t\sigma} &= \frac{1}{2} E \theta^3 \int_{-c/2}^{c/2} dz \int_{-b/2}^{b/2} \left[(y^2 + z^2)^2 - \frac{b^2 + c^2}{12} (y^2 + z^2) \right] dy = \\ &= \frac{1}{2} E \theta^3 \int_{-c/2}^{c/2} \left[\frac{b^5}{5 \cdot 16} + \frac{2}{3} \frac{b^3 z^2}{3 \cdot 4} + z^4 b - \frac{b^2 + c^2}{12} (3 \cdot 4 + z^2 b) \right] dz. \end{aligned}$$

Интегрируем по z и подставляем значения пределов, тогда

$$M_{t\sigma} = \frac{E \theta^3 b c}{360} (b^4 + c^4).$$

Подстановка наименования единиц приводит к выводу, что $M_{t\sigma}$ выражается в кг-см; это служит косвенным подтверждением правильности полученного выражения для $M_{t\sigma}$.

Определим крутящий момент, который образуют тангенциальные напряжения $M_{t\tau}$.

Для этого воспользуемся тем соображением, что угол закручивания создается за счет действия $M_{t\tau}$. Напишем выражение относительно угла закручивания для стержня прямоугольного сечения:

$$\Theta = \frac{M_{t\tau}}{\beta bc^3 G},$$

отсюда определим $M_{t\tau}$:

$$M_{t\tau} = \beta bc^3 G \Theta.$$

Чтобы получить полный крутящий момент, необходимо сложить два найденные момента:

$$\begin{aligned} M_t &= M_{t\tau} + M_{t\sigma} = \beta bc^3 G \Theta + \frac{E \Theta^3}{360} b \cdot c \cdot (b^4 + c^4) = \\ &= \beta bc^3 G \Theta \left[1 + \frac{1}{360 \beta} \frac{E}{G} \Theta^2 \frac{b^4 + c^4}{c^2} \right]. \end{aligned}$$

Таким образом действие внешнего крутящего момента M_t , вызывая возникновение напряжений 1-го и 2-го порядка, создает два момента кручения внутренних сил, которые в сумме равны M_t . Отсюда следует сделать заключение, что наличие нормальных напряжений, создающих крутящий момент, уменьшает величины тангенциальных напряжений.

Величина момента $M_{t\sigma}$ оценивается вторым членом выражения, заключенного в скобках.

Из полученного выражения видно, что M_t связан с Θ зависимостью третьего порядка. Поэтому, если известен крутящий момент M_t , то необходимо для определения Θ использовать найденное уравнение:

$$M_t = \beta bc^3 G \Theta \left[1 + \frac{1}{360} \frac{E}{G} \Theta^2 \left(\frac{b^4 + c^4}{c^2} \right) \right].$$

Найдя Θ , можно определить τ_{\max} по зависимостям:

$$\tau_{\max} = \frac{M_{t\tau}}{abc^2}; \quad \Theta = \frac{M_{t\tau}}{\beta bc^3 G}.$$

Отсюда:

$$\tau_{\max} = \frac{\beta}{\alpha} c G \Theta$$

и, наконец, по уравнению (74') можем определить напряжения второго порядка:

$$\sigma = \frac{1}{2} E \Theta^2 \left[y^2 + z^2 - \frac{b^2 + c^2}{12} \right].$$

Для квадратного сечения второй член в скобках выражения M_t очень маленькая дробь, даже при очень больших τ_{\max} . Определим величину второго члена для квадратного сечения при $\tau_{\max} = 6000$ кг/см².

Столь большое значение выбрано для того, чтобы показать, что даже при этой величине второй член все же представляет собой настолько незначительную величину, что ею можно (и следует) пренебречь.

$$\frac{1}{360 \beta} \frac{E}{G} \Theta^2 \frac{b^4 + c^4}{c^2} = \frac{2 \cdot 10^6 \Theta^2 2b^2}{360 \cdot 0,1418 \cdot 10^5} = \frac{b^2 \Theta^2}{0,141 \cdot 9 \cdot 8} = \frac{125 \cdot b^2}{141 \cdot 9} \Theta^2.$$

Выразим Θ через τ_{\max} . Для этого напишем уравнения того и другого (через $M_{t\tau}$):

$$\tau_{\max} = \frac{M_{t\tau}}{abc^2}; \quad \Theta = \frac{M_{t\tau}}{\beta bc^3 G}.$$

Из первого находим M_{tc} и подставляем во второе:

$$M_{tc} = abc^2 \tau_{\max}; \Theta = \frac{abc^2 \tau_{\max}}{\beta bc^3 G} = \frac{\alpha \tau_{\max}}{\beta c G}.$$

Это значение Θ подставляем в исходное выражение:

$$\frac{1}{360\beta} \cdot \frac{E}{G} \cdot \Theta^2 \frac{b^4 + c^4}{c^2} = \frac{125b^2 \alpha^2 \tau_{\max}^2}{141.9 \beta^2 c^2 G^2} = \frac{125 \cdot 208^2 \cdot 36 \cdot 10^6}{9 \cdot 141 \cdot 141^2 \cdot 64 \cdot 10^{10}} = 12 \cdot 10^{-6}.$$

Конечно, по сравнению с единицей величиной $12 \cdot 10^{-6}$ пренебречь вполне возможно.

Однако второй член не всегда так разительно мал по сравнению с первым. Если сечение из квадратного переходит в прямоугольное и больший размер b начинает значительно расти по сравнению с c , то одновременно с этим начинает возрастать и второй член по сравнению с единицей.

Этот рост определяется следующими данными по выражению второго члена:

Отношение $\frac{b}{c}$	Величина второго члена
1	0,000012
4	0,000114
6	0,003390
10	0,011700
16	0,078800
18	0,123000
20	0,187000
30	0,950000
40	3,000000

Из рассмотрения этих данных видно, что уже при $\frac{b}{c} = 18$ второй член начинает играть заметную роль во всем процессе кручения — $12,3\%$; при $\frac{b}{c} = 30$ второй член достигает 95% , т. е. практически догоняет первый и при $\frac{b}{c} = 40$ второй член превосходит первый в три раза (300%).

Уравнение линии нулевых напряжений

Чтобы получить уравнение нулевой линии (линии с нулевым напряжением), достаточно выражение σ приравнять нулю:

$$\sigma = \frac{1}{2} E \Theta^2 \left[y^2 + z^2 - \frac{b^2 + c^2}{12} \right] = 0.$$

После сокращения на постоянный множитель получим:

$$y^2 + z^2 = \frac{b^2 + c^2}{12}, \quad (77)$$

т. е. нулевая линия представляет собою окружность с радиусом

$$R = \frac{\sqrt{b^2 + c^2}}{2\sqrt{3}}. \quad (78)$$

Площадь „сжатого сердечника“ определится, как площадь круга радиуса R :

$$F_0 = \pi R^2 = \frac{\pi (b^2 + c^2)}{12}. \quad (79)$$

Площадь сечения растянутых волокон получается, как разность между площадью прямоугольного сечения и площадью сечения „сжатого сердечника“.

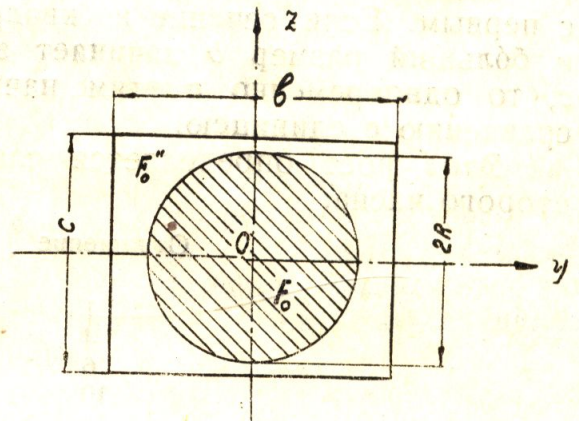
$$F_0'' = bc - \frac{\pi(b^2 + c^2)}{12} = \frac{12bc - \pi(b^2 + c^2)}{12}. \quad (80)$$

Конечно $F_0' > F_0''$, т. к. напряжения сжатия по абсолютной величине меньше напряжений растяжения, а нормальные усилия сжатия и растяжения равны. На фиг. 14 дано прямоугольное сечение с размерами $b \times c$, заштрихованная окружность представляет сечение „сжатого сердечника“ с радиусом $R = \frac{\sqrt{b^2 + c^2}}{2\sqrt{3}}$; остальная площадь — сечение растянутых волокон.

Найдем отношение этих площадей Φ :

$$\begin{aligned} \Phi = \frac{F_0'}{F_0''} &= \frac{\pi(b^2 + c^2)12}{12[12bc - \pi(b^2 + c^2)]} = \\ &= \frac{\pi(b^2 + c^2)}{12bc - \pi(b^2 + c^2)}. \end{aligned} \quad (81)$$

Очевидно, что этим выражением можно пользоваться только до тех пор, пока малая сторона c прямоугольного сечения, уменьшаясь, не достигнет величины меньшей



Фиг. 14

$$2R = \frac{\sqrt{b^2 + c^2}}{\sqrt{3}}.$$

В этот момент окружность радиуса R пересечет прямоугольник $b \times c$ и площадь круга утерять свой физический смысл — сечения „сжатого сердечника“.

