1940 НАУЧНЫЕ ЗАПИСКИ Том IV
ХАРЬКОВСКИЙ АВИАЦИОННЫЙ ИНСТИТУТ

КОВТУН Д.
Кандидат физико-математ. наук

ПРИЛОЖЕНИЕ МЕТОДА ИНТЕГРАЛЬНЫХ ВЫЧЕТОВ CAUCHY-LÉAUTÉ К РАЗЛОЖЕНИЮ ПРОИЗВОЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ В РЯДЫ, СВЯЗАННЫЕ С ПЕРВЫМ МЕТОДОМ POISSON'A

1

В настоящей работе дается представление произвольной функции $f(x)$ ограниченной вариации в виде ряда:

$$f(x)=\sum\frac{P_k\cos\rho_k x+Q_k\sin\rho_k x}{R_k}. \tag{P}$$

Здесь $(-\pi\leqslant x\leqslant\pi)$.

$$\left.\begin{aligned}
P_k&=(2\rho_k\cos\pi\rho_k-2\rho_k H\sin\pi\rho_k)\int_0^\pi\cos\rho_k z f(z)\,dz+\\
&\quad+(2H\rho_k\cos\pi\rho_k-H\rho_k^2\sin\pi\rho_k)\int_0^\pi\sin\rho_k z f(z)\,dz\\
Q_k&=-(2h\rho_k\cos\pi\rho_k+2Hh\sin\pi\rho_k)\int_0^\pi\cos\rho_k z f(z)\,dz+\\
&\quad+(2Hh\cos\pi\rho_k-2h\rho_k\sin\pi\rho_k)\int_0^\pi\sin\rho_k z f(z)\,dz\\
R_k&=(H+h+Hh\pi-\rho_k^2\pi)\cos\pi\rho_k-(2+H\pi+h\pi)\rho_k\sin\pi\rho_k
\end{aligned}\right\} \tag{Q}$$

$H, h=\mathrm{const}$, ρ_k — корень трансцендентного уравнения

$$\omega(\rho)\equiv\frac{1}{\rho}\{(H+h)\rho\cos\rho\pi-(\rho^2-Hh)\sin\rho\pi\}=0.$$

К необходимости такого представления произвольной функции приводят некоторые нестационарные задачи теории теплопроводности (в частности, задача об охлаждении стержня), решаемые по 1-му способу Poisson'a интегрирования диференциальных уравнений в частных производных.

Затруднительность получения разложений вида (P) непосредственно и во всей общности была отмечена еще Poisson'ом[1]. Дальнейшими же исследователями — проф. А. Н. Коркиным[2] и акад. А. Н. Крыловым[3] строгое решение вопроса приведено не было.

Здесь мы получаем разложение (P) в замкнутом промежутке $(-\pi, \pi)$, применяя метод интегральных вычетов Cauchy-Léauté разложения функций в ряды Fourier и им подобные.

---

[1] Poisson. Mémoire sur la distribution de la chaleur dans les corps solides. Journ. de l'école Royale Polyt. t. XII, 19 cah. 1823, pp. 1—144.

[2] А. Н. Коркин. Рассуждение об определении произвольных функций в интегралах уравнений с частными производными (1860 г. диссертация). Сочинения А. Н. Коркина, т. I, СПБ, стр. 1—126.

[3] А. Н. Крылов. О некоторых диф. уравн. матем. физики.

2

Пусть $f(x)$ — функция ограниченной вариации, произвольно заданная в $(0, \pi)$ и на интервал $(-\pi, 0)$ продолжена согласной одной из функциональных зависимостей, предложенных проф. Н. И. Ахиезером, т. е.

$$f(z) - f(-z) - hF(z) + hF(-z) = 0, \tag{β}$$

где

$$F(x) = \int_0^x f(\xi)\, d\xi.$$

Введем также:

$$\mu(z) = (z + H)(z + h)e^{\pi z} - (z - H)(z - h)e^{-\pi z}$$

$$\chi(z) = (z + H)(z + h)e^{\pi z}; \quad \psi(z) = (H - z)(z - h)e^{-\pi z}.$$

Тогда на основании формулы Cauchy

$$f(x) = -\sum \frac{\psi(\lambda)}{\mu'(\lambda)} e^{\lambda x} \int_{x_0}^{x_1} e^{-\lambda\mu} f(\mu)\, d\mu \tag{I}$$

$$[\mu(\gamma) = 0] \qquad x_0 < x < x_1,$$

где ψ, χ, μ — голоморфны, $f(\mu)$ — функция ограниченной вариации в (x_0, x_1), x — вещественно, функции ψ, χ, μ — удовлетворяют ограничениям Cauchy, а чтобы формула имела смысл и для концов интервала, — условиям Léauté[4], при выполнении которых правая часть (I) будет равна

