

Задачи идентификации и управления для многокомпонентных систем с распределенными параметрами

*Харьковский национальный экономический университет
Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского «ХАИ»*

Предложены аналитические методы решения задач математической физики для многокомпонентных систем. К ним относятся: многослойные периодические составные упругие тела; теплопроводящие многослойные тонкие пластины и многозвенные тонкие стержни; тонкостенные “стаканы”; многозвенные струны. На основе аналитических решений сформулированы целевые функционалы задачи идентификации и управления полем системы с распределенными параметрами. Указаны регуляризирующие алгоритмы, с помощью которых могут быть получены решения задач минимизации функционалов.

Ключевые слова: идентификация, управление, системы с распределенными параметрами, многокомпонентные системы, многозвенные струны и стержни.

Проблемы управления и идентификации в системах с распределенными параметрами изучались в многочисленных работах как в теоретическом плане [1–7] (вывод условий оптимальности, существование решения задач оптимального управления, построение алгоритмов точных и приближенных решений, сходимость и устойчивость методов и др.), так и в прикладном аспекте [8–13].

В статьях [4–7] предложены постановки и некоторые подходы к решению задач идентификации параметров динамических систем, состояния которых описываются параболическими или гиперболическими уравнениями с разрывными коэффициентами (многокомпонентные системы). В силу общности и сложности поставленных в этих работах задач их решения можно получить лишь с привлечением универсальных численных методов [8, 11–13].

В статье предлагается конструктивный подход к решению некоторых задач управления и идентификации, в котором использовано аналитическое решение задачи или её полуаналитическое представление. В частности, используется метод гибридных собственных функций и гибридных интегральных преобразований, развитый одним из авторов статьи в работах [14, 15]. Во всех рассматриваемых случаях решение задачи представлено в виде интеграла от управляющих функций, что позволило свести задачи управления и идентификации к проблеме минимума квадратичных функций многих переменных.

Прямая задача для многокомпонентной системы

Состояние многокомпонентной физической системы S , состоящей из подобластей Ω_j области Ω (рис. 1), определяется функцией $u(x, y)$, которая в каждой из областей Ω_j удовлетворяет уравнению

$$A_j u = f_j, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (0.1)$$

где A_j – линейный дифференциальный оператор в частных производных второго порядка, определенный на функциях из Ω_j ;

$f_j(x, y)$ – заданные в Ω_j функции.

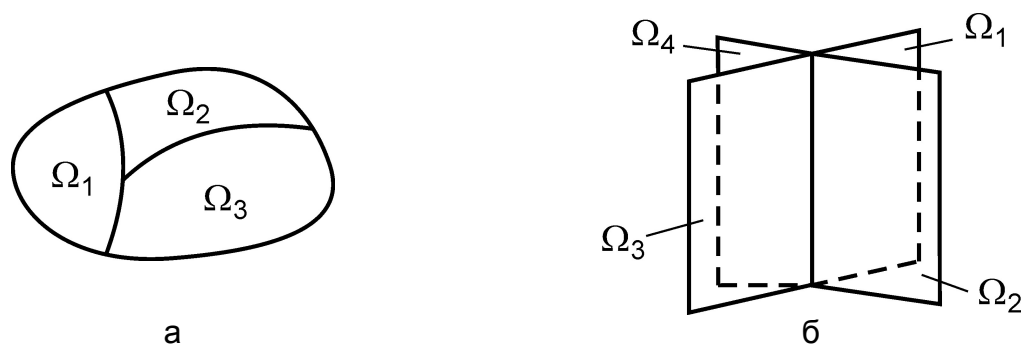


Рис. 1. Многокомпонентные системы

На границах соседних областей функция $u(x, y)$ должна удовлетворять тем или другим условиям сопряжения [4–7]. В нестационарных задачах одна из переменных есть время, ее будем обозначать через t .

Для стационарных задач уравнение (0.1) дополняется условиями на границе области $\partial\Omega$. Этими условиями могут быть классические условия основных краевых задач [1], но могут быть и смешанные условия, когда на одной части границы заданы значения искомой функции, а на другой, оставшейся части, – значения нормальной производной. В нестационарных задачах кроме краевых условий должны быть заданы начальные условия, т.е. условия, определяющие состояние системы S в начальный момент времени $t = 0$.

Естественным условием, обеспечивающим единственность решения задачи, является условие конечности энергии системы.

Задачи идентификации и управления

В задачах управления или идентификации некоторые из входящих в постановку прямой задачи функций могут быть не заданы. В этом случае задаются дополнительные условия, которым состояние системы S должно удовлетворять.

Этими условиями могут быть условия равенства функции $u(x, y)$ заданным функциям на некоторых множествах точек, принадлежащих $\bar{\Omega}$, могут быть заданы дифференциальные характеристики состояния системы или целевые функционалы [1–4]. В любом случае в задачах управления требуется так выбрать управляющие функции (входящие в постановку задачи и считающиеся теперь неизвестными), чтобы выполнялись заданные дополнительные условия. В задачах идентификации необходимо по результатам измерений некоторых характеристик состояния системы на некотором доступном для такого измерения множестве точек, принадлежащих $\bar{\Omega}$, распознать те функции, которые привели систему в это состояние.

Идея метода

Аналитическим или полуаналитическим (как это показано в [16]) методом решение двумерной краевой или начально-краевой задачи можно представить в одном из двух видов:

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^m \int_{a_n}^{b_n} v_n(\xi) K_n(x, y; \xi) d\xi, \quad u(x, t) = \sum_{n=1}^m \int_0^t v_n(\tau) K_n(x, t - \tau) d\tau, \quad (0.2)$$

где $K_n(x, y, z)$, $K_n(x, t)$ – ядра представления;

$v_n(x)$ – управления.

Выражения (0.2) можно получить методом Фурье, операционным методом, методом функций Грина и др. Если решение задачи удастся сразу выразить через управляющие функции $v_k(x)$, то метод решения будем называть аналитическим. В случае, когда предварительно приходится решать интегральные уравнения или системы таких уравнений относительно некоторых вспомогательных функций и выражать эти решения через управления $v_k(x)$, метод решения задачи математической физики будем называть полуаналитическим. Это объясняется тем, что обращение вспомогательных интегральных уравнений может быть численным. В конечном итоге и тот, и другой метод приводят к представлению (0.2).

Предположим, что целевой функционал является квадратичным. Раскладывая управляющие функции в ряд по некоторой полной системе функций $\varphi_k(x)$, будем иметь счетное число неизвестных – коэффициентов разложения:

$$v_n(x) = \sum_{k=1}^{\infty} x_{nk} \cdot \varphi_k(x). \quad (0.3)$$

Подстановка разложений (0.3) в целевой функционал приводит к квадратичной функции от переменных x_{nk} :

$$J(\bar{v}) = \Phi(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_r, \dots), \quad (0.4)$$

где $\bar{v} = (v_1, v_2, \dots, v_m)$ – вектор управляющих функций;

$\bar{x}_r = (x_{r1}, x_{r2}, \dots)$ – вектор неизвестных задачи управления.

