

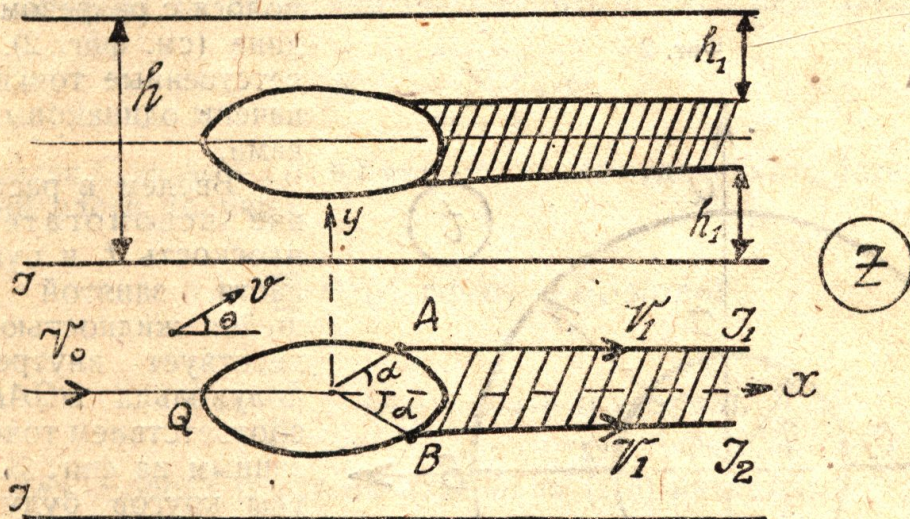
БЕЛЕНЬКИЙ И. М.

## К ТЕОРИИ СТРУЙНОГО ОБТЕКАНИЯ РЕШЕТЧАТОГО КРЫЛА С КРИВОЛИНЕЙНЫМ ПЕРОМ

### § 1

Пусть в плоскости комплексного переменного  $z = x + iy$  задана решетка, состоящая из симметричных, замкнутых, криволинейных контуров, без угловых точек.

Рассмотрим обтекание такого решетчатого крыла потоком идеальной и несжимаемой жидкости, с образованием струй по известной схеме Helmholtz—Kirchhoff'a; то есть будем предполагать, что поток,



Фиг. 1

срываясь, в некоторых точках  $A$  и  $B$  образует струи  $AI_1$  и  $BI_2$ , простирающиеся на бесконечность и скорость вдоль по которым есть величина постоянная, равная скорости на бесконечности за решеткой. Застойная область на фиг. 1 заштрихована.

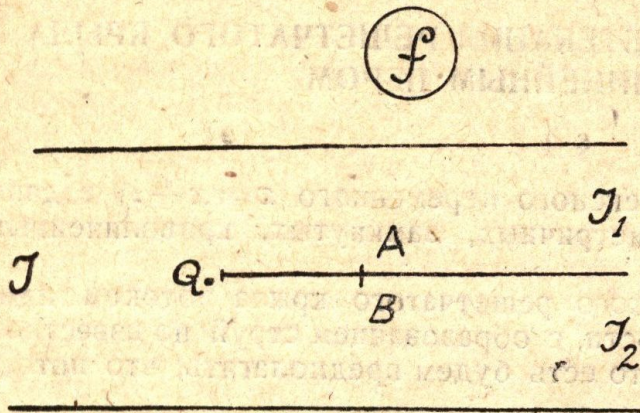
Скорость на бесконечности имеет заданную величину и направлена перпендикулярно к фронту решетки, т. е. вдоль по оси симметрии пера решетки. Ввиду стеснения потока решеткой, скорость на бесконечности перед решеткой будет отличаться от скорости на бесконечности за решеткой. Обозначим эти скорости соответственно через  $V_0$  и  $V_1$ . Очевидно, что  $V_1 > V_0$ . Требуется определить усилие, действующее со стороны жидкости на каждое перо решетки. В силу соображений симметрии можно сказать, что линия тока, проходящая через середину отрезка, соединяющего две соседние критические точки, скажем  $Q$  и  $Q_1$ , будет прямой линией. Так как линию тока можно заменить твердой стенкой, то поставленную выше задачу можно свести к такой: определить усилие, действующее со стороны идеальной и несжимаемой жидкости, на обтекаемый ею, с образованием струй по схеме Helmholtz—Kirchhoff'a, гладкий, без угловых точек, симметричный криволинейный контур, помещенный внутри бесконечно длинного прямолинейного канала и расположенного симметрично



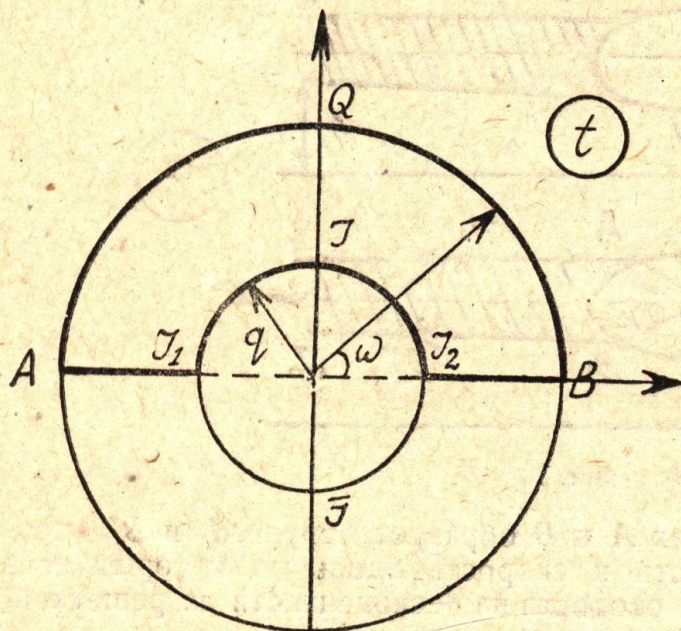
относительно его стенок. Очевидно, что ширина канала, которую мы обозначим через  $h$ , равна шагу решетки.