Чтобы выяснить форму сечения „сжатого сердечника“ при всевозможных соотношениях $\frac{b}{c}$, мы представляем себе, что b и c могут увеличиваться и уменьшаться по нашему желанию.

Рассмотрим вопрос, в каких пределах остается справедливым соотношение (81). Ответить на этот вопрос легко: наименьшее соотношение — $\frac{b}{c} = 1$ (меньше этого не может достигнуть отношение большей стороны к меньшей, т. к. b в таком случае перестала бы быть большей стороной и ее роль стала бы выполнять c).

1) Рассмотрим случай: $b = c$

$$R = \frac{\sqrt{b^2 + c^2}}{2\sqrt{3}}; 12R^2 = 2b^2 = 2c^2; R^2 = \frac{c^2}{6}$$

$$R = \frac{c}{\sqrt{6}}; R = 0,408c; \Phi = \frac{F_0'}{F_0''} = 1,10.$$

В качестве промежуточных соотношений рассмотрим следующие:

2) $b = \frac{6}{5}c = 1,2c; R = 0,45c; \Phi = 1,14.$

3) $b = 1,41c; R = 0,5c; \Phi = 1,25.$

Последний случай является предельным, как это уже указывалось выше, т. к. при дальнейшем увеличении отношения $\frac{b}{c}$ окружность

радиуса — площади сечения „сжатого сердечника“ — R пересечет сечение прямоугольника и утерает свой физический смысл.

Величины R и Φ во всех трех случаях вычислены по выражениям (78) и (81).

Уже на основании полученных данных видно, что по мере увеличения отношения $\frac{b}{c}$ (от 1 до 1,41) растет R (от 0,408с до 0,5с) и отношение $\Phi = \frac{F'_0}{F''_0}$ (от 1,10—до 1,25).

Чем обусловлено такое закономерное увеличение?

Из выражения нормального напряжения (69) видно, что положительная его часть растет прямо пропорционально сумме квадратов координат или квадрату расстояния от оси бруса:

$$\sigma = E \left[\frac{1}{2} \Theta^2 (y^2 + z^2) - \epsilon_0 \right] = E \frac{\Theta^2}{2} (y^2 + z^2) - E \epsilon_0 = \frac{1}{2} E \Theta^2 r^2 - E \epsilon_0, \quad (69)$$

где $r^2 = y^2 + z^2$.

В связи с этим напряжения растяжения при увеличении отношения $\frac{b}{c}$, вследствие увеличения r быстро растут, а т. к. сумма элементарных усилий растяжения остается равной сумме элементарных усилий сжатия, то необходимо увеличение F'_0 для соответствующего увеличения нормального усилия сжатия. Этими обстоятельствами объясняется рост R и Φ .

На основании этого, составив выражение элементарного усилия, проинтегрируем его сначала по площади F'_0 , а затем по площади F''_0 . Нормальные усилия — N'_0 сжатия и N''_0 растяжения должны оказаться по абсолютной величине равными, т. к. отсутствуют внешние нормальные воздействия.

Элементарное нормальное усилие получим, умножив напряжение на элемент площади:

$$\sigma dF = E \left[\frac{1}{2} \Theta^2 (y^2 + z^2) - \epsilon_0 \right] dF.$$

Чтобы вычислить N'_0 , достаточно σdF проинтегрировать по F'_0

$$\begin{aligned} N'_0 &= \int_0^{F'_0} \sigma dF = E \int_0^{F'_0} \left[\frac{1}{2} \Theta^2 (y^2 + z^2) - \epsilon_0 \right] dF = \\ &= E \left[\frac{1}{2} \Theta^2 \int_0^{F'_0} y^2 dF + \frac{1}{2} \Theta^2 \int_0^{F'_0} z^2 dF - \epsilon_0 \int_0^{F'_0} dF \right] = \frac{E\pi R^2}{4} (\Theta^2 R^2 - 4\epsilon_0). \end{aligned}$$

Подставляя значение $\epsilon_0 = \frac{\Theta^2 (b^2 + c^2)}{2 \cdot 12}$ из (73), найдем:

$$N'_0 = \frac{E\pi R^2}{4} \left[\Theta^2 R^2 - \frac{4\Theta^2 (b^2 + c^2)}{2 \cdot 12} \right] = \frac{E\pi R^4 \Theta^2}{4} \left[1 + \frac{b^2 + c^2}{6R^2} \right].$$

Используя выражение (78) — $R = \frac{\sqrt{b^2 + c^2}}{2\sqrt{3}}$, получим:

$$N'_0 = \frac{E\pi \Theta^2 (b^2 + c^2)^2}{4 \cdot 12 \cdot 12} \left[1 - \frac{(b^2 + c^2) 12}{6(b^2 + c^2)} \right] = - \frac{E\pi \Theta^2 (b^2 + c^2)^2}{4 \cdot 12}. \quad (82)$$

Перед выражением знак минуса потому, что N'_0 — сила сжатия.

Определим силу растяжения. Она получится из того же интеграла при соответствующей замене пределов:

$$N_0'' = \int_{F_0'}^{F_0'+F_0''} \sigma dF = E \int_{F_0'}^{F_0'+F_0''} \left[\frac{1}{2} \Theta^2 (y^2 + z^2) - \varepsilon_0 \right] dF = \\ = E \left[\int_{F_0'}^{F_0'+F_0''} \frac{1}{2} \Theta^2 y^2 dF + \int_{F_0'}^{F_0'+F_0''} \frac{1}{2} \Theta^2 z^2 dF - \varepsilon_0 \int_{F_0'}^{F_0'+F_0''} dF \right].$$

В этом выражении $F_0' + F_0'' = F$, где F — площадь прямоугольного сечения бруса. Интегрируя и подставляя пределы, получим:

$$N_0'' = E \left[\frac{1}{2} \Theta^2 \left(\frac{cb^3}{12} - \frac{\pi R^4}{4} \right) + \frac{1}{2} \Theta^2 \left(\frac{bc^3}{12} - \frac{\pi R^4}{4} \right) - \varepsilon_0 (bc - \pi R^2) \right] = \\ = E \left[\frac{1}{2} \Theta^2 \left(\frac{cb^3 + bc^3}{12} - \frac{\pi R^4}{2} \right) - \varepsilon_0 (bc - \pi R^2) \right].$$

Подставляя значения ε_0 и R по зависимостям (73) и (78), преобразуем найденное выражение N_0'' :

$$N_0'' = E \left\{ \frac{1}{2} \Theta^2 \left[\frac{cb^3 + bc^3}{12} - \frac{\pi}{2} \left(\frac{b^2 + c^2}{12} \right)^2 \right] - \frac{\Theta^2 (b^2 + c^2)}{2 \cdot 12} \left(bc - \pi \frac{b^2 + c^2}{12} \right) \right\}.$$

Вынося сначала $\frac{\Theta^2}{2}$, а затем выражение $\frac{b^2 + c^2}{12} = R^2$ общим множителем, найдем:

$$N_0'' = \frac{1}{2} E \Theta^2 \left\{ \frac{cb(b^2 + c^2)}{12} - \frac{\pi}{2} \left(\frac{b^2 + c^2}{12} \right)^2 - \frac{b^2 + c^2}{12} \left[\frac{12bc - \pi(b^2 + c^2)}{12} \right] \right\} = \\ = \frac{1}{2} E \Theta^2 \left(\frac{b^2 + c^2}{12} \right) \left[cb - \frac{\pi}{2} \frac{b^2 + c^2}{12} - \frac{12bc - \pi(b^2 + c^2)}{12} \right].$$

После простых преобразований получим окончательное выражение для N_0'' :

$$N_0'' = \frac{E \Theta^2 \pi}{4} \left(\frac{b^2 + c^2}{12} \right)^2. \quad (83)$$

Сравнивая формулы (82) и (83), убеждаемся, что действительно абсолютные величины сил сжатия и растяжения равны:

$$|N_0'| = |N_0''|. \quad (84)$$

Если мысленно представить себе, что стороны прямоугольного сечения стержня изменяются, и отношение b/c растет, то одновременно с этим увеличивается и радиус сечения круга „сжатого сердечника“ (как мы это уже видели выше), а потому наступит момент, когда c окажется равным диаметру $2R$; в этот момент окружность коснется в двух точках по середине больших сторон сечения.

Для этого необходимо выполнение условия:

$$2R = \frac{2\sqrt{b^2 + c^2}}{\sqrt{12}} = c; \quad \frac{\sqrt{b^2 + c^2}}{\sqrt{3}} = c.$$

После возведения в квадрат получим:

$$b^2 + c^2 = 3c^2; \quad b^2 = 2c^2; \quad b = 1,41c \quad \text{и} \quad R = 0,5c \quad \text{и} \quad \Phi = \frac{F_0'}{F_0''} = 1,25.$$

Случай, когда $2R > c$.