Следует сразу отметить, что на практике число неизвестных в разложении (0.3) всегда будет конечным.

Задача о нахождении *min* такой функции (0.4) с помощью регуляризующего алгоритма Тихонова А.Н. всегда имеет единственное решение [17], устойчивое к погрешностям вычислений.

Следует также отметить, что задача о *min* функционала (0.4) может быть сразу сведена к задаче о *min* функции многих переменных, минуя представление (0.2), если неизвестные управляющие функции $v_k(x)$ представить на $[a_k, b_k]$ в виде ступенчатых кусочно-постоянных или кусочно-линейных функций.

1. Осесимметричное кручение неоднородного по длине упругого цилиндра

Полагаем, что торец цилиндра $z = 0$ свободен от нагрузки, на другом бесконечно удаленном конце перемещения принимаем равными нулю. Боковая поверхность цилиндра нагружена крутящими усилиями

$$\tau_{r\theta}(R, z) = f(z), \quad (0 \leq z < \infty), \quad (1.1)$$

где R – радиус цилиндра.

Модуль сдвига $G(z) = G_0$ при $0 \leq z < a$ и $G(z) = G_1 shz$ при $z > a$.

Уравнение кручения имеет вид

$$\begin{aligned} \Delta u - u \cdot r^{-2} &= 0 \quad (0 \leq z < a); \\ \Delta u - u \cdot r^{-2} + \frac{\partial u}{\partial z} \operatorname{cthz} &= 0 \quad (z > a). \end{aligned} \quad (1.2)$$

На границе раздела двух компонент имеем условия контакта

$$u(r, a - 0) = u(r, a + 0), \quad u'_z(r, a - 0) = \mu \cdot u'_z(r, a + 0), \quad \mu = G_1 \cdot G_0^{-1} \cdot sha. \quad (1.3)$$

На торце цилиндра имеем условие

$$\tau_{\varphi z} = G_0 \cdot u'_z(0, r) = 0. \quad (1.4)$$

Решение задачи будем искать в виде

$$u = \int_0^{\infty} B(\lambda) \cdot I_1(r\xi) \cdot Z(z, \lambda) d\lambda, \quad \text{где } \xi^2 = \frac{1}{4} + \lambda^2.$$

Из (1.2), (1.3) получаем задачу Штурма–Лиувилля для $Z(z, \lambda)$:

$$\begin{cases} Z'' + \xi^2 Z = 0, & (0 < z < a); \\ Z'' + Z' \cdot \operatorname{cthz} + \xi^2 Z = 0, & (z > a); \\ Z'(0, \lambda) = 0, & |Z(\infty, r)| < \infty; \\ Z(a - 0) = Z(a + 0), & Z'(a - 0) = \mu \cdot Z'(a + 0). \end{cases} \quad (1.5)$$

Собственные функции этой задачи (гибридные собственные функции) имеют вид

$$Z_1(z, \lambda) = \begin{cases} \cos z\xi, & 0 < z < a, \\ \frac{2G_0}{\pi G_1} \operatorname{cth}\pi\lambda [N(\lambda)Z_1(chz) - M(\lambda)Z_2(chz)], & z > a, \end{cases} \quad (1.6)$$

где $Z_1(x) = \operatorname{Re} Q_\tau(x)$, $Z_2(x) = \operatorname{Im} Q_\tau(x)$, $\tau = -1/2 + i\lambda$, $Q_\tau(x)$ – функция Лежандра второго рода;

$$\begin{aligned} M(\lambda) &= -\xi \operatorname{sh}\xi a \cdot Z_1(cha) - \mu sha \cdot \cos \xi a \cdot Z'_1(cha); \\ N(\lambda) &= -\xi \operatorname{sh}\xi a \cdot Z_2(cha) - \mu sha \cdot \cos \xi a \cdot Z'_2(cha). \end{aligned}$$

Для удовлетворения граничного условия на боковой поверхности цилиндра (1.1) вычислим напряжение $\tau_{r\theta}$ по формуле

$$\tau_{r\theta}|_R = G(z)r \frac{\partial}{\partial r} (r^{-1} \cdot u)|_R = \int_0^{\infty} B(\lambda)\xi \cdot I_2(R\xi) \cdot Z(z, \lambda) d\lambda = f(z), \quad 0 < z < \infty. \quad (1.7)$$

Обращаем равенство (1.7) по формуле обращения гибридного интегрального преобразования Фурье–Лежандра [15]. В результате находим

$$B(\lambda) = \frac{P(\lambda)}{G_0 \cdot \xi \cdot I_2(\xi R)} \int_0^{\infty} f(t) \cdot Z(t, \lambda) dt, \quad (1.8)$$

где функция $p(\lambda)$ определена формулой

$$p(\lambda) = \frac{\mu \lambda \operatorname{th}\pi\lambda}{sha [M^2(\lambda) + N^2(\lambda)]}.$$

В итоге решение прямой задачи имеет вид

$$u(r, z) = \int_0^{\infty} f(t) \cdot H(r, z; t) dt, \quad (1.9)$$

где ядро представления определяется равенством

$$H(r, z; t) = G_0^{-1} \int_0^{\infty} \frac{p(\lambda) \cdot I_1(r\xi)}{\xi \cdot I_2(R\xi)} Z(z, \lambda) \cdot Z(t, \lambda) d\lambda. \quad (1.10)$$

Задача управления может быть поставлена так: на боковой поверхности цилиндра задаем (измеряем) угловое перемещение $u_0(z)$ на линии $h_1 \leq z \leq h_2$ и подбираем управление $f(t)$ таким, чтобы выполнялось условие

$$J(f) = \int_{h_1}^{h_2} [u(R, z) - u_0(z)]^2 dz \Rightarrow \min. \quad (1.11)$$

Функцию $f(t)$ представим отрезком ряда по полной системе $\varphi_k(x)$

$$f(t) = \sum_{k=1}^N x_k \cdot \varphi_k(x).$$

В этом случае (1.11) будет квадратичной функцией от переменных x_k :

$$J(x_1, x_2, \dots, x_N) = \int_{h_1}^{h_2} \left[\sum_{k=1}^N x_k \cdot \psi_k(z) - u_0(z) \right]^2 dz \Rightarrow \min, \quad (1.12)$$

где $\psi_k(z) = \int_0^{\infty} \varphi_k(t) \cdot H(R, z; t) dt$.

Регуляризованное решение задачи (1.12) всегда существует и является единственным [17].

2. Стационарная задача теплопроводности в тонком „стакане”

Задача о распределении температуры в тонком „стакане” с дном из другого материала сводится к решению краевой задачи для двухкомпонентной системы:

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2} = 0, \quad x = R\varphi, \quad 0 < z < h \quad \text{– на стенках;} \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial^2 u_2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial u_2}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 u_2}{\partial \varphi^2} = 0, \quad z = 0, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad 0 \leq \rho < R \quad \text{– на дне,} \quad (2.2)$$

где (ρ, φ) – полярные координаты; R – радиус „стакана”; h – его высота.