$$\frac{f(x_0 + 0) - Lf(x_1 - 0)}{2} \quad \text{для } x = x_0 \qquad\qquad L,\ l = \text{const}$$

$$\frac{f(x_1 - 0) - lf(x_0 + 0)}{2} \quad \text{для } x = x_1$$

будем иметь, проверив все ограничения для введенных функций

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{(\sigma_k - H)(\sigma_k - h)e^{-\pi\sigma_k} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-\sigma_k \xi} f(\xi)\, d\xi}{\mu'(\sigma_k)} \tag{II}$$

$$(-\pi < x < \pi),$$

а для концов интервала

$$\frac{f(-\pi + 0) + f(\pi - 0)}{2} \quad \text{для } \begin{cases} x = -\pi \\ x = \pi \end{cases}$$

3

Но из условия продолжения функции $f(x)$ — (β) нетрудно получить, выполняя интегрирования,

$$f(-\xi) = f(\xi) - 2he^{-h\xi} \int_0^{\xi} e^{h\eta} f(\eta)\, d\eta. \tag{β_1}$$

Прилагая же формулу (β_1) к (II) и выполняя различные преобразования, которые здесь опускаем, а также принимая во внимание, что

$$\mu(\sigma) \equiv -2i\rho\omega(\rho) = 0,$$

---

[4] Статьи André Léauté в „Comptes rendus de l'Ac. des Sc". 27.XI 1911 и 2.I 1912.

сможем формулу (II) записать в виде

$$f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{L(\sigma_k)\,e^{\sigma_k x}+L(-\sigma_k)\,e^{-\sigma_k x}}{\mu'(\sigma_k)}+$$

$$+2he^{-h\pi}\int_0^{\pi}e^{h\xi}f(\xi)\,d\xi\left\{\frac{H}{\mu'(0)}+\sum\frac{(\sigma_k+H)\,e^{-\sigma_k x}-(\sigma_k-H)\,e^{\sigma_k x}}{\mu'(\sigma_k)}\right\}, \qquad \text{(III)}$$

где

$$L(\sigma)=(\sigma+H)(\sigma+h)\,e^{\pi\sigma}\int_0^{\pi}e^{-\sigma x}f(x)\,dx+(\sigma-H)(\sigma+h)\,e^{-\pi\sigma}\int_0^{\pi}e^{\sigma x}f(x)\,dx.$$

4

Заметив теперь, что величины L и μ', входящие в (III), связаны с P, Q и R, (Q) соотношениями

$$L(i\rho_k)+L(-i\rho_k)=2P_k$$
$$L(i\rho_k)-L(-i\rho_k)=-2iQ_k$$
$$\mu'(i\rho_k)=2R_k$$

и что

$$f(\pi-0)-f(-\pi+0)=2he^{-h\pi}\int_0^{\pi}e^{h\xi}f(\xi)\,d\xi,$$

сможем записать (III) в виде

$$f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{P_k\cos\rho_k x+Q_k\sin\rho_k x}{R_k}+$$

$$+\{f(\pi-0)-f(-\pi+0)\}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{(H-\sigma_k)\,e^{\sigma_k x}}{\mu'(\sigma_k)} \qquad \text{(IV)}$$

$$(-\pi<x<\pi),$$

т. е. полученное разложение отличается от разложения (P) на величину

$$\{f(\pi-0)-f(-\pi+0)\}\sum_{k=-\infty}^{\infty}E_{\sigma_k}\left\{\frac{(H-\sigma)\,e^{\sigma x}}{\mu(\sigma)}\right\}. \qquad \text{(V)}$$

5

Исследуем добавочное разложение (V). Рассмотрим поэтому

$$\lim_{n\to\infty}J=\frac{1}{2\pi i}\cdot\lim_{n\to\infty}\int_{C_n}\frac{(H-\sigma)\,e^{\sigma x}}{\mu(\sigma)}\,d\sigma,$$

где $C_n=AMBCNDA$ — замкнутый контур, не проходящий через полюсы подинтегральной функции, которые, как нетрудно показать, все чисто мнимы, а угол δ может быть сделан произвольно малым (см. фиг. 1).

Последовательность возрастающих радиусов $r_1, r_2\ldots r_n\ldots$ выберем, положив

$$r_n=\frac{\nu_n}{\cos\delta}\quad\text{и}\quad \nu_n=\frac{n}{2}+\frac{1}{4}.$$

Имеем

$$-\lim_{n\to\infty}J=\frac{1}{2\pi i}\lim_{n\to\infty}\left\{\int_{AMB}+\int_{BC}+\int_{CND}+\int_{DA}\right\}=\lim_{n\to\infty}(J_1+J_2+J_3+J_4).$$