Если представить себе дальнейшее изменение отношения b/c в сторону увеличения, то R уже будет превышать $0,5c$, $2R > c$; окружность пересечет прямоугольник в четырех точках, и сечение „сжатого

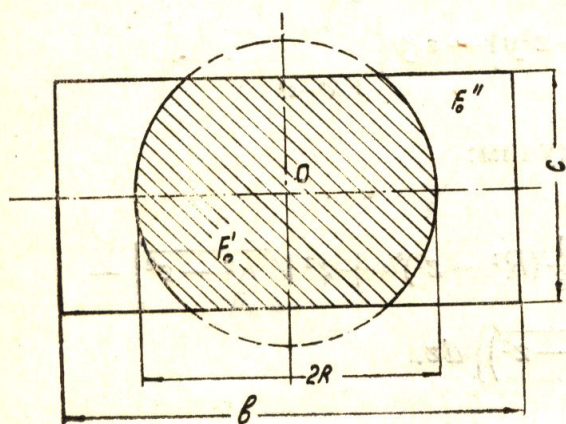
сердечника⁴, до сих пор представлявшее собою круг, изменится в более сложную форму: круг, усеченный с двух сторон сегментами (см. фиг. 15).

Основное условие — сумма элементарных усилий растяжения по поперечному сечению должна равняться сумме усилий сжатия — сохраняет смысл; следовательно, интегрируя нормальные усилия, по площади сечения „сжатого сердечника“ F'_0 , мы должны получить усилие, равное растяжению по площади F''_0 .

Определим равнодействующую сжатия:

$$N'_0 = E \int_0^{F'_0} \left[\frac{1}{2} \Theta^2 (y^2 + z^2) - \epsilon_0 \right] dF = E \int_{-c/2}^{c/2} dz \int_{-\sqrt{R^2-z^2}}^{\sqrt{R^2-z^2}} \left[\frac{1}{2} \Theta^2 (y^2 + z^2) - \epsilon_0 \right] dy =$$

$$= E \int_{-c/2}^{c/2} \left[\frac{1}{2} \Theta^2 \left(\frac{y^3}{3} + z^2 y \right) - \epsilon_0 y \right] \int_{-\sqrt{R^2-z^2}}^{\sqrt{R^2-z^2}} dz = E \frac{1}{2} \Theta^2 \frac{2}{3} \int_{-c/2}^{c/2} (R^2 - z^2)^{3/2} dz +$$



Фиг. 15

$$+ E \Theta^2 \int_{-c/2}^{c/2} z^2 \sqrt{R^2 - z^2} dz -$$

$$- 2\epsilon_0 E \int_{-c/2}^{c/2} \sqrt{R^2 - z^2} dz.$$

Далее интегрируем каждый интеграл в отдельности, обозначая римскими I, II и III:

$$I = \int_{-c/2}^{c/2} \sqrt{R^2 - z^2} dz =$$

$$= \frac{z}{2} \sqrt{R^2 - z^2} + \frac{R^2}{2} \arcsin \frac{z}{R} \Big|_{-c/2}^{c/2} = \frac{c}{2} \sqrt{R^2 - \frac{c^2}{4}} + R^2 \arcsin \frac{c}{2R}$$

$$II = \int_{-c/2}^{c/2} z^2 \sqrt{R^2 - z^2} dz = \frac{z}{8} (2z^2 - R^2) \sqrt{R^2 - z^2} + \frac{R^4}{8} \arcsin \frac{z}{R} \Big|_{-c/2}^{c/2} =$$

$$= \frac{c}{8} \left(\frac{c^2}{2} - R^2 \right) \sqrt{R^2 - \frac{c^2}{4}} + \frac{R^4}{4} \arcsin \frac{c}{2R}$$

$$III = \int (R^2 - z^2)^{3/2} dz = \frac{z}{8} (5R^2 - 2z^2) \sqrt{R^2 - z^2} + \frac{3}{8} R^4 \arcsin \frac{z}{R} \Big|_{-c/2}^{c/2} =$$

$$= \frac{c}{8} \left(5R^2 - \frac{c^2}{2} \right) \sqrt{R^2 - \frac{c^2}{4}} + \frac{3}{4} R^4 \arcsin \frac{c}{2R}.$$

Подставляя найденные значения интегралов в выражение силы сжатия, найдем:

$$N_0 = \frac{E \Theta^2}{3} \left[\frac{c}{8} \left(5R^2 - \frac{c^2}{2} \right) \sqrt{R^2 - \frac{c^2}{4}} + \frac{3}{4} R^4 \arcsin \frac{c}{2R} \right] +$$

$$+ E \Theta^2 \left[\frac{c}{8} \left(\frac{c^2}{2} - R^2 \right) \sqrt{R^2 - \frac{c^2}{4}} + \frac{R^4}{4} \arcsin \frac{c}{2R} \right] -$$

$$- 2\epsilon_0 E \left[\frac{c}{2} \sqrt{R^2 - \frac{c^2}{4}} + R^2 \arcsin \frac{c}{2R} \right].$$

После простых преобразований получим для N'_0 выражение:

$$N'_0 = \frac{E\Theta^2 c}{24} \sqrt{R^2 - \frac{c^2}{4}} (c^2 + 2R^2) + \\ + \frac{E\Theta^2}{2} R^4 \arcsin \frac{c}{2R} - 2E\varepsilon_0 \left[\frac{c}{2} \sqrt{R^2 - \frac{c^2}{4}} + R^2 \arcsin \frac{c}{2R} \right]. \quad (85)$$

Сила растяжения N''_0 получится из того же интеграла при соответствующем изменении пределов интегрирования:

$$N''_0 = E \int_{F'_0}^{F'_0 + F''_0} \left[\frac{1}{2} \Theta^2 (y^2 + z^2) - \varepsilon_0 \right] dF = E \int_{-c/2}^{c/2} dz 2 \int_{\sqrt{R^2 - z^2}}^{b/2} \left[\frac{1}{2} \Theta^2 (y^2 + z^2) - \varepsilon_0 \right] dy.$$

Коэффициент два поставлен пред вторым интегралом, так как таких площадей — две (выше круга и ниже его).

Интеграция по y приводит к выражению:

$$N''_0 = 2E \int_{-c/2}^{c/2} dz \left[\frac{1}{2} \Theta^2 \left(\frac{y^3}{3} + z^2 y \right) - \varepsilon_0 y \right] \Big|_{\sqrt{R^2 - z^2}}^{b/2}$$

После подстановки пределов, получим:

$$N''_0 = 2E \int_{-c/2}^{c/2} \left\{ \frac{1}{2} \Theta^2 \left(\frac{b^3}{3 \cdot 8} + \frac{z^2 b}{2} \right) - \frac{1}{2} \Theta^2 \left[\frac{1}{3} (R^2 - z^2)^{3/2} + z^2 \sqrt{R^2 - z^2} \right] - \varepsilon_0 \left(\frac{b}{2} - \sqrt{R^2 - z^2} \right) \right\} dz.$$

Интегрируя по z , разбиваем на сумму отдельных интегралов:

$$N''_0 = 2E \left[\frac{1}{2} \Theta^2 \left(\frac{b^3 z}{24} + \frac{b}{2} \frac{z^3}{3} \right) \Big|_{-c/2}^{c/2} - \frac{1}{2} \Theta^2 \frac{1}{3} \int_{-c/2}^{c/2} (R^2 - z^2)^{3/2} dz - \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \Theta^2 \int_{-c/2}^{c/2} z^2 \sqrt{R^2 - z^2} dz - \varepsilon_0 \left(\frac{b}{2} z \right) \Big|_{-c/2}^{c/2} + \varepsilon_0 \int_{-c/2}^{c/2} \sqrt{R^2 - z^2} dz \right].$$

Подставляя значения вышенайденных интегралов I, II и III и указанные пределы, преобразуем выражение в следующее:

$$N''_0 = 2E \left\{ \frac{\Theta^2}{48} (b^3 c + b c^3) - \frac{1}{6} \Theta^2 \left[\frac{c}{8} \left(5R^2 - \frac{c^2}{2} \right) \sqrt{R^2 - \frac{c^2}{4}} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{3}{4} R^4 \arcsin \frac{c}{2R} - \frac{1}{2} \Theta^2 \left[\frac{c}{8} \left(\frac{c^2}{2} - R^2 \right) \sqrt{R^2 - \frac{c^2}{4}} + \frac{R^4}{4} \arcsin \frac{c}{2R} \right] - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{\varepsilon_0 b c}{2} + \varepsilon_0 \left[\frac{c}{2} \sqrt{R^2 - \frac{c^2}{4}} + R^2 \arcsin \frac{c}{2R} \right] \right\}.$$

После некоторых простых преобразований найдем значение растягивающей силы N''_0 :

$$N''_0 = \frac{Ebc}{24} [\Theta^2 (b^2 + c^2) - 24\varepsilon_0] - \frac{E\Theta^2 c}{24} \sqrt{R^2 - \frac{c^2}{4}} (c^2 + 2R^2) - \\ - \frac{E\Theta^2}{2} R^2 \arcsin \frac{c}{2R} + 2E\varepsilon_0 \left[\frac{c}{2} \sqrt{R^2 - \frac{c^2}{4}} + R^2 \arcsin \frac{c}{2R} \right].$$

Подставляя значение $\varepsilon_0 = \frac{\Theta^2(b^2 + c^2)}{2 \cdot 12}$, найдем, что первый член N_0'' обратится в нуль:

$$\frac{Ebc}{24} \left[\Theta^2(b^2 + c^2) - 24 \cdot \frac{\Theta^2(b^2 + c^2)}{24} \right] = 0.$$

Таким образом для N_0'' находим новое выражение:

$$N_0'' = -\frac{E\Theta^2 c}{24} \sqrt{R^2 - \frac{c^2}{4}} (c^2 + 2R^2) - \frac{E\Theta^2}{2} R^4 \arcsin \frac{c}{2R} + 2E\varepsilon_0 \left(\frac{c}{2} \sqrt{R^2 - \frac{c^2}{4}} + R^2 \arcsin \frac{c}{2R} \right). \quad (86)$$

Сравнивая это выражение с N_0' , убеждаемся, что силы растяжения (N_0'') и сжатия (N_0') по абсолютной величине равны.