Система дифференциальных уравнений дополняется краевыми условиями

$$u_1(\varphi, h) = f(\varphi) \quad (2.3)$$

и условиями совершенного контакта дна и стенки „стакана”

$$u_1(\varphi, 0) = u_2(\varphi, R), \quad k_1 \frac{\partial u_1}{\partial z} \Big|_{z=0} - k_2 \frac{\partial u_2}{\partial \rho} \Big|_{\rho=R} = 0, \quad (2.4)$$

где k_1, k_2 – коэффициенты теплопроводности.

Решение прямой задачи берем в виде

$$u_1 = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ (a_n e^{-\lambda_n(h-z)} + \bar{a}_n e^{-\lambda_n z}) \cos \lambda_n x + (b_n e^{-\lambda_n(h-z)} + \bar{b}_n e^{-\lambda_n z}) \sin \lambda_n x \right\}, \quad \lambda_n = \frac{n}{R}; \quad (2.5)$$

$$u_2 = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (C_n \cos n\varphi + D_n \sin n\varphi) \left(\frac{\rho}{R} \right)^n, \quad 0 \leq \rho < R. \quad (2.6)$$

С учетом краевого условия (2.3) и условий контакта (2.4) найдем

$$u_1(\varphi, z) = \int_0^{2\pi} K_1(z, \varphi - t) f(t) dt, \quad u_2(\varphi, \rho) = \int_0^{2\pi} K_2(\rho, \varphi - t) f(t) dt, \quad (2.7)$$

где ядра $K_1(z, t)$ и $K_2(\rho, t)$ определяются формулами

$$K_1(z, t) = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1 - r_1}{1 - 2r_1 \cos t + r_1^2} + \frac{1 - \mu}{2\pi(1 + \mu)} \cdot \frac{1 + 2q_1 \cos t - 3q_1^2}{1 - 2q_1 \cos t + q_1^2} - \frac{1 - \mu}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\lambda_n(h-z)} + (1 + \mu)^{-1} \cdot e^{-\lambda_n(h+z)}}{e^{2\lambda_n h} + \nu} \cos \lambda_n t, \quad \nu = \frac{1 - \mu}{1 + \mu}; \quad (2.8)$$

$$K_2(\rho, t) = \frac{1}{\pi(1 + \mu)} \left[\frac{1 - r_2}{1 - 2r_2 \cos t + r_2^2} - (1 - \mu) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\lambda_n h} \cdot (\rho/R)^n}{e^{2\lambda_n h} + \nu} \cos \lambda_n t \right], \quad (2.9)$$

$$r_1 = e^{-(h-z)/R}, \quad \nu = k_2 \cdot k_1^{-1}, \quad r_2 = \frac{\rho}{R} e^{-h/R}, \quad q_1 = e^{-(h+z)/R}.$$

При $\mu = 1$ имеем более простое решение для однородного „стакана”, изготовленного так, что стенки и дно обладают одинаковыми свойствами.

Задача идентификации: на линии $z = 0, \varphi = 0$ на участке $0 < a < b < R$ измерена температура, обозначим ее $u_0(\rho)$. Какой должна быть функция $f(t)$, чтобы выполнялось условие $u_2(0, \rho) = u_0(\rho), a < \rho < b$?

Эти задачу заменим другой

$$J(f) = \int_a^b [u_2(0, \rho) - u_0(\rho)]^2 d\rho \Rightarrow \min.$$

Если неизвестную функцию $f(t)$ представить рядом Фурье и удержать конечное число членов, то придем к задаче о \min квадратичной функции многих переменных.

3. Периодическая трехкомпонентная задача теории упругости с недоопределенно-переопределенными граничными условиями

Рассматривается периодическая смешанная задача о сдвиге составной полуплоскости с прямоугольными выступами (рис. 2). Модуль сдвига μ предполагаем различным в полуплоскости, полосе и прямоугольниках.

На вертикальных сторонах верхнего прямоугольника касательных усилий нет, на границах раздела сред предполагаем совершенный контакт: перемещения и напряжения непрерывны. На бесконечности перемещения ограничены.

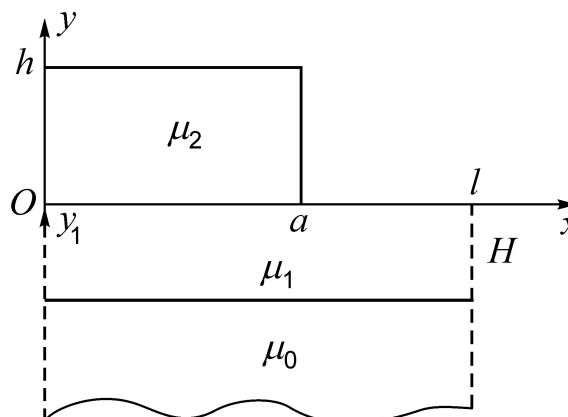


Рис. 2. Период задачи

Особенность этой задачи состоит в том, что на линии $y = h$ граничное условие не задано, зато на линии $y = 0, a \leq x \leq l$ заданы избыточные согласованные граничные условия [8]:

$$u = f(x) \quad \text{и} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \varphi(x). \tag{3.1}$$

Единственная отличная от нуля компонента $u(x, y)$ вектора перемещения удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \tag{3.2}$$

в каждой из подобластей (см. рис. 2).

Условия сопряжения на границах раздела сред будут такими:

$$u_2 = u_1; \quad \tau_{zy}^{(2)} = \tau_{zy}^{(1)}; \quad y = 0; \tag{3.3}$$

$$u_1 = u_0; \quad \tau_{zy}^{(1)} = \tau_{zy}^{(0)}; \quad y = -H; \quad \tau_{zy}^{(j)} = \mu_j \frac{\partial u_j}{\partial y}; \quad j = 0, 1, 2,$$

где μ_j – модули сдвига.

По этим данным нужно на линии $l_1: \{0 < x < a, y = h\}$ периода задачи определить граничное условие (для u или $\partial u / \partial y$) так, чтобы задача имела единственное решение, совпадающее на участке $l_2: \{a < x < l, y = 0\}$ с заданными на нем функциями.