Рассматривая пределы отдельных интегралов, найдем, что

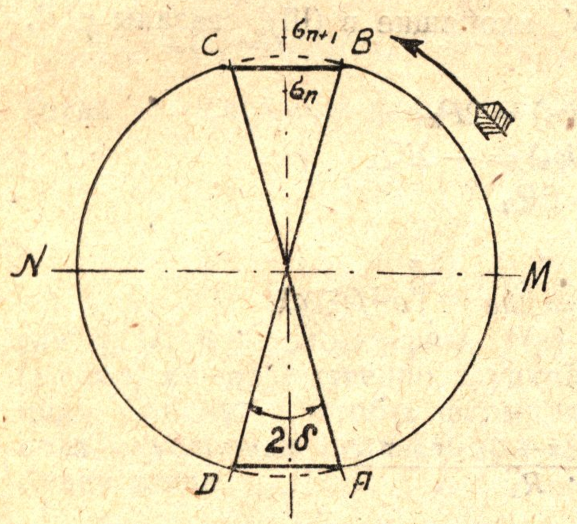
$$\lim_{n\to\infty} J_1 = 0 \quad \text{для} \quad -\pi \leqslant x < \pi$$

$$\lim_{n\to\infty} J_3 = 0 \quad \text{„} \quad -\pi < x \leqslant \pi$$

и что

$$\left.\begin{array}{l} |J_2| \leqslant k \operatorname{tg} \delta \\ |J_4| \leqslant k_1 \operatorname{tg} \delta \end{array}\right\} \text{при } -\pi \leqslant x \leqslant \pi$$

и, следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} J = 0$ для $-\pi < x < \pi$, так как угол δ можно выбрать произвольно малым.



Фиг. 1

Рассматривая $\lim J_1$ при $x = \pi$ и $\lim J_3$ при $x = -\pi$, найдем

$$\lim_{n\to\infty} J_1 = \frac{1}{2\pi}(\pi - 2\delta)$$

$$\lim_{n\to\infty} J_3 = -\frac{1}{2\pi}(\pi - 2\delta)$$

и, следовательно, окончательно будем иметь

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} E_{\sigma_k} \left\{ \frac{(H-\sigma)\, e^{\sigma x}}{\mu(\sigma)} \right\} = \\ = \begin{cases} \dfrac{1}{2} & \text{при} \quad x = -\pi \\ 0 & \text{„} \quad -\pi < x < \pi \\ -\dfrac{1}{2} & \text{„} \quad x = \pi \end{cases}$$

6

Прилагая полученное к (IV), получим

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{L(\sigma_k)\, e^{\sigma_k x} + L(-\sigma_k)\, e^{-\sigma_k x}}{\mu'(\sigma_k)} = \begin{cases} f(x) & \text{при} \quad -\pi < x < \pi \\ f(-\pi+0) & \text{„} \quad x = -\pi \\ f(\pi-0) & \text{„} \quad x = \pi \end{cases}$$

и, следовательно,

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{P_k \cos \rho_k x + Q_k \sin \rho_k x}{R_k}$$

$$(-\pi \leqslant x \leqslant \pi),$$

т. е. разложение (P) действительно выражает произвольную функцию ограниченной вариации в виде ряда по корням трансцендентного уравнения, причем формула (P) даст значения функции и для концов интервала.

7

Исследование добавочного разложения (V) за пределами основного интервала приводит к следующим результатам:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} E_{\sigma_k}\left\{\frac{(H-\sigma)\,e^{\sigma x}}{\mu(\sigma)}\right\} = \begin{cases} -\dfrac{1}{2} & \text{при } x=\pi \\ \dfrac{H+h}{H-h}e^{-h(x-\pi)} - \dfrac{2H}{H-h}e^{-H(x-\pi)} & \text{,,}\quad \pi < x < 3\pi \\ \dfrac{H+h}{H-h}e^{-2\pi h} - \dfrac{2H}{H-h}e^{-2\pi H} - \dfrac{1}{2} & \text{,,}\quad x=3\pi \\ \dfrac{1}{2} & \text{,,}\quad x=-\pi \\ e^{h(x+\pi)} & \text{,,}\quad -3\pi < x < \pi \\ e^{-2h\pi} + \dfrac{1}{2} & \text{,,}\quad x=-3\pi \end{cases}$$

Дальнейшее продолжение, как нетрудно видеть, приведет к вычислению вычетов относительно кратных полюсов.

Таким образом разложение (V) представляет собою функцию равную нулю внутри интервала $(-\pi, \pi)$, отличную вообще от нуля за пределами основного интервала и имеющую характер роста экспоненциальной функции.

Из полученного также следует, что теорема о единственности разложения (Heine—Cantor) в нашем случае не имеет места. Это обстоятельство для разложений, вытекающих из краевых задач, было впервые отмечено Léauté, однако им не было отмечено, что ряд, равный тождественно нулю внутри основного промежутка, может благодаря непериодичности определять вне основного промежутка функцию отличную от нуля.