Желая определить соотношение $\frac{F_0'}{F_0''}$, вычислим в отдельности каждую площадь:

$$F_0' = \int_{-c/2}^{c/2} 2 \int_0^{\sqrt{R^2 - z^2}} dy = 2 \int_{-c/2}^{c/2} dz \sqrt{R^2 - z^2} = 2 \left(\frac{c}{2} \sqrt{R^2 - \frac{c^2}{4}} + R^2 \arcsin \frac{c}{2R} \right) =$$

$$= c \sqrt{R^2 - \frac{c^2}{4}} + 2R^2 \arcsin \frac{c}{2R}$$

$$F_0'' = \int_{-c/2}^{c/2} dz 2 \int_{\sqrt{R^2 - z^2}}^{b/2} dy = 2 \int_{-c/2}^{c/2} dz \left(\frac{b}{2} - \sqrt{R^2 - z^2} \right) =$$

$$= bc - 2 \left(\frac{c}{2} \sqrt{R^2 - \frac{c^2}{4}} + R^2 \arcsin \frac{c}{2R} \right) =$$

$$= bc - \left(c \sqrt{R^2 - \frac{c^2}{4}} + 2R^2 \arcsin \frac{c}{2R} \right).$$

Рассматривая полученные выражения, приходим к заключению, что сумма F_0' и F_0'' равна площади прямоугольного сечения:

$$F_0 = F_0' + F_0'' = bc.$$

Это соотношение служит косвенным подтверждением правильности выражений, найденных для F_0' и F_0'' .

Если принять значение c равным $2R$, т. е. окружность „сжатого сердечника“ касается двух сторон b прямоугольного сечения, то для F_0' должна получиться площадь круга, равная πR^2 , а для $F_0'' = bc - \pi R^2$. В этом легко убедиться подстановкою $\frac{c}{2} = R$ в выражения, полученные для F_0' и F_0'' .

$$F_0' \Big|_{c/2=R} = 2R^2 \arcsin 1 = \pi R^2; \quad F_0'' \Big|_{c/2=R} = bc - \pi R^2.$$

Возьмем отношение $\frac{F_0'}{F_0''}$:

$$\frac{F_0'}{F_0''} = \frac{c \sqrt{R^2 - \frac{c^2}{4}} + 2R^2 \arcsin \frac{c}{2R}}{bc - \left(c \sqrt{R^2 - \frac{c^2}{4}} + 2R^2 \arcsin \frac{c}{2R} \right)}. \quad (86')$$

Чтобы проследить тенденцию изменения отношения $\frac{F'_0}{F''_0}$ для рассматриваемого случая достаточно выбрать $b > \sqrt{2} \cdot c$, т. е. $b > 1,41c$ и вследствие этого $R > \frac{c}{2}$.

Например, возьмем $R = c$; в этом случае для b получим величину из соотношения:

$$R^2 = c^2 = \frac{b^2 + c^2}{12}; \quad b^2 = 11c^2; \quad b = \sqrt{11} \cdot c = 3,316c.$$

На основании этого получим величину отношения $\frac{F'_0}{F''_0}$:

$$\frac{F'_0}{F''_0} = \frac{c \sqrt{\frac{3}{4}c^2 + 2c^2 \frac{30 \cdot \pi}{180}}}{3,32c^2 - c \sqrt{\frac{3}{4}c^2 - 2c^2 \frac{30 \cdot \pi}{180}}} = \frac{6(3\sqrt{3} + 2\pi)c^2}{6(3,32 \cdot 6 - 3\sqrt{3} - 2\pi)c^2} = 1,36.$$

Выражениями, выведенными для F'_0 и F''_0 , можно пользоваться только при условии, что $R > \frac{c}{2}$; в противном случае $c \sqrt{R^2 - \frac{c^2}{4}}$ обращается в мнимую величину; это соответствует тому случаю, когда сечение „сжатого сердечника“ не касается сторон прямоугольника и не пересекает их.

Сопоставляя $\frac{F'_0}{F''_0}$ для различных соотношений b и c , придем к следующим величинам, полученным для их частных значений:

$$1) \quad b = c; \quad R^2 = \frac{b^2 + c^2}{12} = \frac{c^2}{6} = 0,166c^2; \quad \frac{F'_0}{F''_0} = 1,10$$

$$2) \quad b = \frac{6}{5}c = 1,2c; \quad R = 0,45c; \quad \frac{F'_0}{F''_0} = 1,14$$

$$3) \quad b = 1,41c; \quad R = 0,5c; \quad \frac{F'_0}{F''_0} = 1,25$$

$$4) \quad b = 6,86c; \quad R = 2c; \quad \frac{F'_0}{F''_0} = 1,36$$

$$5) \quad b = 13,82c; \quad R = 8c; \quad \frac{F'_0}{F''_0} = 1,365$$

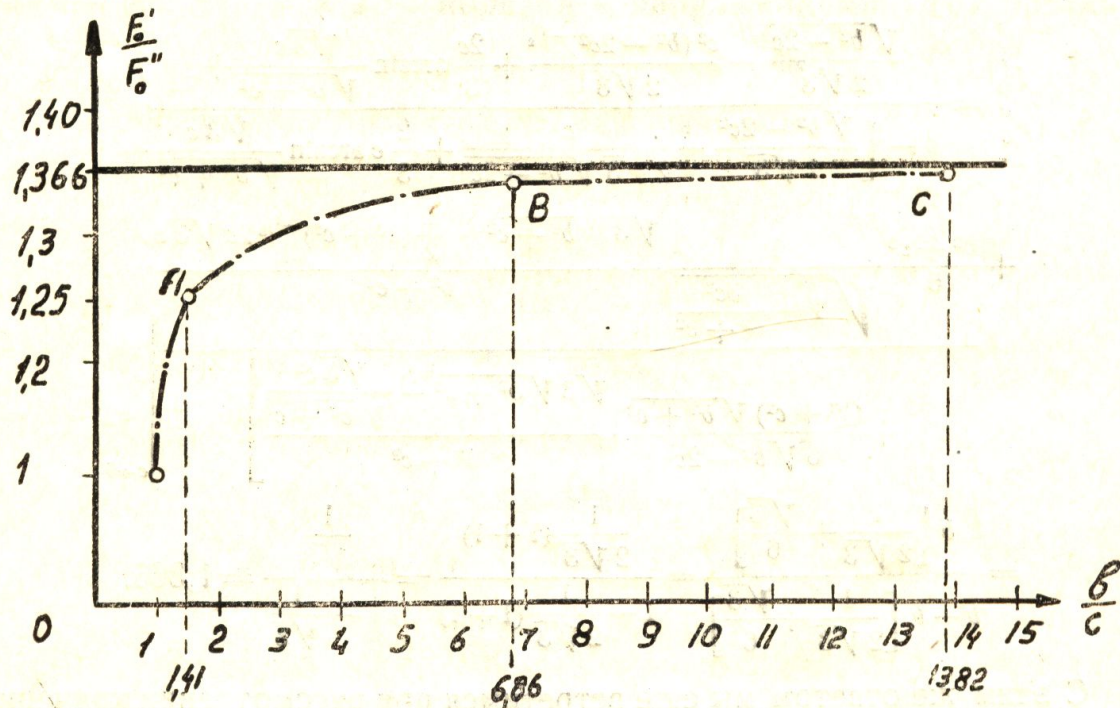
$$6) \quad b = 27,69; \quad R = 20c; \quad \frac{F'_0}{F''_0} \cong 1,366.$$

Сопоставляя вышеприведенные величины, приходим к следующему заключению.

Наименьшее значение отношения $\frac{F'_0}{F''_0}$ получается для квадратного сечения $\frac{F'_0}{F''_0} = 1,10$; при этом $\frac{b}{c} = 1$. При возрастании $\frac{b}{c}$ до 1,41, отношение $\frac{F'_0}{F''_0}$ достигает 1,25; дальнейшему росту отношения $\frac{b}{c}$ соответствует пересечение окружности „сжатого сердечника“ с прямоуголь-

ным сечением бруса, отношение площадей $\frac{F_0'}{F_0''}$ продолжает расти, но очень медленно.

Если все эти данные представить графически так, что по оси абсцисс откладывать отношения $\frac{b}{c}$, а по оси ординат $\frac{F_0'}{F_0''}$, то закон изменения этого отношения в зависимости от отношения $\frac{b}{c}$ представится кривой ABC , которая стремится практически коснуться прямой FG на бесконечности.



Фиг. 16

На фиг. 16 показана графическая зависимость между отношениями: $\frac{F_0'}{F_0''}$ и $\frac{b}{c}$; она выражается на чертеже кривою ABC .