Для решения прямой задачи надо поставить какое-либо краевое условие на верхней стороне прямоугольника $\Pi_2: \{0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq h\}$. Выберем, к примеру, условие Неймана

$$\tau_{zy}^{(2)}(x, h) = \mu_2 \frac{\partial u_2}{\partial y} \Big|_{y=h} = \tau(x), \quad 0 \leq x \leq a. \quad (3.4)$$

На нижней стороне прямоугольника Π_2 введем вспомогательную функцию $g(x)$ условием

$$\tau_{zy}^{(2)}(x, 0) = \mu_2 \frac{\partial u_2}{\partial y} \Big|_{y=0} = g(x), \quad 0 \leq x \leq a. \quad (3.5)$$

Отметим, что $\tau(x)$ и $g(x)$ – неизвестные функции. Для прямоугольника Π_2 имеем задачу Неймана для уравнения Лапласа (3.2), которая имеет решение при условии

$$\int_0^a \tau(x) dx = \int_0^a g(x) dx. \quad (3.6)$$

Решение этой задачи определяется формулой

$$u_2(x, y) = A_0 + b_1 y + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cdot ch r_n (h - y) + c_n \cdot ch r_n y] \cos r_n x, \quad (3.7)$$

где

$$b_1 = \frac{\mu_2^{-1}}{a} \int_0^a g(\xi) d\xi; \quad a_n = -\frac{2\mu_2^{-1}}{\pi n sh r_n h} \int_0^a g(\xi) \cos r_n \xi d\xi;$$

$$c_n = -\frac{2\mu_2^{-1}}{\pi n sh r_n h} \int_0^a \tau(\xi) \cos r_n \xi d\xi, \quad r_n = \frac{n\pi}{a}.$$

Периодическое решение уравнения Лапласа в прямоугольнике Π_1 $\{0 \leq x \leq l, -H \leq y \leq 0\}$ определим рядом

$$u_1(x, y) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} v_n(y) \cdot e^{i\lambda_n x}, \quad \lambda_n = \frac{2n\pi}{l}, \quad (3.8)$$

где $v_n(y) = C_n sh \lambda_n y + D_n ch \lambda_n (y + H)$.

Из условия на верхней грани Π_1

$$\tau_{zy}^{(1)} = \mu_1 \cdot \frac{\partial u_1}{\partial y} = \begin{cases} g(x), & 0 < x < a \\ \varphi(x), & a < x < l \end{cases}$$

находим

$$C_n + D_n sh \lambda_n H = \frac{\mu_1^{-1}}{\lambda_n l} \left(\int_0^a g(\xi) e^{-i\lambda_n \xi} d\xi + \int_a^l \varphi(\xi) e^{-i\lambda_n \xi} d\xi \right). \quad (3.9)$$

Решение для полуполосы $y_1 < 0, 0 \leq x \leq l$ берем в виде

$$u_0(x, y_1) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n \cdot e^{|\lambda_n| y_1} \cdot e^{i\lambda_n x}, \quad y_1 < 0. \quad (3.10)$$

Условия сопряжения (3.3) на линии $y_1 = 0$ вместе с (3.9) дают

$$C_n = \frac{\mu_1^{-1}}{2\pi n D_n} I_n, \quad D_n = \frac{\mu_1^{-1}}{2\pi n \lambda_n} \frac{I_n}{D_n} D_n^{(1)},$$

где

$$D_n = ch^2 \lambda_n H + v_{10} \cdot ch \lambda_n H \cdot sh |\lambda_n| H; \quad D_n^{(1)} = \lambda_n \cdot sh \lambda_n H + v_{10} |\lambda_n| \cdot ch \lambda_n H;$$

$$I_n = \int_0^a g(\xi) e^{-i\lambda_n \xi} d\xi + \int_a^l \varphi(\xi) e^{-i\lambda_n \xi} d\xi, \quad v_{10} = \frac{v_1}{v_2}.$$

Остается невыполненным одно условие для решения прямой задачи: $u_2(x,0) = u_1(x,0)$, $0 \leq x \leq a$. Реализация этого условия приводит к уравнению

$$\int_0^a g(\xi) [M(x-\xi) + M(x+\xi) - K_0(x-\xi)] d\xi + \int_0^a \tau(\xi) [h(x-\xi) + h(x+\xi)] d\xi = f_1(x), \quad (3.11)$$

$$0 \leq x \leq a, \quad f_1(x) = \int_a^l \varphi(\xi) K_0(x-\xi) d\xi.$$

В равенстве (3.11) использованы обозначения

$$M(x) = v_{12} \left[\ln \left| 2 \sin \frac{\pi x}{2a} \right| + H(x) \right], \quad H(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-r_n h}}{sh r_n h} \frac{\cos r_n x}{n};$$

$$h(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos r_n x}{n sh r_n h}, \quad K_0(x) = -\ln \left| 2 \sin \frac{\pi x}{2l} \right| + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\gamma_n}{n} \cos \lambda_n x;$$

$$\gamma_n = \frac{e^{-\lambda_n H} (v_{10} - 1)}{ch \lambda_n H + v_{10} sh \lambda_n H}, \quad v_{13} = \mu_1 / \mu_2.$$

Второе уравнение получим от реализации избыточного условия $u_1(x,0) = f(x)$ при $a \leq x \leq l$:

$$A_0 + \frac{\mu_1^{-1}}{\pi} \int_0^a g(\xi) K_0(x-\xi) d\xi = -\frac{\mu_1^{-1}}{\pi} f_1(x) + f(x), \quad a \leq x \leq l. \quad (3.12)$$

Уравнения (3.11), (3.12) являются разрешающими уравнениями задачи граничного управления. Если из (3.11) выразить (численно или полуаналитически) функцию $g(x)$ через управление $\tau(x)$ (с использованием метода полуобращения или алгоритма саморегуляризации) и подставить результат в (3.12), то придем к первому представлению (0.2). Затем следует решить некорректную задачу обращения полученного интегрального уравнения. Но можно поступить и по-другому: решить некорректную задачу обращения уравнения (3.12) относительно функции $g(x)$, а затем решить такую же задачу для уравнения (3.11) относительно функции управления $\tau(x)$. В любом случае функция $g(x)$, а в итоге и $\tau(x)$, будут содержать неизвестную до сих пор константу A_0 . Для её определения следует воспользоваться равенством (3.6).

4. Нестационарная задача теплопроводности для разветвленного трехзвенного стержня

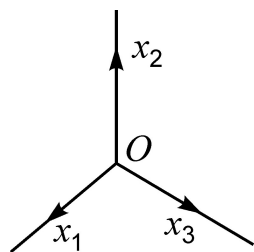


Рис. 3. Стержневая система

Решаем задачу теплопроводности для трехзвенного тонкого стержня (рис. 3) при условии, что все звенья стержня одинаковые по своим свойствам и между звеньями в точке их соединения имеется совершенный контакт. Примем длину звена равной l и с каждым звеном свяжем систему координат Ox_j ($j = 0, 1, 2$).

Уравнение распространения тепла в стержневой системе

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{a^2} \frac{\partial u}{\partial t} \tag{4.1}$$

дополним краевыми и начальными условиями:

$$u_1(l, t) = u_2(l, t) = 0; \quad u_3(l, t) = v(t); \quad v(0) = 0, \quad t \geq 0; \tag{4.2}$$

$$u_j(x, 0) = f_j(x); \quad j = 0, 1, 2. \tag{4.3}$$

В точке соединения стержней имеем условия сопряжения:

$$\left. \begin{aligned} u_1(0, t) = u_2(0, t) = u_3(0, t); \\ \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right) \Big|_{x=0} = 0. \end{aligned} \right\} \tag{4.4}$$

В дальнейшем индекс при переменной x будем опускать и без потери общности будем считать $a = 1$.