## § 2

Обозначим комплексный потенциал рассматриваемого течения через  $f(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y)$ . Не нарушая общности, можно положить, что в критической точке  $Q$   $f = 0$ . В рассматриваемом нами случае



Фиг. 2



Фиг. 3

лением оси  $x$ -ов. Рассмотрим функцию:

$$\Omega(t) = \lg \left( V_1 \cdot \frac{dz}{df} \right),$$

тогда на основании (2,1) напишем:

$$\Omega(t) = \tau + i\theta, \quad (2,2)$$

где для краткости положено  $\tau = \lg \frac{V_1}{V}$ .

$\Omega(t)$  внутри области течения, соответствующей внутренности полукольца, есть функция аналитическая, так как скорость там нигде в нуль не обращается. На границе же она имеет особенность в критической точке  $Q$ .

Так как вдоль линий  $AI_1$  и  $I_2B$ , соответствующих струям,  $\tau = 0$ , ввиду того, что вдоль этих линий  $V = V_1$ , то поэтому здесь  $\Omega(t)$

область, занятая движущейся жидкостью, ограничена двумя прямолинейными стенками  $J_1$  и  $J_2$ , дугой обтекаемого контура  $AQB$  и двумя свободными границами — струями  $AI_1$  и  $BI_2$ . Области, занятой потоком, будет соответствовать в плоскости комплексного потенциала  $f$  бесконечная полоса с разрезом посредине (см. фиг. 2). Соответственные точки обозначены одинаковыми буквами.

Введем в рассмотрение вспомогательную плоскость  $t$ , и пусть области, занятой движущейся жидкостью, соответствует внутренность полукольца  $BQAI_1I_2B$  с соответствием точек указанным на фиг. 3. Радиусы кругов будут 1 и  $q < 1$ .

Известно, что

$$\frac{dz}{df} = \frac{e^{i\theta}}{V}, \quad (2,1)$$

где  $V$  есть абсолютная величина скорости, а  $\theta$  — угол, образованный ею с положительным направлением



принимает чисто мнимые значения равные  $i\theta$  и, следовательно,  $\Omega(t)$  может быть аналитически продолжена через эти отрезки диаметра на нижнее полукольцо согласно формуле

$$\Omega(\bar{t}) = -\overline{\Omega(t)}.$$

Отсюда следует, что значения мнимой части  $\Omega(t)$ , т. е. значения  $\theta$  в сопряженных точках, будут одни и те же. Если положить  $t = re^{i\omega}$ , то

$$\theta(r, \omega) = \theta(r, -\omega). \quad (2,3)$$

Вдоль линий  $II_1$  и  $II_2$  плоскости  $z$ , т. е. вдоль полукруга  $I_1II_2$  плоскости  $t$ ,  $\theta(q, \omega) \equiv 0$ . В точках симметричных относительно действительной оси плоскости  $z$ , в частности в сопряженных точках, лежащих на обтекаемом контуре,  $\theta$  отличается знаком. Этим точкам в плоскости  $t$  будут соответствовать точки симметричные относительно мнимой оси, т. е. должно иметь место такое соотношение:

$$\theta(r, \omega) = -\theta(r, \pi - \omega). \quad (2,4)$$

Выше мы указали, что  $\Omega(t)$  есть функция аналитическая внутри кольца, поэтому мы ее можем представить в виде ряда Laurent'a:

$$\Omega(t) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} C_n \cdot t^n.$$

Полагая  $C_n = A_n + iB_n$  и  $t = r \cdot e^{i\omega}$ , после отделения действительной и мнимой части получим:

$$\tau = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} r^n \cdot (A_n \cos n\omega - B_n \cdot \sin n\omega)$$

$$\theta = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} r^n \cdot (A_n \cdot \sin n\omega + B_n \cdot \cos n\omega).$$

Отсюда без особого труда на основании (2,3) находим:

$$\theta(r, \omega) - \theta(r, -\omega) = 2 \cdot \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} A_n \cdot r^n \cdot \sin n\omega = 0$$

или так:

$$\sum_{n=1}^{n=+\infty} \left( A_n r^n - A_{-n} \cdot \frac{1}{r^n} \right) \cdot \sin n\omega = 0.$$

Рассматривая последнее выражение, как разложение нуля в тригонометрический ряд Fourier, мы приходим к выводу, что

$$A_n r^n - A_{-n} \cdot \frac{1}{r^n} = 0 \quad (n = 1, 2, \dots)$$

Припоминая, что это имеет место для множества значений  $r$  ( $q \leq r \leq 1$ ), находим:

$$A_n = A_{-n} = 0.$$

для любого индекса  $n$ . А потому

$$\left. \begin{aligned} \theta(r, \omega) &= \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} B_n \cdot r^n \cdot \cos n\omega \\ \tau(r, \omega) &= - \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} B_n r^n \cdot \sin n\omega \end{aligned} \right\} \quad (2,5)$$