Желая получить предельное значение отношения

$$\frac{F_0'}{F_0''} = \frac{c \sqrt{R^2 - \frac{c^2}{4}} + 2R^2 \arcsin \frac{c}{2R}}{bc - \left(c \sqrt{R^2 - \frac{c^2}{4}} + 2R^2 \arcsin \frac{c}{2R} \right)},$$

необходимо принять во внимание, что R , завися от c , является также величиной переменной.

Подставляя значение $c \rightarrow 0$, получим, что отношение $\frac{F_0'}{F_0''} = \frac{0}{0}$, т. е. получим неопределенность.

Для раскрытия неопределенности предварительно производим подстановку.

$$R = \frac{\sqrt{b^2 + c^2}}{2\sqrt{3}}$$

$$\frac{F_0'}{F_0''} = \frac{c \sqrt{\frac{b^2+c^2}{12} - \frac{c^2}{4}} + 2 \frac{b^2+c^2}{12} \arcsin \frac{2\sqrt{3}c}{2\sqrt{b^2+c^2}}}{bc - \left(c \sqrt{\frac{b^2+c^2}{12} - \frac{c^2}{4}} + 2 \frac{b^2+c^2}{12} \arcsin \frac{2\sqrt{3}c}{2\sqrt{b^2+c^2}} \right)} =$$

$$= \frac{c \frac{\sqrt{b^2-2c^2}}{2\sqrt{3}} + \frac{b^2+c^2}{6} \arcsin \frac{\sqrt{3}c}{\sqrt{b^2+c^2}}}{bc - \left[c \frac{\sqrt{b^2-2c^2}}{2\sqrt{3}} + \frac{b^2+c^2}{6} \arcsin \frac{\sqrt{3}c}{\sqrt{b^2+c^2}} \right]}$$

Взяв производные отдельно от числителя и знаменателя и подставив вместо c нуль, получим:

$$\frac{F_0'}{F_0''} = \frac{\frac{\sqrt{b^2-2c^2}}{2\sqrt{3}} - \frac{c^2(b^2-2c^2)^{-1/2}}{2\sqrt{3}} + \frac{2c}{3} \arcsin \frac{\sqrt{3}c}{\sqrt{b^2+c^2}} +}{b - \left[\frac{\sqrt{b^2-2c^2}}{2\sqrt{3}} - \frac{c^2}{2\sqrt{3}\sqrt{b^2-2c^2}} + \frac{2}{3} c \arcsin \frac{\sqrt{3}c}{\sqrt{b^2+c^2}} + \right.}$$

$$\left. + \frac{b^2+c^2}{6} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{3c^2}{b^2+c^2}}} \frac{\sqrt{3}\sqrt{b^2+c^2} - \frac{1}{2}(b^2+c^2)^{-1/2} 2c\sqrt{3}c}{b^2+c^2} \right]}{+ \frac{(b^2+c^2)\sqrt{b^2+c^2}}{6\sqrt{b^2-2c^2}} \cdot \frac{\sqrt{3}\sqrt{b^2+c^2} - \frac{\sqrt{3}c^2}{\sqrt{b^2+c^2}}}{b^2+c^2}} \Bigg|_{c \rightarrow 0}$$

$$= \frac{b \left[\frac{1}{2\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{3}}{6} \right]}{b - b \left[\frac{1}{2\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{3}}{6} \right]} = \frac{\frac{1}{2\sqrt{3}}(1+1)}{1 - \frac{1}{2\sqrt{3}}(1+1)} = \frac{\frac{1}{\sqrt{3}}}{1 - \frac{1}{\sqrt{3}}} = 1,366.$$

С этим же ответом мы еще встретимся при рассмотрении кручения плоской пластинки с очень большим отношением $\frac{b}{c}$.

Итак, оказывается, что как бы отношение сторон не менялось, отношение $\frac{F_0'}{F_0''}$ всегда находится в довольно ограниченных пределах: 1,1 — 1,366 (для прямоугольного сечения).

Желая определить, при каком значении c выражение отношения $\frac{F_0'}{F_0''}$ достигает максимум'а, следует взять от него производную по c и приравнять ее нулю; из полученного уравнения определить значение c . Эти вычисления приводят к очень длинным выражениям, которые мы опускаем. Получаемое при этом уравнение удовлетворяется тоже значением $c=0$. Отсюда заключаем, что полученный предел отношения 1,366 является максимум'ом $\frac{F_0'}{F_0''}$.

Для бруса круглого сечения $\frac{F_0'}{F_0''} = 1$, как это мы уже знаем, а для квадратного $\frac{F_0'}{F_0''} = 1,10$, спрашивается, чем объясняется такое расхождение?

Вопрос разрешается просто. Напряжение 2-го порядка находится в некоторой зависимости от величины квадрата напряжений

1-го порядка; поэтому отношение $\frac{F'_0}{F''_0}$ зависит от закона распределения напряжений τ по поперечному сечению. При круглом сечении закон распределения напряжений τ сохраняется по всему сечению одинаковый; при квадратном — материал, расположенный по диагоналям, мало используется, а т. к. сумма усилий сжатия равна сумме усилий растяжения, то это обстоятельство заставляет увеличиваться площадь сжатых волокон и потому F'_0 несколько растет по сравнению с F''_0 .

Связь напряжений 2-го порядка с напряжениями 1-го порядка

(для стержня прямоугольного сечения)

Воспользуемся уравнением напряжения (69):

$$\sigma = E \left[\frac{1}{2} \Theta^2 (y^2 + z^2) - \varepsilon_0 \right].$$

Чтобы выразить σ через τ_b , достаточно связать его с M_t и относительным углом закручивания Θ :

$$\tau_b = \frac{M_t}{\alpha b c^2}; \quad \Theta = \frac{M_t}{\beta b c^3 G}.$$

Из первой зависимости выражаем M_t через τ_b :

$$M_t = \alpha b c^2 \tau_b.$$

Это значение крутящего момента подставляем в выражение Θ :

$$\Theta = \frac{\tau_b \alpha b c^2}{\beta b c^3 G} = \frac{\alpha}{\beta} \frac{\tau_b}{c G} = \beta_0 \frac{\tau_b}{c G}, \quad (87)$$

где $\beta_0 = \frac{\alpha}{\beta}$.

Подставляя это значение в выражение σ , получим:

$$\sigma = E \left[\frac{1}{2} \beta_0^2 \frac{\tau_b^2}{c^2 G^2} (y^2 + z^2) - \varepsilon_0 \right].$$

Преобразуем выражение ε_0 по уравнению (73), подставив в него значение Θ по зависимости (87):

$$\varepsilon_0 = \frac{\Theta^2 (b^2 + c^2)}{2 \cdot 12} = \frac{\beta_0^2 \tau_b^2 (b^2 + c^2)}{c^2 G^2 \cdot 2 \cdot 12}. \quad (88)$$

Это значение ε_0 подставляем в уравнение σ , вынося общим множителем $\frac{\beta_0^2 \tau_b^2}{2 c^2 G^2}$:

$$\sigma = \frac{\beta_0^2}{2} E \frac{\tau_b^2}{c^2 G^2} \left[y^2 + z^2 - \frac{b^2 + c^2}{12} \right]. \quad (89)$$

Очевидно, что σ достигает своего наибольшего значения на ребре бруса, т. е. при $y = \frac{b}{2}$ и $z = \frac{c}{2}$:

$$\begin{aligned} \sigma_{\max} &= E \frac{\beta_0^2 \tau_b^2}{2 c^2 G^2} \left[\frac{b^2 + c^2}{4} - \frac{b^2 + c^2}{12} \right] = E \frac{\beta_0^2 \tau_b^2}{2 c^2 G^2} \cdot \left(\frac{b^2 + c^2}{6} \right); \\ \sigma_{\max} &= \frac{\beta_0^2}{6} \cdot \frac{b^2 + c^2}{c^2} \cdot \frac{E}{G} \left(\frac{\tau_b^2}{2G} \right), \end{aligned} \quad (90)$$

т. е. наибольшее нормальное напряжение пропорционально коэффициенту $\frac{\beta_0^2}{6}$, отношению суммы квадратов сторон сечения к квадрату меньшей стороны $\left(\frac{b^2 + c^2}{c^2}\right)$, отношению модулей упругости первого и второго рода $\frac{E}{G}$ и удельно-объемной потенциальной энергии $\left(\frac{\tau_b^2}{2G}\right)$. Подставляя $\beta_0 = \frac{\alpha}{\beta}$, получим:

$$\sigma_{\max} = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 \left(\frac{b^2 + c^2}{6c^2}\right) \left(\frac{E}{G}\right) \left(\frac{\tau_b^2}{2G}\right). \quad (90')$$

Желая выразить σ через σ_{\max} , возьмем их отношение:

$$\frac{\sigma}{\sigma_{\max}} = \frac{6 \left[y^2 + z^2 - \frac{b^2 + c^2}{12} \right]}{b^2 + c^2} = \frac{1}{2} \left[12 \frac{y^2 + z^2}{b^2 + c^2} - 1 \right];$$

$$\sigma = \frac{\sigma_{\max}}{2} \left[12 \frac{y^2 + z^2}{b^2 + c^2} - 1 \right]. \quad (91)$$

Эта зависимость вновь подтверждает изменение напряжений по закону параболоида вращения. При этом необходимо иметь в виду, что эти „нормальные“ напряжения не вполне нормальны к сечению: они направлены вдоль навитых волокон.