К решению задачи применим операционный метод, основанный на преобразовании Лапласа. В результате чего для трансформант $U_j(x, p)$ найдем:

$$U_j(x, p) = \frac{1}{\gamma} \int_x^l f_j(\xi) \operatorname{sh} \gamma(x - \xi) d\xi + B_j \operatorname{sh} \gamma(x - l), \quad j = 1, 2, \quad \gamma = \sqrt{p}, \tag{4.5}$$

$$B_j = -\frac{1}{3} \left(M^c \frac{1}{\operatorname{ch} z} - \frac{R_j}{\operatorname{sh} z} \right) \frac{1}{\gamma} - \frac{N(p)}{3 \operatorname{sh} z \cdot \operatorname{ch} z}, \quad j = 1, 2, 3, \quad z = \gamma l, \quad v(t) \div N(p)$$

$$M^c = K_1^c + K_2^c + K_3^c, \quad K_j^c = \int_0^l f_j(\xi) \operatorname{ch} \gamma \xi d\xi,$$

$$R_j = M^s - 3K_j^s, \quad M^s = K_1^s + K_2^s + K_3^s, \quad K_j^s = \int_0^l f_j(\xi) \operatorname{sh} \gamma \xi d\xi,$$

$$U_3(x, p) = \frac{1}{\gamma} \int_x^l f_3(\xi) \operatorname{sh} \gamma(x - \xi) d\xi + B_3 \operatorname{sh} \gamma(x - l) + \frac{\operatorname{sh} \gamma x}{\operatorname{sh} \gamma l} N(p). \tag{4.6}$$

Здесь p – параметр преобразования).

Нетрудно проверить, что краевые условия и условия сопряжения выполняются. Возвращаемся к оригиналам, используя теорему о свертке:

$$u_j(x,t) = -\frac{1}{3} \int_0^t v'(\tau) k_j(x,t-\tau) d\tau + \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n A_n e^{-\lambda_n^2 t} \sin \lambda_n (x-l) + \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n B_n^j e^{-\tilde{\lambda}_n^2 t} \sin \frac{n\pi}{l} (x-l), \quad \lambda_n = \frac{\pi}{2l} (2n+1), \quad \tilde{\lambda}_n = \frac{n\pi}{l}, \quad j = 0, 1, 2, \quad (4.7)$$

$$A_n = \int_0^l (f_1(\xi) + f_2(\xi) + f_3(\xi)) \cos \lambda_n \xi d\xi, \quad (4.8)$$

$$B_n^j = \int_0^l [f_1(\xi) + f_2(\xi) + f_3(\xi) - 3f_j(\xi)] \sin \tilde{\lambda}_n \xi d\xi,$$

$$k_1(x,t) = k_2(x,t) = \frac{x-l}{l} + \frac{1}{l} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \lambda_n^{-1} e^{-\lambda_n^2 t} \sin \frac{n\pi}{2l} (x-l),$$

$$k_3(x,t) = k_1(x,t) + \frac{1}{l} \left(x + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \lambda_n^{-1} e^{-\lambda_n^2 t} \sin \frac{n\pi}{l} x \right).$$

Относительно формул (4.7) отметим, что при $t = 0$ из них получаем формулы разложения „произвольной“ функции $f_j(x)$ в ряд Фурье по гибридным собственным функциям спектральной задачи:

$$y_j'' + \lambda^2 y_j = 0; \quad 0 < x < l; \quad y_j(l) = 0; \quad (4.9)$$

$$y_1(0) = y_2(0) = y_3(0), \quad y_1'(0) + y_2'(0) + y_3'(0) = 0.$$

Эта задача имеет спектр, состоящий из двух серий чисел:

$$\tilde{\lambda}_n = \frac{n\pi}{l} \text{ и } \lambda_n = \frac{\pi}{2l} (2n+1),$$

и соответственно две серии собственных функций:

$$y_n^{(1)}(x) = \sin \tilde{\lambda}_n (x-l) \text{ и } y_n^{(2)}(x) = \sin \lambda_n (x-l). \quad (4.10)$$

Формулы разложения имеют вид

$$f_j(x) = \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n A_n \sin \lambda_n (x-l) + \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n B_n^j \sin \tilde{\lambda}_n (x-l), \quad (4.11)$$

где A_n и B_n^j определены равенствами (4.8), $j = 0, 1, 2$.

Будем считать, что в точке $x = l/2$ на первом звене известна температура $u_1(l/2, t) = u_1^0(t)$ в промежутке (t_1, t_2) . Какое нужно выбрать граничное управление, $v(t)$ $t \in (0, t_2)$, на краю третьего звена, чтобы обеспечить совпадение $u_1(x, t)$ в точке $x = l/2$ с функцией $u_1^0(t)$ на (t_1, t_2) ?

Эту задачу заменим задачей

$$I(v) \equiv \int_{t_1}^{t_2} [u_1(l/2, t) - u_1^0(t)]^2 dt \Rightarrow \min. \quad (4.12)$$

Такая задача всегда имеет единственное регуляризованное решение [17].

5. Нестационарная задача теплопроводности для системы, состоящей из прямоугольных тонких пластин

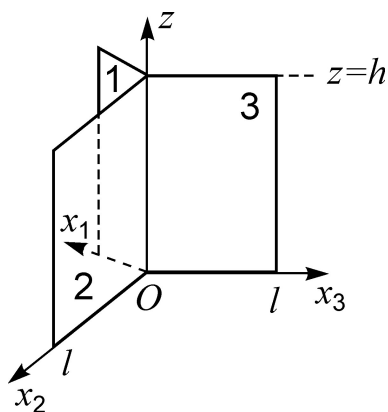


Рис. 4. Система тонких пластин

Пластины будем предполагать одинакового размера, изготовленными из одного материала, спаянными между собой (см. рис. 4) и находящимися в условии совершенного теплового контакта. Начальные условия примем ради простоты нулевыми. На границе пластин примем условия

$$\left. \begin{aligned} u_j(x, 0, t) &= f_j(x) \cdot \varphi_j(t) \\ u_j(x, h, t) &= g_j(x) \cdot \psi_j(t) \end{aligned} \right\} j = 0, 1, 2, \quad (5.1)$$

$$u_j(l, z, t) = 0. \quad (5.2)$$

Уравнение теплопроводности имеет вид

$$\frac{\partial^2 u_j}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_j}{\partial z^2} = \frac{\partial u_j}{\partial t}. \quad (5.3)$$

На линии соединения пластин имеем условия сопряжения

$$\left. \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right|_{x_1=x_2=x_3=0} = 0. \quad (5.4)$$