Если мы определяем аналитическую функцию внутри кольца по значениям ее мнимой части на обоих кругах, то для однозначности необходимо выполнение условия:

$$\int_0^{2\pi} S_1(\omega) d\omega = \int_0^{2\pi} S_2(\omega) d\omega,$$

где  $S_1(\omega)$  и  $S_2(\omega)$  — значения мнимой части искомой функции на обоих кругах соответственно. В нашем случае  $S_1(\omega) = \Theta(1, \omega)$  и  $S_2(\omega) = \Theta(q, \omega) \equiv 0$ , поэтому должно иметь место следующее соотношение:

$$\int_0^{2\pi} \Theta(1, \omega) d\omega = 0.$$

А это на основании (2,5) дает

$$B_0 = 0.$$

Обращаясь к соотношению (2,4) и замечая, что  $\Theta(r, \omega)$  может быть представлена в такой форме:

$$\Theta(r, \omega) = \sum_{n=1}^{n=+\infty} \left( B_n r^n + B_{-n} \cdot \frac{1}{r^n} \right) \cdot \cos n\omega,$$

а также и то, что  $\Theta(q, \omega) \equiv 0$ , получим:

$$\Theta(r, \omega) + \Theta(r, \pi - \omega) = 2 \sum_{n=1}^{n=+\infty} \left( B_{2n} \cdot r^{2n} + B_{-2n} \cdot \frac{1}{r^{2n}} \right) \cos 2n\omega = 0$$

$$\Theta(q, \omega) = \sum_{n=1}^{n=+\infty} \left( B_n \cdot q^n + B_{-n} \cdot \frac{1}{q^n} \right) \cdot \cos n\omega = 0.$$

Это приводит к таким равенствам:

$$B_{2n} \cdot r^{2n} + B_{-2n} \cdot \frac{1}{r^{2n}} = 0$$

$$B_n \cdot q^n + B_{-n} \cdot \frac{1}{q^n} = 0.$$

Так как верхнее равенство имеет место при любом  $r$  ( $q \leq r \leq 1$ ), то отсюда легко получить

$$B_{2n} = B_{-2n} = 0.$$

В соответствии с этим второе равенство приводит:

$$B_{-(2n+1)} = -B_{2n+1} (q^2)^{2n+1}.$$

На основании всего этого окончательно можем записать:

$$\Theta(r, \omega) = \sum_{n=0}^{n=+\infty} B_{2n+1} \cdot q^{2n+1} \left[ \left( \frac{r}{q} \right)^{2n+1} - \left( \frac{q}{r} \right)^{2n+1} \right] \cdot \cos (2n+1) \omega. \quad (2,6)$$

$$\tau(r, \omega) = - \sum_{n=0}^{n=+\infty} B_{2n+1} \cdot q^{2n+1} \cdot \left[ \left( \frac{r}{q} \right)^{2n+1} + \left( \frac{q}{r} \right)^{2n+1} \right] \cdot \sin (2n+1) \omega. \quad (2,7)$$

Введя сокращенное обозначение

$$B_{2n+1} \cdot q^{2n+1} = C_{2n+1} \quad (2,8)$$



и снова полагая  $t = re^{i\omega}$ , из (2,2), (2,6) и (2,7) получим:

$$\Omega(t) = i \sum_{n=0}^{n=+\infty} C_{2n+1} \left[ \left(\frac{t}{q}\right)^{2n+1} - \left(\frac{q}{t}\right)^{2n+1} \right]. \quad (2,9)$$

Полагая в (2,6)  $r = 1$  и пользуясь обозначением (2,8), найдем граничные значения  $\Theta$  на большем круге:

$$\Theta(1, \omega) = \sum_{n=0}^{n=+\infty} C_{2n+1} \left[ \frac{1}{q^{2n+1}} - q^{2n+1} \right] \cos(2n+1)\omega. \quad (2,10)$$

В точке  $Q(r=1, \omega = \frac{\pi}{2})$   $\Theta$  терпит разрыв. В самом деле (см. фиг. 1)

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \Theta\left(1, \frac{\pi}{2} - \varepsilon\right) = -\frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \Theta\left(1, \frac{\pi}{2} + \varepsilon\right) = +\frac{\pi}{2}.$$

Значение  $\Theta$  в точке  $r=1, \omega = \frac{\pi}{2}$  мы будем принимать равным

$$\Theta\left(1, \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[ \Theta\left(1, \frac{\pi}{2} - \varepsilon\right) + \Theta\left(1, \frac{\pi}{2} + \varepsilon\right) \right] = 0,$$

этот результат непосредственно получается, если в формуле (2,10) положить  $\omega = \frac{\pi}{2}$ . Положение точек срыва струй определяется углом  $\alpha$ , т. е.

$$\Theta(1, 0) = \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$$

$$\Theta(1, \pi) = -\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right).$$

Следовательно из (2,10) вытекает следующее соотношение

$$\sum_{n=0}^{n=+\infty} C_{2n+1} \left[ \frac{1}{q^{2n+1}} - q^{2n+1} \right] = \frac{\pi}{2} - \alpha. \quad (2,11)$$

### § 3

Установим теперь связь между плоскостью комплексного потенциала  $f$  и вспомогательной плоскостью  $t$ .