Наибольшего значения σ , как уже указывалось выше, достигает при $y = \frac{b}{2}$ и $z = \frac{c}{2}$; при подстановке этих значений получим:

$$\sigma_{\max} = \frac{\sigma_{\max}}{2} \left[12 \frac{b^2 + c^2}{4(b^2 + c^2)} - 1 \right] = \frac{\beta_0^2}{6} \cdot \frac{b^2 + c^2}{c^2} \cdot \frac{E}{G} \left(\frac{\tau_b^2}{2G}\right). \quad (90)$$

Наименьшего значения σ достигает в центре сечения при $y = 0$, $z = 0$:

$$\sigma_{\min} = -\frac{\sigma_{\max}}{2} = -\frac{\beta_0^2}{12} \cdot \frac{b^2 + c^2}{c^2} \left(\frac{E}{G}\right) \cdot \left(\frac{\tau_b^2}{2G}\right), \quad (91')$$

т. е. по абсолютной величине σ_{\min} в два раза меньше σ_{\max} .

Чтобы получить уравнение нулевой линии (линии нулевых напряжений), достаточно выражение нормального напряжения приравнять нулю:

$$\sigma = \frac{\sigma_{\max}}{2} \left[12 \frac{y^2 + z^2}{b^2 + c^2} - 1 \right] = 0; \quad 12 \frac{y^2 + z^2}{b^2 + c^2} - 1 = 0;$$

$$y^2 + z^2 = \frac{b^2 + c^2}{12}, \quad (77)$$

т. е. получили уже нам известное уравнение окружности (77) с радиусом $R = \frac{\sqrt{b^2 + c^2}}{2\sqrt{3}}$.

Выражение σ_{\max} через объем напряжений и площадь поперечного сечения

Представим себе, что скручиваемый стержень прямоугольного сечения имеет возможность свободно укорачиваться; в таком случае

$$\sigma = E \frac{1}{2} \theta^2 (y^2 + z^2).$$

Объем напряжений, равный результирующему усилию всех напряжений, возникающих в данном сечении, определится, если элементарное усилие σdF проинтегрировать по всему сечению:

$$\begin{aligned} v &= \int_0^F \sigma dF = \int_{-c/2}^{c/2} dz \int_{-b/2}^{b/2} E \frac{1}{2} \Theta^2 (y^2 + z^2) dy = \\ &= \frac{E\Theta^2}{2} \int_{-c/2}^{c/2} \left(\frac{y^3}{3} + z^2 y \right) \Big|_{-b/2}^{b/2} dz = \frac{E\Theta^2 bc}{2 \cdot 12} (b^2 + c^2). \end{aligned}$$

Желая выразить v через τ_{\max} , найдем соотношение Θ и τ_{\max} :

$$\tau_{\max} = \frac{M_t}{\alpha bc^2}; \quad \Theta = \frac{M_t}{\beta bc^3 G}.$$

Составим отношение:

$$\frac{\Theta}{\tau_{\max}} = \frac{\alpha}{\beta c G}; \quad \Theta = \frac{\alpha}{\beta} \frac{\tau_{\max}}{c G}.$$

Подставляя значение Θ в выражение v , найдем:

$$v = \frac{E}{2 \cdot 12} bc (b^2 + c^2) \left(\frac{\alpha}{\beta} \right)^2 \frac{\tau_{\max}^2}{c^2 G^2} = \left(\frac{\alpha}{\beta} \right)^2 \left(\frac{b}{c} \right) \frac{b^2 + c^2}{12} \frac{E}{G} \left(\frac{\tau_{\max}^2}{2G} \right).$$

Умножим числитель на F , а знаменатель на равную ей величину bc :

$$v = \left(\frac{\alpha}{\beta} \right)^2 \cdot \frac{b^2 + c^2}{12c^2} \cdot F \left(\frac{E}{G} \right) \left(\frac{\tau_{\max}^2}{2G} \right), \quad (92)$$

т. е. объем нормальных напряжений пропорционален площади сечения F , отношению модулей упругости $\frac{E}{G}$, удельно-объемной работе и коэффициенту $\left(\frac{\alpha}{\beta} \right)^2 \frac{b^2 + c^2}{12c^2}$.

Преобразуем σ , заменив Θ равной ей величиной $\frac{\alpha}{\beta} \frac{\tau_{\max}}{c G}$:

$$\begin{aligned} \sigma &= E \frac{1}{2} \Theta^2 (y^2 + z^2) = \frac{1}{2} E \left(\frac{\alpha}{\beta} \right)^2 \frac{\tau_{\max}^2}{c^2 G^2} (y^2 + z^2); \\ \sigma &= \left(\frac{\alpha}{\beta} \right)^2 \left(\frac{E}{G} \right) \frac{y^2 + z^2}{c^2} \cdot \left(\frac{\tau_{\max}^2}{2G} \right). \end{aligned} \quad (93)$$

Составим отношение $\frac{\sigma}{v}$:

$$\begin{aligned} \frac{\sigma}{v} &= \frac{\frac{1}{2} E \left(\frac{\alpha}{\beta} \right)^2 \frac{\tau_{\max}^2}{c^2 G^2} (y^2 + z^2)}{\left(\frac{\alpha}{\beta} \right)^2 \cdot \frac{b^2 + c^2}{12c^2} \cdot F \frac{E}{G} \cdot \left(\frac{\tau_{\max}^2}{2G} \right)} = \frac{12 y^2 + z^2}{F b^2 + c^2}; \\ \sigma &= 12 \frac{v y^2 + z^2}{F b^2 + c^2}. \end{aligned} \quad (94)$$

Из этого выражения вновь убеждаемся в параболическом законе изменения σ ; наибольшее значение σ приобретает при $y = \frac{b}{2}$ и $z = \frac{c}{2}$:

$$\sigma_{\max} = \frac{12v}{F} \frac{b^2 + c^2}{4(b^2 + c^2)} = 3 \frac{v}{F}. \quad (95)$$

Получилось очень простое выражение σ_{\max} .

Наибольшее нормальное напряжение равно утроенному объему нормальных напряжений, отнесенному к площади сечения, или утроенному среднему напряжению (по сечению), т. к. v — равнодействующая нормальных напряжений и потому $\frac{v}{F}$ среднее напряжение.

На оси бруса ($y=0, z=0$) σ достигает нулевого значения; в этом легко убедиться простой подстановкой нуля вместо y и z в выражение (94).

Для круглого сечения было выведено выражение, аналогичное (95).

$$\sigma_{0\max} = 2 \frac{v}{F}.$$

Если взять два бруса, из которых один круглого сечения, а другой квадратного сечения, с равновеликими площадями и равными крутящими моментами M_t , то их наибольшие нормальные напряжения относятся между собой следующим образом:

$$\frac{\sigma_{\square \max}}{\sigma_{0\max}} = \frac{3v_{\square}}{2v_0}. \quad (96)$$

В этом выражении все величины, относящиеся к брусу с квадратным сечением, снабжены индексом — квадратиком, а к круглому индексом — кружком; F_0 и F_{\square} сокращены, так как по условию они равновелики.

Чтобы выяснить величину отношения $\frac{v_{\square}}{v_0}$, определим сначала отношение $\frac{\sigma_{\square \max}}{\sigma_{0\max}}$; с этой целью воспользуемся выражением (93), подставив в него вместо $y = \frac{b}{2}$ и $z = \frac{c}{2}$:

$$\sigma_{\square \max} = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 \left(\frac{E}{G}\right) \left(\frac{b^2 + c^2}{4c^2}\right) \left(\frac{\tau_{\square \max}^2}{2G}\right) \quad (97)$$

и (18) для круглого сечения:

$$\sigma_{0\max} = \frac{E}{G} \left(\frac{\tau_{0\max}^2}{2G}\right). \quad (18)$$

Разделив (97) на (18), получим искомое отношение:

$$\frac{\sigma_{\square \max}}{\sigma_{0\max}} = \frac{\alpha^2}{\beta^2} \cdot \left(\frac{b^2 + c^2}{4c^2}\right) \cdot \frac{\tau_{\square \max}^2}{\tau_{0\max}^2},$$

т. к. сечение квадратное, то $b=c$, и т. к. сечения круглое и квадратное равновелики, то $b^2 = \frac{\pi d^2}{4}$, где d — диаметр круглого сечения, принимая во внимание эти соотношения, получим:

$$\frac{\sigma_{\square \max}}{\sigma_{0\max}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 \frac{\tau_{\square \max}^2}{\tau_{0\max}^2}. \quad (98)$$

Вычислим в отдельности отношение квадратов тангенциальных напряжений в следующем последовательном порядке:

$$\tau_{\square \max} = \frac{M_t}{abc^2} = \frac{M_t}{ab^3}, \quad \tau_{0\max} = \frac{16M_t}{\pi d^3}$$

$$\frac{\tau_{\square \max}}{\tau_{0\max}} = \frac{M_t \cdot \pi d^3}{ab^3 \cdot 16M_t} = \frac{\pi d^3}{16\pi b^3}.$$