Для согласованности начальных и граничных данных должны выполняться условия

$$\varphi_j(0) = \psi_j(0) = 0, \quad j = 0, 1, 2. \quad (5.5)$$

Разложим функции $u_j(x, z, t)$, $f_j(x)$, $g_j(x)$ в ряды вида (4.11) по собственным функциям $y_n^{(1)}(x)$ и $y_n^{(2)}(x)$ спектральной задачи (4.9):

$$u_j(x, z, t) = \sum_{n=1}^{\infty} (v_{jn}(z, t) y_n^{(1)}(x) + w_{jn}(z, t) y_n^{(2)}(x)); \quad (5.6)$$

$$\begin{pmatrix} f_j(x) \\ g_j(x) \end{pmatrix} = \sum_{n=1}^{\infty} \begin{pmatrix} \alpha_{jn}^{(1)} \\ \beta_{jn}^{(1)} \end{pmatrix} y_n^{(1)}(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \begin{pmatrix} \alpha_{jn}^{(2)} \\ \beta_{jn}^{(2)} \end{pmatrix} y_n^{(2)}(x), \quad 0 \leq x \leq l; \quad (5.7)$$

числа $\alpha_{jn}^{(1)}$, $\alpha_{jn}^{(2)}$, $\beta_{jn}^{(1)}$, $\beta_{jn}^{(2)}$ определяются по формулам (4.8).

Для определения функций $v_{jn}(z, t)$, $w_{jn}(z, t)$ имеем уравнения

$$\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} - \tilde{\lambda}_n^2 v = \frac{\partial v}{\partial t}, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} - \lambda_n^2 w = \frac{\partial w}{\partial t} \quad (0 < z < h), \quad (5.8)$$

краевые условия

$$\left. \begin{aligned} v_{jn}(0, t) &= \alpha_{jn}^{(1)} \cdot \varphi_j(t), & v_{jn}(h, t) &= \beta_{jn}^{(1)} \cdot \psi_j(t) \\ w_{jn}(0, t) &= \alpha_{jn}^{(2)} \cdot \varphi_j(t), & w_{jn}(h, t) &= \beta_{jn}^{(2)} \cdot \psi_j(t) \end{aligned} \right\} \quad (5.9)$$

и нулевые начальные данные.

Операционный метод, примененный к (5.8), (5.9), дает

$$V_{jn}(z, p) = \Psi_j(p) \cdot \beta_{jn}^{(1)} \frac{sh \gamma_n z}{sh \gamma_n h} + \Phi_j(p) \cdot \alpha_{jn}^{(1)} \frac{sh \gamma_n (h-z)}{sh \gamma_n h}, \quad (5.10)$$

$$W_{jn}(z, p) = \Psi_j(p) \cdot \beta_{jn}^{(2)} \frac{sh \tilde{\gamma}_n z}{sh \tilde{\gamma}_n h} + \Phi_j(p) \cdot \alpha_{jn}^{(2)} \frac{sh \tilde{\gamma}_n (h-z)}{sh \tilde{\gamma}_n h}, \quad (5.11)$$

где $\gamma_n^2 = \lambda_n^2 + p$; $\tilde{\gamma}_n^2 = \tilde{\lambda}_n^2 + p$; $\Phi_j(p) \div \varphi_j(t)$, $\Psi_j(p) \div \psi_j(t)$;

$V_{jn}(z, p) \div v_{jn}(z, t)$; $W_{jn}(z, p) \div w_{jn}(z, t)$.

Возвращаемся к искомым функциям $v_{jn}(z, t)$, $w_{jn}(z, t)$ с помощью теорем о свертке и вычетов. Имеем

$$v_{jn}(z, t) = \beta_{jn}^{(1)} \int_0^t \psi'_j(\tau) H_{jn}^{(1)}(z, t-\tau) d\tau + \alpha_{jn}^{(1)} \int_0^t \varphi'_j(\tau) K_{jn}^{(1)}(z, t-\tau) d\tau, \quad (5.12)$$

$$w_{jn}(z, t) = \beta_{jn}^{(2)} \int_0^t \psi'_j(\tau) H_{jn}^{(2)}(z, t-\tau) d\tau + \alpha_{jn}^{(2)} \int_0^t \varphi'_j(\tau) K_{jn}^{(2)}(z, t-\tau) d\tau, \quad (5.13)$$

где обозначено

$$H_{jn}^{(1)}(z, t) = \frac{sh \tilde{\lambda}_n z}{sh \tilde{\lambda}_n h} + 2\pi \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k k e^{\tilde{p}kt} \sin \frac{k\pi}{h} z}{k^2 \pi^2 + \tilde{\lambda}_n^2 h^2}, \quad (5.14)$$

$$K_{jn}^{(1)}(z, t) = H_{jn}^{(1)}(z-h, t).$$

Ядра $H_{jn}^{(2)}(z, t)$, $K_{jn}^{(2)}(z, t)$ получаются соответственно из ядер $H_{jn}^{(1)}(z, t)$, $K_{jn}^{(1)}(z, t)$, если в последних параметр $\tilde{\lambda}_n$ заменить на λ_n .

Выражения для решений исходной задачи таковы:

$$u_j(x, z, t) = \int_0^t \psi'_j(\tau) H_j(x, z, t-\tau) d\tau + \int_0^t \varphi'_j(\tau) K_j(x, z, t-\tau) d\tau,$$

$$H_j(x, z, t) = \sum_{n=1}^{\infty} y_n^{(1)}(x) [\beta_{jn}^{(1)} H_{jn}^{(1)}(z, t)] + \sum_{n=1}^{\infty} y_n^{(2)}(x) [\beta_{jn}^{(2)} H_{jn}^{(2)}(z, t)], \quad (5.15)$$

$$K_j(x, z, t) = \sum_{n=1}^{\infty} [\alpha_{jn}^{(1)} y_n^{(1)}(x) K_{jn}^{(1)}(z, t) + \alpha_{jn}^{(2)} y_n^{(2)}(x) K_{jn}^{(2)}(z, t)].$$

Форма решения (5.15) соответствует представлению (0.2) и позволяет ставить задачу граничного управления для функций $\varphi_j(t)$, $\psi_j(t)$.

Отметим, что только ради простоты изложения мы остановились в этом и предыдущем пунктах на трехкомпонентной системе, состоящей из одинаковых компонент. Предложенный метод может быть применен к многокомпонентной системе с произвольным конечным числом разнородных компонент.

6. Вынужденные колебания четырехзвенной струны

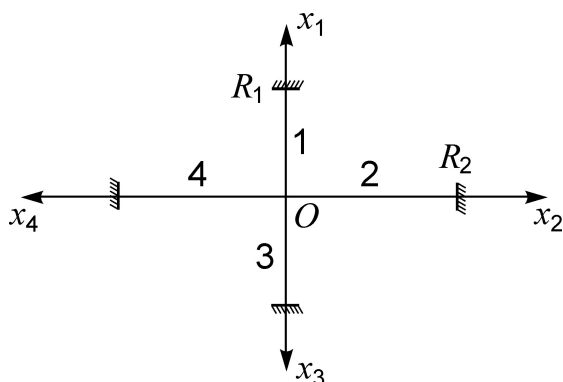


Рис. 5. Четырехзвенная струна

Струна составлена из четырех однородных звеньев (рис. 5). Одни концы звеньев закреплены, другие – сходятся в одной точке. Предположим, что второе звено струны нагружено распределенными по длине звена усилиями $v(t)$, а остальные три свободны от нагрузки. Начальные условия примем нулевыми, хотя для метода решения это не является обязательным.