Для этого, пользуясь формулой Schwarz-Christoffel'я, отобразим плоскость  $f$  (фиг. 2) на верхнюю полуплоскость  $\tau$  с соответствием точек указанным на фиг. 4.

Имеем, что:

$$\frac{df}{d\tau} = \mathfrak{A} \cdot \frac{\tau}{(\tau - \tau_1)(\tau - \tau_2)}.$$

Вследствие симметрии  $\tau_2 = -\tau_1$  и поэтому:

$$\frac{df}{d\tau} = \mathfrak{A} \cdot \frac{\tau}{\tau^2 - \tau_1^2}, \quad (3,1)$$

здесь  $\mathfrak{A}$  — некоторая постоянная.

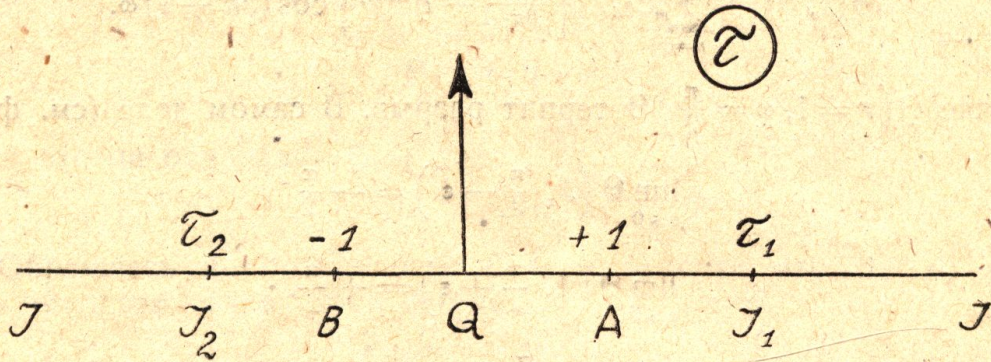
Преобразуем теперь верхнюю полуплоскость  $\tau$  на внутренность



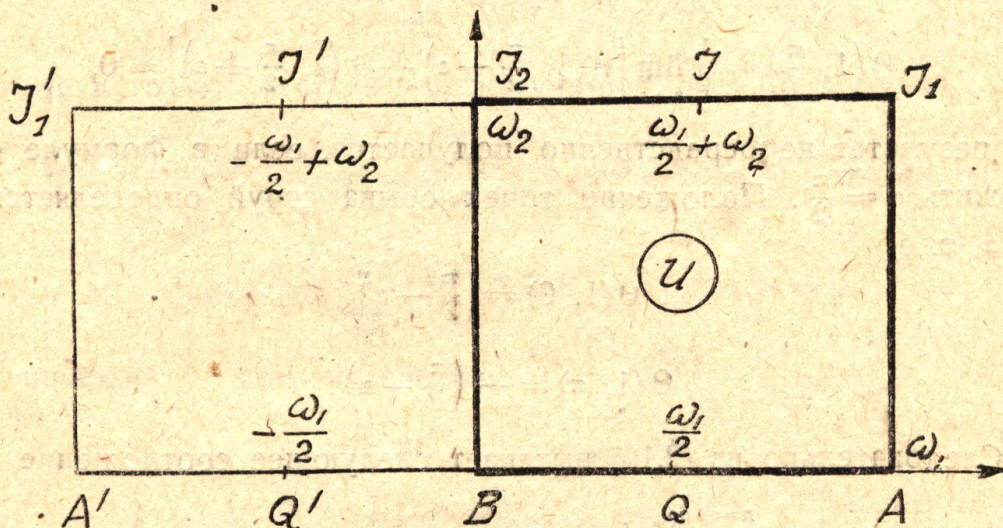
четыреугольника со сторонами  $\omega_1$  и  $-i\omega_2$  ( $\omega_2$  — чисто мнимое) плоскости  $u$  с соответствием точек указанным на фиг. 5. Преобразующая функция имеет вид <sup>1</sup>:

$$\tau = - \frac{\gamma(u) - \gamma\left(\frac{\omega_1}{2}\right)}{\gamma(u) - \gamma\left(\frac{\omega_1}{2} + \omega_2\right)}, \quad (3,2)$$

где  $\gamma(u)$  есть эллиптическая функция Weierstrass'a с периодами  $2\omega_1$  и  $2\omega_2$ .



Фиг. 4



Фиг. 5

Отобразим теперь далее внутренность четырехугольника плоскости  $u$  на внутренность полукольца плоскости  $t$ . Преобразующая функция напишется так:

$$u = - \frac{i\omega_1}{\pi} \cdot \lg t. \quad (3,3)$$

Так как при  $u = \omega_2$ ,  $t = q$  (см. фиг. 3 и 5), то поэтому из (3,3) следует:

$$q = e^{\pi i \frac{\omega_2}{\omega_1}}. \quad (3,4)$$

<sup>1</sup> Соответствие точек  $Q$  ( $u = \frac{\omega_1}{2}$ ),  $B$  ( $u = 0$ ) и  $I$  ( $u = \frac{\omega_1}{2} + \omega_2$ ) усматривается непосредственно из формулы (3,2). Для того чтобы убедиться в соответствии точек  $A$ ,  $I_1$  и  $I_2$ , достаточно воспользоваться хорошо известными формулами:

$$\gamma(x) - \gamma(y) = - \frac{\sigma(x+y)\sigma(x-y)}{\sigma^2(x)\sigma^2(y)}$$

$$\sigma(u + 2\omega_1) = -\sigma(u) e^{2\eta_1(u+\omega_1)} \quad \text{и} \quad \sigma(u + 2\omega_2) = -\sigma(u) e^{2\eta_2(u+\omega_2)}$$