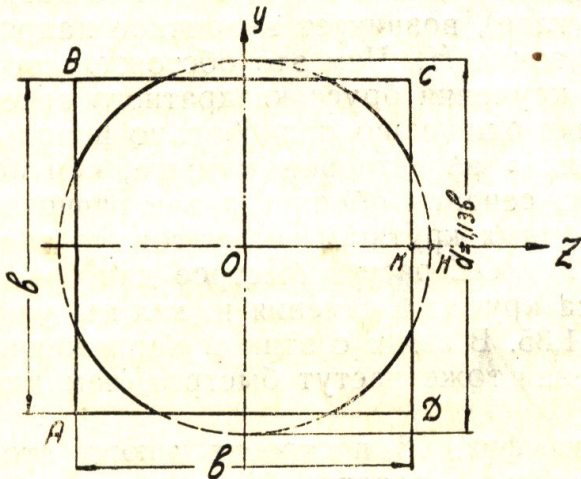
Заменяя $\pi d^2 = 4b^2$ и $d = \frac{2b}{\sqrt{\pi}}$, получим:

$$\frac{\tau_{\square \max}}{\tau_{0 \max}} = \frac{4b^2 \cdot 2b}{16ab^3 \sqrt{\pi}} = \frac{1}{2 \cdot 0,2082 \cdot 1,7725} = 1,35.$$

Подставляя числовые данные в уравнение (98), найдем:

$$\frac{\sigma_{\square \max}}{\sigma_{0 \max}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\alpha}{\beta} \right)^2 \frac{\tau_{\square \max}^2}{\tau_{0 \max}^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{0,2082}{0,1406} \right)^2 1,35^2 = 2,05, \quad (99)$$

т. е. если имеем два бруса из одного и того же материала, находящиеся под действием одного и того же скручивающего момента, причем один брус — квадратного сечения, а другой — круглого с равновеликими площадями, то наибольшие напряжения второго порядка для бруса квадратного сечения в 2,05 раза больше чем для бруса круглого сечения. (Приблизительно в два раза больше).



Фиг. 17

Это наибольшее напряжение возникает в волокнах, совпадающих с ребрами (A, B, C и D) фиг. 17.

Интересно выяснить, в каком отношении находятся вторичные напряжения, возникающие в волокнах, проходящих через точки K и H (фиг. 17).

С этой целью определим σ_{\square} в точке K. Вторичное напряжение в этой точке уже не будет наибольшим, поэтому освобождаем его от индекса max.

Чтобы определить его величину, воспользуемся соотношением (93), в которое необходимо вместо y и z подставить координаты точки K ($y=0, z = \frac{b}{2}$):

$$\sigma_{\square} = \left(\frac{\alpha}{\beta} \right)^2 \frac{E}{G} \cdot \frac{1}{4} \left(\frac{\tau_{\square \max}^2}{2G} \right). \quad (100)$$

Составим отношение:

$$\frac{\sigma_{\square}}{\sigma_{0 \max}} = \left(\frac{\alpha}{\beta} \right)^2 \frac{E \tau_{\square \max}^2 G 2G}{G \cdot 4 \cdot 2GE \tau_{0 \max}^2} = \frac{1}{4} \left(\frac{\alpha}{\beta} \right)^2 \left(\frac{\tau_{\square \max}}{\tau_{0 \max}} \right)^2. \quad (100')$$

Из сравнения полученного выражения с выражением (99) видно, что оно ровно в два раза меньше.

Чем объяснить такое соотношение? Объясняется очень просто. Дело в том, что σ_{\square} прямо пропорционально квадрату расстояния точки, в которой определяется напряжение, от оси. Это видно из выражения (93):

$$\sigma_{\square} = \left(\frac{\alpha}{\beta} \right)^2 \left(\frac{E}{G} \right) \left(\frac{y^2 + z^2}{c^2} \right) \left(\frac{\tau_{\square \max}}{2G} \right). \quad (93)$$

В этом соотношении $y^2 + z^2 = r^2$. Для волокна, которое проходит через точку C (фиг. 17) $r^2 = \frac{b^2 + b^2}{4} = \frac{b^2}{2}$; для волокна точки K $r_1^2 =$

$\frac{b^2}{4}$, т. е. для точки C квадрат расстояния от оси в два раза больше, чем квадрат расстояния для точки K , поэтому и напряжение $\sigma_{\square \max}$ в два раза больше σ_{\square} (точки K).

Чтобы ответить на вопрос, в каком отношении находятся вторичные напряжения, возникающие в волокнах, проходящих через точки K и H , достаточно в выражение (100) подставить числовые значения $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)$ и $\frac{\tau_{\square \max}}{\tau_{0 \max}}$.

Согласно числовому результату (99) получим:

$$\frac{\sigma_{\square}}{\sigma_{0 \max}} = 1,025. \quad (101'')$$

Выходит, что в точке K , лежащей ближе к оси (сечение квадратное), чем точка H (сечение круглое), возникает вторичное напряжение несколько большее (чем в точке H). Чем это обстоятельство объясняется? Дело в том, что при кручении бруса квадратного сечения материал не во всех направлениях одинаково рационально используется: по диагоналям сечения τ значительно меньше, чем по осям OY и OZ , а т. к. по условию сечения обоих брусьев равновелики и находятся под действием равных крутящих моментов, то тангенциальные напряжения по осям OY и OZ растут быстрее для бруса квадратного сечения, чем для бруса круглого сечения и, как мы уже нашли выше, их отношение равно 1,35. В связи с этим и напряжения 2-го порядка для квадратного сечения тоже растут быстрее, чем для круглого.

На основании (93) формулы на фиг. 18 построена эпюра вторичных напряжений для бруса квадратного сечения. На рисунке дано распределение этих напряжений по оси OZ и по диагонали. Вследствие симметрии сечения по оси OY , очевидно такое же распределение, как и по оси OZ ; по диагонали BD — такое же, какое дано по диагонали AC .

Из зависимости (97) видно, что при данных размерах сечения прямоугольного бруса и данном материале вторичные напряжения изменяются прямо пропорционально квадрату наибольшего тангенциального напряжения по параболическому закону. Отсюда может возникнуть опасение, что при значительном росте $\tau_{\square \max}$, $\sigma_{\square \max}$ приобретает значительную величину. Желая это опасение рассеять, ниже приводим таблицу $\tau_{\square \max}$, $\sigma_{\square \max}$ и отношение $\frac{\sigma_{\square \max}}{\tau_{\square \max}}$, выраженное в ‰ $\tau_{\square \max}$.

Таблица составлена для бруса квадратного сечения, поэтому в формуле (97) необходимо положить: $b = c$, $\alpha = 0,208$, $\beta = 0,141$:

$$\sigma_{\square \max} = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 \frac{E}{G} \frac{b^2}{2b^2} \left(\frac{\tau_{\square \max}^2}{2G}\right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 \cdot \frac{E}{G} \left(\frac{\tau_{\square \max}^2}{2G}\right). \quad (102)$$

Принимая $E = 2 \cdot 10^6$ кг/см² и $G = 8 \cdot 10^5$ кг/см², получим:

$$\sigma_{\square \max} = \frac{1}{2} \left(\frac{0,208}{0,141}\right)^2 \frac{2 \cdot 10^6}{8 \cdot 10^5} \cdot \frac{\tau_{\square \max}^2}{2 \cdot 8 \cdot 10^5} = \frac{1,095 \cdot \tau_{\square \max}^2}{64 \cdot 10^4}. \quad (103)$$

Давая $\tau_{\square \max}$ от 200 кг/см² и до 4000 кг/см², получим числовые величины, сведенные в таблицу (высший предел взят в 4000 кг/см² с целью оттенить, что повышение $\tau_{\square \max}$ особо заметного влияния на повышение $\sigma_{\square \max}$ не может иметь).

Из приведенной таблицы видно, что при изменении $\tau_{\square \max}$ от 200 кг/см² и до 4000 кг/см², $\sigma_{\square \max}$ изменяется от 0,068 кг/см² и до 27,35 кг/см²,