Колебания струны подчиняются уравнению

$$\frac{\partial^2 u_j}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u_j}{\partial t^2} - \frac{v(t)}{T} \delta_{2j}, \quad j = 1, 2, 3, 4, \quad (6.1)$$

где δ_{2j} – символ Кронекера, T – натяжение струны.

Кроме условий закрепления $u_1(R_1, t) = u_2(R_2, t) = u_3(R_1, t) = u_4(R_2, t) = 0$ в точке $x = x_j = 0$ должны выполняться условия сопряжения звеньев

$$\left. \begin{aligned} u_1(0, t) = u_2(0, t) = u_3(0, t) = u_4(0, t); \\ \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} + \frac{\partial u_4}{\partial x_4} \right) \Big|_{x=0} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (6.2)$$

Применим операционный метод

$$\frac{\partial^2 u_j}{\partial t^2} \div p^2 U_j(x, p), \quad u_j(x, t) \div U_j(x, p), \quad v(t) \div N(p).$$

В результате получим

$$\begin{aligned} U_j(x, p) &= A_j \cdot \operatorname{sh} p(x - R_j), \quad j = 1, 3, 4, \\ U_2(x, p) &= A_2 \cdot \operatorname{sh} p(x - R_2) + \frac{N(p)}{T p^2} [1 - \operatorname{ch} p(x - R_2)], \end{aligned} \quad (6.3)$$

где A_j – произвольные функции параметра p .

Условия сопряжения (6.2) позволяют найти

$$\begin{aligned}
 A_1(p) &= -\frac{N(p)}{Tp^2} \frac{sh^2 p \frac{R_2}{2}}{shp(R_1 + R_2)}, \quad A_3 = A_1, \\
 A_2(p) &= -\frac{N(p)}{Tp^2} \frac{chpR_2 - 1}{shpR_2} \left(1 + \frac{shpR_1}{2shp(R_1 + R_2)} \right), \\
 A_4(p) &= -\frac{N(p)}{2Tp^2} \frac{chpR_2 - 1}{shpR_2} \frac{shpR_1}{shp(R_1 + R_2)}.
 \end{aligned} \tag{6.4}$$

Учитывая (6.3), (6.4), находим оригиналы (в предположении, что функции $shpR_2$ и $shp(R_1 + R_2)$ не имеют общих нулей):

$$u_1(x, t) = u_3(x, t) = -\frac{1}{2T} \int_0^t v(\tau) r_1(x, t - \tau) d\tau; \tag{6.5}$$

$$u_2(x, t) = -\frac{1}{T} \int_0^t v(\tau) r_2(x, t - \tau) d\tau; \quad u_4(x, t) = -\frac{1}{2T} \int_0^t v(\tau) r_4(x, t - \tau) d\tau, \tag{6.6}$$

где введены обозначения

$$\begin{aligned}
 r_1(x, t) &= \frac{4}{l} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \lambda_n^{-2} \sin^2 \lambda_n \frac{R_2}{2} \sin \lambda_n (x - R_1) \sin \lambda_n t, \quad l = R_1 + R_2, \\
 r_2(x, t) &= \frac{2}{R_2} S(x, t) + \frac{2}{l} R(x, t), \quad r_4(x, t) = -\frac{4}{R_2} S(x, t) + \frac{4}{l} R(x, t), \\
 S(x, t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin r_n t}{r_n^2} \sin r_n (x - R_2), \quad R(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 \lambda_n \frac{R_2}{2}}{\lambda_n^2} \sin \lambda_n t \sin \lambda_n (x - R_2), \\
 r_n &= \frac{\pi}{R_2} (2n + 1), \quad \lambda_n = \frac{n\pi}{l}.
 \end{aligned}$$

Задачу идентификации нагрузки $v(t)$ можно поставить так: в точке $x = a_0$, $0 < a_0 < R_1$ первого звена струны производится наблюдение в течение промежутка времени (t_1, t_2) , т.е. в этом промежутке известна функция $u_1(a_0, t) = u_1^0(t)$. По этим наблюдениям, которые всегда сопровождаются погрешностями, надо как можно более точно распознать ту нагрузку, которая инициирует перемещение $u_1^0(t)$. Последнюю задачу заменим задачей

$$J(v) \equiv \int_{t_1}^{t_2} [u_1(a, t) - u_1^0(t)]^2 dt \Rightarrow \min.$$

Следует заметить, что минимальный промежуток времени $\tau_0 = t_2 - t_1$, необходимый для решения последней задачи, равен $(R_2 + a_0)/a$, где a – скорость

распространения возмущений в струне [9]. В нашем случае $a = 1$. В случае, когда по каким-то причинам $\tau_0 < R_2 + a_0$, то регуляризованное решение задачи о $\min J(v)$ все равно будет найдено, но оно не будет истинным управлением. В этом случае назовем его квазирешением задачи управления.

В заключение этого пункта приведем окончательные формулы, дающие решение задачи о свободных колебаниях четырехзвенной струны при начальных условиях

$$u_j(x,0) = f_j(x), \quad \left. \frac{\partial u_j}{\partial t} \right|_{t=0} = 0, \quad 0 \leq x \leq R_1 \text{ при } j = 1,3 \text{ и } 0 \leq x \leq R_2 \text{ при } j = 2,4:$$

$$u_1(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n^1 \sin \lambda_n (x - R_1) \cos \lambda_n t + \sum_{n=1}^{\infty} B_n^1 \sin s_n^{(1)} x \cos s_n^{(1)} t, \quad (6.7)$$

$$u_2(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n^2 \sin \lambda_n (x - R_2) \cos \lambda_n t + \sum_{n=1}^{\infty} B_n^2 \sin s_n^{(2)} x \cos s_n^{(2)} t, \quad (6.8)$$

где $s_n^{(1)} = \frac{n\pi}{R_1}$; $s_n^{(2)} = \frac{n\pi}{R_2}$;

$$A_n^1 = \frac{1}{l} [K_1^s(\lambda_n) + K_3^s(\lambda_n) - (-1)^n (K_2^s(\lambda_n) + K_4^s(\lambda_n))]; \quad B_n^1 = \frac{1}{R_1} [S_1^s(s_n^{(1)}) - S_3^s(s_n^{(1)})];$$

$$A_n^2 = \frac{1}{l} [K_2^s(\lambda_n) + K_4^s(\lambda_n) - (-1)^n (K_1^s(\lambda_n) + K_3^s(\lambda_n))]; \quad B_n^2 = \frac{1}{R_2} [S_2^s(s_n^{(2)}) - S_4^s(s_n^{(2)})];$$

$$K_j^s(\lambda) = \int_0^{R_j} f_j(\xi) \sin \lambda (\xi - R_j) d\xi; \quad S_j^s(r) = \int_0^{R_j} f_j(\xi) \sin r \xi d\xi.$$

Выражения для $u_3(x,t)$ и $u_4(x,t)$ аналогичны.