В дальнейшем все вычисления будем производить в плоскости  $u$ .  
Пишем, что

$$\frac{dz}{du} = \frac{dz}{df} \cdot \frac{df}{d\tau} \cdot \frac{d\tau}{du}.$$

Определим входящие сюда величины в виде функций от  $u$ . Определяя  $t$  из (3,3), пишем, что

$$\Omega(t) = \Omega(e^{\frac{\pi i u}{\omega_1}}) = G(u), \quad (3,5)$$

где

$$G(u) = -2 \sum_{n=0}^{+\infty} C_{2n+1} \cdot \sin \left[ \frac{\pi}{\omega_1} (u - \omega_2) (2n + 1) \right], \quad (3,6)$$

в чем нетрудно убедиться, подставляя значения  $t$  и  $q$  по (3,3) и (3,4) в формулу (2,9). Так как

$$\frac{dz}{df} = \frac{1}{V_1} \cdot e^{\Omega(t)},$$

то рассматривая  $\frac{dz}{df}$  как функцию от  $u$ , будем иметь

$$\frac{dz}{df} = \frac{1}{V_1} \cdot e^{G(u)}. \quad (3,7)$$

При  $u = \omega_1 + \omega_2$   $\tau = \tau_1$ , а при  $u = \omega_2$   $\tau = \tau_2 = -\tau_1$ , а потому из (3,2) следует:

$$\tau - \tau_1 = \frac{[\gamma(u) - \gamma(\omega_1 + \omega_2)] \cdot \left[ \gamma\left(\frac{\omega_1}{2} + \omega_2\right) - \gamma\left(\frac{\omega_1}{2}\right) \right]}{\left[ \gamma(u) - \gamma\left(\frac{\omega_1}{2} + \omega_2\right) \right] \cdot \left[ \gamma(\omega_1 + \omega_2) - \gamma\left(\frac{\omega_1}{2} + \omega_2\right) \right]}$$

и

$$\tau + \tau_1 = \frac{[\gamma(u) - \gamma(\omega_2)] \cdot \left[ \gamma\left(\frac{\omega_1}{2} + \omega_2\right) - \gamma\left(\frac{\omega_1}{2}\right) \right]}{\left[ \gamma(u) - \gamma\left(\frac{\omega_1}{2} + \omega_2\right) \right] \cdot \left[ \gamma(\omega_2) - \gamma\left(\frac{\omega_1}{2} + \omega_2\right) \right]}.$$

Имея эти значения, легко получить выражение  $\frac{df}{dt}$  через переменную  $u$ , исходя из (3,1):

$$\frac{df}{d\tau} = \text{const} \cdot \frac{\left[ \gamma(u) - \gamma\left(\frac{\omega_1}{2}\right) \right] \cdot \left[ \gamma(u) - \gamma\left(\frac{\omega_1}{2} + \omega_2\right) \right]}{\left[ \gamma(u) - \gamma(\omega_1 + \omega_2) \right] \left[ \gamma(u) - \gamma(\omega_2) \right]}. \quad (3,8)$$

Дифференцируя (3,2), будем иметь:

$$\frac{d\tau}{du} = \frac{\left[ \gamma\left(\frac{\omega_1}{2} + \omega_2\right) - \gamma\left(\frac{\omega_1}{2}\right) \right] \cdot \gamma'(u)}{\left[ \gamma(u) - \gamma\left(\frac{\omega_1}{2} + \omega_2\right) \right]^2}. \quad (3,9)$$

Собирая (3,7), (3,8) и (3,9), найдем, что:

$$\frac{dz}{du} = M \cdot \Upsilon(u).$$

где  $M$  некоторая постоянная, а

$$\Upsilon(u) = e^{G(u)} \cdot \frac{\left[ \gamma(u) - \gamma\left(\frac{\omega_1}{2}\right) \right] \cdot \gamma'(u)}{\left[ \gamma(u) - \gamma(\omega_1 + \omega_2) \right] \left[ \gamma(u) - \gamma(\omega_2) \right] \left[ \gamma(u) - \gamma\left(\frac{\omega_1}{2} + \omega_2\right) \right]}. \quad (3,10)$$

Если обратиться к формуле (3,6), то из нее можно получить

$$G(u + 2\omega_1) = G(u), \quad (3,11)$$



а это дает:

$$\Upsilon(u + 2\omega_1) = \Upsilon(u). \quad (3,12)$$

Таким образом  $z$  как функция от  $u$  будет выражаться так:

$$z(u) = M \cdot \int \Upsilon(u) \cdot du + \text{const.} \quad (3,13)$$

Выражение  $\Upsilon(u)$  мы представим в несколько другой форме, воспользовавшись формулами<sup>1</sup>:

$$\Upsilon(x) - \Upsilon(y) = - \frac{\sigma(x+y)\sigma(x-y)}{\sigma^2(x) \cdot \sigma^2(y)}$$