Таблица

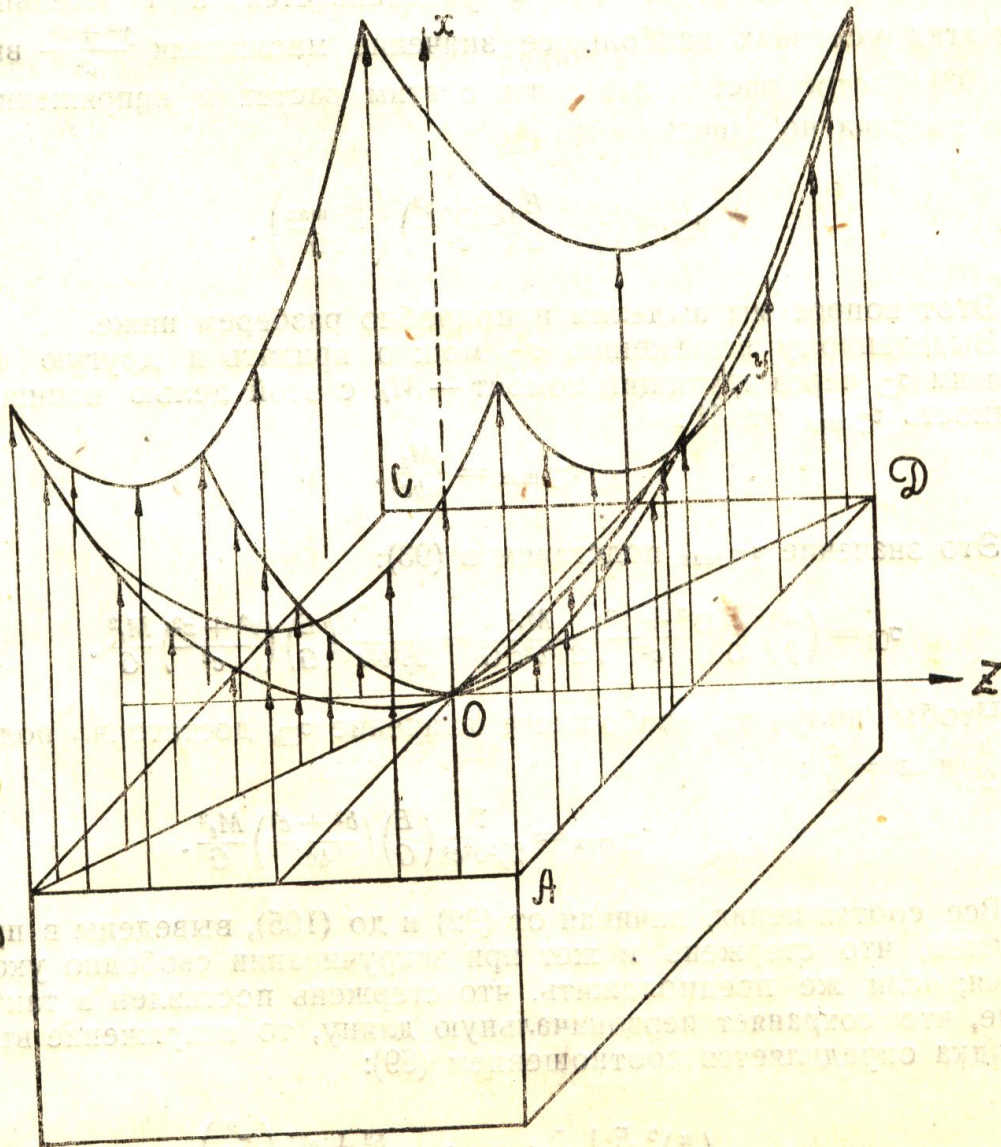
τ_{\max} кг/см ²	τ_{\max} кг/см ²	%
200	0,0680	0,034
400	0,274	0,068
600	0,622	0,1036
800	1,095	0,137
1000	1,710	0,171
1200	2,46	0,205
1400	3,35	0,239
1600	4,39	0,274
1800	5,54	0,308
2000	6,92	0,345
2200	8,28	0,376
2400	9,86	0,411
2600	11,55	0,444
2800	13,42	0,479
3000	15,38	0,513
3200	17,50	0,540
3400	19,70	0,582
3600	22,20	0,617
3800	24,70	0,650
4000	27,35	0,685

что составляет от 0,034% и до 0,685%, т. е. практически — какие бы значения в разобранным случае не приобретали тангенциальные напряжения $\tau_{\square \max}$, $\sigma_{\square \max}$ всегда остается настолько незначительным, что нет никаких оснований принимать вторичные напряжения во внимание, т. к. они настолько разительно малы, что не могут оказать сколько-нибудь заметного влияния на способность стержня сопротивляться скручиванию.

Однако, отсюда нельзя сделать вывода в том смысле, что вторичные напряжения вообще не могут оказывать заметного влияния на весь процесс кручения.

В самом деле, рассматривая выражение (102), выведенное для бруса квадратного сечения, приходим к выводу, что оно состоит из ряда мно-

жителей, из которых каждый в отдельности представляет величину, большую единицы, — за исключением последнего множителя



Фиг. 18

$\left(\frac{\tau_{\square \max}^2}{2G}\right)$, о котором заранее ничего определенного сказать нельзя, т. к. он зависит от характера материала, от его физических свойств. Для металлов эта величина мала, а для таких материалов, как гуттаперча, она значительна. На основании изложенного приходим к выводу, аналогичному тому, который мы уже сделали для бруса круглого сечения:

В брусках, изготовленных из материалов с большим отношением $\frac{\tau_{\square \max}^2}{G}$, напряжения второго порядка при кручении получаются значительные, а следовательно с ними необходимо считаться.

Для бруса круглого сечения был приведен числовой пример, из которого видно, что в этом случае напряжения второго порядка могут даже превосходить напряжения первого порядка, а т. к. наибольшие напряжения второго порядка при кручении квадратного бруса по формуле (99) в 2,05 раза больше тех же напряжений круглого бруса, а $\tau_{\square \max}$ больше $\tau_{0 \max}$ только в 1,35 раза (согласно выше изложенному), то напряжения второго порядка при кручении квадратного бруса еще более опасны, чем при круглом брус.

Анализируя выражение (93), мы видим, что $\sigma_{\square \max}$ растет также в зависимости от $\frac{y^2 + z^2}{c^2}$. Представим себе, что прямоугольное сечение вытягивается, т. е. что b увеличивается, а c уменьшается. При этих условиях наибольшее значение множителя $\frac{y^2 + z^2}{c^2}$ выражения (93) быстро растет, а в связи с этим растет и напряжение второго порядка по зависимости:

$$\sigma_{\square} = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 \frac{E}{G} \left(\frac{y^2 + z^2}{c^2}\right) \left(\frac{\tau_{\square \max}^2}{2G}\right). \quad (93)$$

Этот вопрос мы выделим и подробно разберем ниже.

Выведенному выражению σ_{\square} можно придать и другую форму. Выразим σ_{\square} через крутящий момент — M_t ; с этой целью напишем зависимость $\tau_{\square \max}$ от M_t :

$$\tau_{\square \max} = \frac{M_t}{abc^2}.$$

Это значение $\tau_{\square \max}$ подставим в (93):

$$\sigma_{\square} = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 \frac{E}{G} \left(\frac{y^2 + z^2}{c^2}\right) \frac{M_t^2}{2a^2b^2c^4G} = \frac{1}{2a^2b^2c^4} \left(\frac{E}{G}\right) \left(\frac{y^2 + z^2}{c^2}\right) \frac{M_t^2}{G}. \quad (104)$$

Чтобы получить наибольшее значение σ_{\square} , достаточно положить $y = \frac{b}{2}$ и $z = \frac{c}{2}$:

$$\sigma_{\square \max} = \frac{1}{2a^2b^2c^4} \left(\frac{E}{G}\right) \left(\frac{b^2 + c^2}{4c^2}\right) \frac{M_t^2}{G}. \quad (105)$$

Все соотношения, начиная от (92) и до (105), выведены в предположении, что стержень может при закручивании свободно укорачиваться; если же предположить, что стержень поставлен в такое условие, что сохраняет первоначальную длину, то напряжение второго порядка определяется соотношением (89):

$$\sigma_{\square} = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 \frac{E}{G} \frac{1}{c^2} \left[y^2 + z^2 - \frac{b^2 + c^2}{12}\right] \left(\frac{\tau_b^2}{2G}\right). \quad (89)$$

Конечно, это соотношение может быть выражено через M_t , аналогично тому, как это было произведено с зависимостью (93):

$$\begin{aligned}\sigma_{\square} &= \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 \frac{E}{G} \frac{1}{c^2} \left[y^2 + z^2 - \frac{b^2 + c^2}{12} \right] \frac{M_t^2}{2\alpha^2 b^2 c^4 G} = \\ &= \frac{1}{2\beta^2 b^2 c^4} \left(\frac{E}{G}\right) \cdot \frac{1}{c^2} \left[y^2 + z^2 - \frac{b^2 + c^2}{12} \right] \left(\frac{M_t^2}{G}\right).\end{aligned}\quad (106)$$

Отсюда для получения наибольшего значения σ_{\square} полагаем $y = \frac{b}{2}$ и $z = \frac{c}{2}$:

$$\sigma_{\square \max} = \frac{1}{\beta^2 b^2 c^4} \left(\frac{E}{G}\right) \left(\frac{b^2 + c^2}{12c^2}\right) \left(\frac{M_t^2}{G}\right).\quad (107)$$

Для получения наименьшего значения σ_{\square} подставляем $y = 0$ и $z = 0$:

$$\sigma_{\square \min} = -\frac{1}{2\beta^2 b^2 c^4} \frac{E}{G} \left(\frac{b^2 + c^2}{12c^2}\right) \left(\frac{M_t^2}{G}\right),\quad (108)$$

т. е. $\sigma_{\square \max}$ в два раза больше по абсолютной величине $\sigma_{\square \min}$ (это уже было выведено на основании выражения (90) и (91). Что касается уравнения линии нулевых напряжений, то она сохраняет прежнюю форму; для ее получения достаточно выражение (106) приравнять нулю и сократить на постоянные множители:

$$y^2 + z^2 = \frac{b^2 + c^2}{12},$$

т. е. опять получим окружность радиуса $R = \frac{\sqrt{b^2 + c^2}}{2\sqrt{3}}$; как это и нужно было ожидать, т. к. линия нулевых напряжений не может меняться в зависимости от формы уравнения напряжения.