Отметим, что из формул (6.7), (6.8) при $t = 0$ получаем формулы разложения „произвольных” функций в ряды Фурье по гибридным собственным функциям спектральной задачи:

$$y_j'' + \lambda^2 y_j = 0, \quad 0 < x < R_1, \text{ когда } j = 1,3 \text{ и } 0 < x < R_2, \text{ когда } j = 2,4;$$

$$y_j(R_j) = 0, \quad j = 1,2,3,4; \quad y_1(0) = y_2(0) = y_3(0) = y_4(0),$$

$$\left(\frac{\partial y_1}{\partial x_1} + \frac{\partial y_2}{\partial x_2} + \frac{\partial y_3}{\partial x_3} + \frac{\partial y_4}{\partial x_4} \right) \Big|_{x_j=0} = 0.$$

Как видно из (6.7), (6.8), эта задача имеет три серии собственных значений и соответственно три серии собственных функций.

Выводы

1. Предложено применение и дальнейшее развитие метода гибридных собственных функций [14, 15] на новый класс задач. Этот класс представляет собой

многокомпонентные системы: многозвенные стержни и струны, многолистные пластины, тонкостенные „стаканы”, слоистые среды.

2. Получены разложения произвольных функций в ряды Фурье по гибридным собственным функциям неклассической спектральной задачи с несколькими сериями собственных значений.

3. Решения задач представлены в аналитической форме, позволяющей ставить и решать задачи управления и идентификации параметров в многокомпонентных системах с распределенными параметрами.

4. На основе найденных аналитических решений построены конкретные целевые функционалы задач управления и идентификации. Дискретизация функционалов приводит задачу к минимизации квадратичной функции многих переменных.

Список литературы

1. Лионс Ж.-Л. Оптимальное управление системами, описываемыми управлениями с частными производными / Ж.-Л. Лионс. – М.: МИР, 1972. – 414 с.
2. Лурье К.А. Оптимальное управление в задачах математической физики / К.А. Лурье. – М.: Наука, 1975. – 480 с.
3. Бутковский А.Г. Теория оптимального управления системами с распределенными параметрами / А.Г. Бутковский. – М.: Наука, 1965. – 476 с.
4. Сергиенко И.В. Решение комплексных обратных задач для гиперболических многокомпонентных распределенных систем / И.В. Сергиенко, В.С. Дейнека // Кибернетика и системный анализ. – 2008. – № 2. – С. 55–80.
5. Сергиенко И.В. Идентификация параметров динамической задачи теории упругого тела с включениями / И.В. Сергиенко, В.С. Дейнека // Кибернетика и системный анализ. – 2009. – № 3. – С. 75–97.
6. Сергиенко И.В. Идентификация параметров системы конвективно-диффузионного переноса / И.В. Сергиенко, В.С. Дейнека // Кибернетика и системный анализ. – 2009. – № 1. – С. 42–63.
7. Сергиенко И.В. Решение граничных обратных задач для параболических многокомпонентных распределенных систем / И.В. Сергиенко, В.С. Дейнека // Кибернетика и системный анализ. – 2007. – № 4. – С. 49–73.
8. Латтес Р. Метод квазиобращения и его приложения / Р. Латтес, Ж.-Л. Лионс. – М.: Мир, 1970. – 336 с.
9. Бутковский А.Г. Методы управления системами с распределенными параметрами / А.Г. Бутковский. – М.: Наука, 1975. – 568 с.
10. Красовский Н.Н. Теория управления движением / Н.Н. Красовский. – М.: Наука, 1968. – 476 с.
11. Дейнека В.С. Численное решение задач идентификации параметров параболических многокомпонентных систем / В.С. Дейнека, Н.А. Вещунова // Компьютерная математика. – 2008. – № 1. – С. 22–33.
12. Дейнека В.С. Численное решение обратных задач нестационарной теплопроводности для пластин / В.С. Дейнека, Н.А. Вещунова // Компьютерная математика. – 2008. – № 2. – С. 32–43.
13. Задачи импульсного деформирования элементов конструкций / Е.Г. Янютин, И.В. Янчевский, А.В. Воропай, А.С. Шарпата. – Х.: Нац. автомоб.-дорожн. ун-т, 2004. – 392 с.

14. Проценко В.С. Некоторые обобщения в теории ортогональных разложений / В.С. Проценко // Математические методы анализа динамических систем. – Х.: ХАИ. – 1977. – Вып. 1. – С. 3–13.

15. Проценко В.С. Некоторые гибридные интегральные преобразования и их приложения в теории упругости неоднородных сред / В.С. Проценко, А.И. Соловьев // Прикладная механика. – 1982 – Т. 18, № 1. – С. 62–67.

16. Проценко В.С. Управление физическим полем сложной системы, которая моделируется смешанной задачей для уравнения эпилептического типа / В.С. Проценко // Открытые информационные и компьютерные интегрированные технологии. – Х.: Нац. аэрокосм. ун-т „ХАИ”. – 2009. – Вып. 41. – С. 10–17.

17. Тихонов Н.А. Методы решения некорректных задач / А.Н. Тихонов, В.Я. Арсенин. – М.: Наука, 1974. – 224 с.

Рецензент: д-р техн. наук, проф., зав. каф. Костюк Г.И., Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского «ХАИ», Харьков.

Поступила в редакцию 01.03.10

Задачі ідентифікації та управління для багатокomпонентних систем з розподіленими параметрами

Запропоновано аналітичні методи розв'язання задач математичної фізики для багатокomпонентних систем. До них належать: багат шарові періодичні складені пружні тіла; теплопровідні багатолістні тонкі пластини та багатоланкові тонкі стрижні; тонкостінні "стакани"; багатоланкові струни. На основі аналітичних розв'язків сформульовано цільові функціонали задачі ідентифікації й керування полем системи з розподіленими параметрами. Вказано регуляризуючі алгоритми, за допомогою яких можуть бути знайдені розв'язки задач мінімізації функціоналів.

Ключові слова: ідентифікація, керування, системи з розподіленими параметрами, багатокomпонентні системи.

Identification and control tasks for multicomponent systems with distributed parameters

Analytical methods of solving mathematical physics problems for multicomponent systems are proposed. They include: multilayer periodical compound elastic bodies; heat-conducting multisheet thin plates and multichain thin bars; thin wall „glasses”; multichain strings. Objective functionals of the task of identification and control of the field of the system with distributed parameters are formulated on the basis of analytical solutions. Regularizing algorithms, by means of which solutions of the functional minimization problems can be obtained, are given.

Keywords: identification, control, systems with distributed parameters, multicomponent systems.