и

$$\Upsilon'(x) = 2 \frac{\sigma(x+\omega_1)\sigma(x+\omega_2)\sigma(x-\omega_1-\omega_2)}{\sigma^3(x) \cdot \sigma(\omega_1) \cdot \sigma(\omega_2) \sigma(\omega_1+\omega_2)},$$

а также и такими

$$\sigma(u + \omega_1) = -\sigma(u - \omega_1) e^{2\eta_1 u}$$

$$\sigma(u + \omega_2) = -\sigma(u - \omega_2) \cdot e^{2\eta_2 u}.$$

После упрощения будем иметь:

$$\Upsilon(u) = \mathfrak{B} \cdot e^{G(u)} \cdot \frac{\sigma\left(u + \frac{\omega_1}{2}\right) \cdot \sigma\left(u - \frac{\omega_1}{2}\right) \cdot \sigma(u + \omega_1) \cdot \sigma(u)}{\sigma\left(u + \frac{\omega_1}{2} + \omega_2\right) \sigma\left(u - \frac{\omega_1}{2} - \omega_2\right) \cdot \sigma(u - \omega_2) \cdot \sigma(u + \omega_1 + \omega_2)}, \quad (3,14)$$

где постоянная  $\mathfrak{B}$  имеет значение:

$$\mathfrak{B} = 2 \frac{\sigma^2\left(\frac{\omega_1}{2} + \omega_2\right) \cdot \sigma^2(\omega_2) \cdot \sigma^2(\omega_1 + \omega_2)}{\sigma^2\left(\frac{\omega_1}{2}\right) \cdot \sigma(\omega_1) \cdot \sigma(\omega_2) \cdot \sigma(\omega_1 + \omega_2)} = - \frac{2}{1 - k'} \cdot e^{2\eta_2 \omega_2 + 2\eta_1 \omega_2}, \quad (3,15)$$

а  $k'$  — дополнительный модуль эллиптических функций. Обращаясь к формуле (3,14), мы видим, что  $\Upsilon(u)$  имеет в точке  $u = \omega_2$  полюс первого порядка, а потому в окрестности этой точки она может быть представлена так:

$$\Upsilon(u) = \frac{A}{u - \omega_2} + \Pi(u - \omega_2),$$

где  $A = \text{Res } \Upsilon(\omega_2)$ , а  $\Pi(u - \omega_2)$  — целая функция от  $(u - \omega_2)$ . Поэтому в окрестности  $u = \omega_2$   $z(u)$  будет иметь вид [см. (3,13)]

$$z(u) = M \cdot \left\{ A \lg(u - \omega_2) + \int \Pi(u - \omega_2) du \right\} + \text{const.}$$

При обходе точки  $I_2(u = \omega_2)$   $z(u)$  испытывает скачок равный  $ih_1$  (см. фиг. 1 и 5), а это дает

$$-ih_1 = M \cdot A \cdot \frac{\pi i}{2}.$$

Припоминая, что  $A$  есть вычет функции  $\Upsilon(u)$  в точке  $u = \omega_2$ , напомним:

$$M \cdot \text{Res } \Upsilon(\omega_2) = - \frac{2h_1}{\pi}, \quad (3, 16)$$

это нам понадобится в дальнейшем.

<sup>1</sup> См., напр., Е. Т. Уиттекер и Г. Н. Ватсон. Курс современного анализа. ч. II, стр. 284 и 292, изд. 1934 г.



Перейдем теперь к определению сил. Имеем, что

$$P_x = \int_{BQA} p \cdot \cos(n, x) ds + \int_{AB} p_0 \cdot \cos(n, x) ds$$

$$P_y = \int_{BQA} p \cdot \cos(n, y) ds + \int_{AB} p_0 \cdot \cos(n, y) ds,$$

где через  $P_x$  и  $P_y$  обозначены проекции полной силы, действующей со стороны жидкости на обтекаемый контур,  $p$  — давление в какой-либо точке на обтекаемом контуре,  $p_0$  — постоянное давление в застойной области (на фиг. 1 заштрихованная),  $ds$  — элемент дуги контура,  $n$  — направление внутренней нормали к контуру. Пользуясь теоремой Bernoulli:

$$p = p_0 + \frac{\rho}{2} (V_1^2 - V^2)$$

и замечая, что

$$\cos(n, x) ds = dy \quad \text{и} \quad \cos(n, y) ds = -dx,$$

а также

$$\oint p_0 dx = 0 \quad \text{и} \quad \oint p_0 dy = 0,$$

без труда получим:

$$P_x = \frac{\rho}{2} \int_{BQA} (V_1^2 - V^2) \cdot dy$$

$$P_y = -\frac{\rho}{2} \int_{BQA} (V_1^2 - V^2) \cdot dx.$$

Умножая первое на  $i$  и вычитая из него второе, составим комплексное выражение для силы:

$$-P_y + iP_x = \frac{\rho}{2} \int_{BQA} (V_1^2 - V^2) (dx + i dy).$$

Введем в рассмотрение функцию

$$\zeta = V_1 \cdot \frac{dz}{df} = \frac{V_1}{V} \cdot e^{i\theta} \quad (4, 1)$$

и, замечая, что  $dx + i dy = dz$ , а

$$\frac{V^2}{V_1^2} = \frac{1}{\zeta \cdot \bar{\zeta}},$$

будем иметь

$$P_x + iP_y = \frac{\rho V_1^2}{2i} \int_{BQA} \left(1 - \frac{1}{\zeta \cdot \bar{\zeta}}\right) \cdot dz =$$

$$= \frac{\rho V_1^2}{2i} \int_{BQA} \left(1 - \frac{1}{\zeta \cdot \bar{\zeta}}\right) \frac{dz}{df} \cdot df = \frac{\rho V_1}{2i} \int_{BQA} \left(\zeta - \frac{1}{\bar{\zeta}}\right) \cdot df.$$

Заметим, что вдоль отрезков диаметра  $Al_1$  и  $l_2B$  плоскости  $t$ , соответствующих струям, модуль  $\zeta$  равен единице, так как вдоль струй  $V = V_1$ . Ввиду этого  $\zeta(t)$  можно аналитически продолжить через эти отрезки диаметра на нижнее полукольцо, согласно формуле

$$\zeta(\bar{t}) = \frac{1}{\zeta(t)}. \quad (4, 2)$$



Пользуясь этим, будем иметь:

$$P_x + iP_y = \frac{\rho V_1}{2i} \oint_{BQA\bar{Q}B} \zeta(t) \cdot df$$

или, на основании (4, 1) и (2, 2), так:

$$P_x + iP_y = \frac{\rho V_1}{2i} \oint_{BQA\bar{Q}B} e^{\varrho(t)} \cdot \frac{df}{dt} \cdot dt. \quad (4, 3)$$

Вычислим теперь силу, действующую на обе стенки канала,

$$Q_x = \int_{II_1} p \cdot \cos(n, x) ds + \int_{II_2} p \cdot \cos(n, x) ds$$

$$Q_y = \int_{II_1} p \cdot \cos(n, y) ds + \int_{II_2} p \cdot \cos(n, y) ds.$$

Вдоль стенок канала  $ds = dx$ ,  $\cos(n, x) = 0$  и

$$\begin{aligned} \cos(n, y) &= +1 && \text{на } II_1 \\ \cos(n, y) &= -1 && \text{на } II_2 \end{aligned}$$

поэтому:

$$Q_x = 0$$

$$Q_y = \int_{II_1} p \cdot dx - \int_{II_2} p \cdot dx = - \int_{I, II_1} p \cdot dx.$$

Пользуясь снова теоремой Bernoulli, формулами (4, 1) и (4, 2) и замечая, что  $dx = dz$ , найдем:

$$Q_y = - \frac{\rho V_1}{2} \int_{I, II_2} \left( \zeta - \frac{1}{\zeta} \right) \cdot df$$

или еще и так:

$$Q_y = - \frac{\rho V_1}{2} \oint_{I, II_2, \bar{I}I_1} e^{\varrho(t)} \cdot \frac{df}{dt} \cdot dt. \quad (4, 4)$$

Заметим, что  $Q_y$ , подсчитанное для обеих стенок канала, будет нулем. Это следует из соображений симметрии, а также может быть непосредственно усмотрено и из формулы

$$Q_y = - \int_{I, II_2} p \cdot dx = - \int_{I, I} p \cdot dx + \int_{I, I} p \cdot dx = 0.$$

Исходя из сказанного, можно написать такое равенство:

$$0 = \frac{\rho V_1}{2i} \oint_{I, II_2, \bar{I}I_1} e^{\varrho(t)} \cdot \frac{df}{dt} \cdot dt. \quad (4, 5)$$

Из совокупности формул (4, 3) и (4, 5) следует:

$$P_x + iP_y = \frac{\rho V_1}{2i} \oint_K e^{\varrho(t)} \cdot \frac{df}{dt} \cdot dt, \quad (4, 6)$$

где через  $K$  обозначен контур кольца в плоскости  $t$ . Переходя от плоскости  $t$  к плоскости  $u$  и пользуясь обозначениями (3, 5), (3, 7), (3, 10) и (3, 13) получим:

$$P_x + iP_y = \frac{M\rho V_1^2}{2i} \int_{K_1} \Upsilon(u) du.$$



В плоскости  $t$  интегрирование производится по контуру кольца  $BQA\bar{Q}B + I_1II_2\bar{I}_1$ . В плоскости  $u$  ему будет соответствовать контур  $K_1$ , состоящий из двух прямых  $A'Q'BQA$  и  $I_1II_2I'I_1'$  (см. фиг. 5), т. е.

$$P_x + iP_y = \frac{M\rho V_1^2}{2i} \left\{ \int_{A'Q'BQA} \Upsilon(u) du + \int_{I_1II_2I'I_1'} \Upsilon(u) du \right\}.$$

Пользуясь соотношением (3, 12), имеем такое равенство

$$\int_{AI_1} \Upsilon(u) du + \int_{I_1'A'} \Upsilon(u) du = 0.$$

Это дает возможность привести подсчет  $P_x + iP_y$  к вычислению интеграла по замкнутому контуру четырехугольника  $A'BAI_1I_2I_1'A'$  (см. фиг. 5):

$$P_x + iP_y = \frac{M\rho V_1^2}{2i} \oint \Upsilon(u) du.$$

Если обратиться к (3, 14), то мы видим, что  $\Upsilon(u)$  имеет полюсы на контуре интегрирования в точках  $(\omega_2 + \frac{\omega_1}{2})$ ,  $\omega_2$ ,  $(\omega_2 - \frac{\omega_1}{2})$ ,  $(\omega_1 + \omega_2)$  и  $(-\omega_1 + \omega_2)$ . В критической точке потока  $Q(u = \frac{\omega_1}{2})$   $G(u)$  должно обращаться в бесконечность. Однако этот полюс компенсируется нулем от  $\sigma(u - \frac{\omega_1}{2})$ , стоящего в числителе.

Таким образом на основании теоремы Cauchy о значении интеграла по замкнутому контуру можем написать, что

$$P_x + iP_y = \frac{M\rho V_1^2}{2i} \cdot 2\pi i \cdot \left\{ \frac{1}{4} \operatorname{Res} \Upsilon(\omega_1 + \omega_2) + \frac{1}{2} \operatorname{Res} \Upsilon\left(\omega_2 + \frac{\omega_1}{2}\right) + \frac{1}{2} \operatorname{Res} \Upsilon(\omega_2) + \frac{1}{2} \operatorname{Res} \Upsilon\left(\omega_2 - \frac{\omega_1}{2}\right) + \frac{1}{4} \operatorname{Res} \Upsilon(-\omega_1 + \omega_2) \right\}.$$

Последнее на основании (3, 12) может быть упрощено и приведено к виду:

$$P_x + iP_y = \frac{\pi M\rho V_1^2}{2} \cdot \left\{ \operatorname{Res} \Upsilon(\omega_1 + \omega_2) + \operatorname{Res} \Upsilon\left(\omega_2 + \frac{\omega_1}{2}\right) + \operatorname{Res} \Upsilon(\omega_2) + \operatorname{Res} \Upsilon\left(\omega_2 - \frac{\omega_1}{2}\right) \right\}. \quad (4, 7)$$

Для вычетов получаем следующие значения:

$$\begin{aligned} \operatorname{Res} \Upsilon(\omega_2) &= \mathfrak{B} \cdot N \cdot e^{G(\omega_2)} \\ \operatorname{Res} \Upsilon\left(\omega_2 + \frac{\omega_1}{2}\right) &= -\mathfrak{B} \cdot N \cdot e^{G\left(\omega_2 + \frac{\omega_1}{2}\right)} \\ \operatorname{Res} \Upsilon(\omega_1 + \omega_2) &= \mathfrak{B} \cdot N \cdot e^{G(\omega_1 + \omega_2)} \\ \operatorname{Res} \Upsilon\left(\omega_2 - \frac{\omega_1}{2}\right) &= -\mathfrak{B} \cdot N \cdot e^{G\left(\omega_2 - \frac{\omega_1}{2}\right)} \end{aligned}$$

где для краткости положено

$$N = -\frac{1}{1-k'} \cdot e^{-2\tau_2\omega_2 - 2\tau_2\omega_1}. \quad (4, 8)$$

Из формулы (3, 6) следует, что

$$G(\omega_2) = G(\omega_1 + \omega_2) = 0$$



и далее

$$G\left(\omega_2 + \frac{\omega_1}{2}\right) = -2 \sum_{n=0}^{n=+\infty} (-1)^n \cdot C_{2n+1}$$

$$G\left(\omega_2 - \frac{\omega_1}{2}\right) = 2 \cdot \sum_{n=0}^{n=+\infty} (-1)^n \cdot C_{2n+1},$$

т. е.

$$G\left(\omega_2 + \frac{\omega_1}{2}\right) = -G\left(\omega_2 - \frac{\omega_1}{2}\right).$$

Пользуясь этим, а также значением  $\mathfrak{B}$  по (3, 15) и хорошо известным соотношением

$$\eta_1 \omega_2 - \eta_2 \omega_1 = \frac{\pi i}{2},$$

получим для вычетов такие значения:

$$\text{Res } \Upsilon(\omega_2) = -\frac{2}{(1-k')^2}$$

$$\text{Res } \Upsilon\left(\omega_2 + \frac{\omega_1}{2}\right) = \frac{2}{(1-k')^2} \cdot e^{G\left(\omega_2 + \frac{\omega_1}{2}\right)}$$

$$\text{Res } \Upsilon(\omega_1 + \omega_2) = -\frac{2}{(1-k')^2}$$

$$\text{Res } \Upsilon\left(\omega_2 - \frac{\omega_1}{2}\right) = \frac{2}{(1-k')^2} \cdot e^{G\left(\omega_2 - \frac{\omega_1}{2}\right)}.$$

Подставляя эти значения в выражение (4, 8), будем иметь:

$$P_x + iP_y = \frac{\pi \rho M \cdot V_1^2}{(1-k')^2} \cdot \left\{ e^{G\left(\omega_2 + \frac{\omega_1}{2}\right)} - 2 + e^{-G\left(\omega_2 + \frac{\omega_1}{2}\right)} \right\}.$$

В бесконечно удаленной точке  $I \frac{dz}{df} = \frac{1}{V_0}$  в плоскости четырехугольника ей будет соответствовать точка  $u = \frac{\omega_1}{2} + \omega_2$ , а потому из (3, 7) вытекает, что:

$$e^{G\left(\omega_2 + \frac{\omega_1}{2}\right)} = \frac{V_1}{V_0}. \quad (4, 9)$$

Далее из (3, 16) по подстановке туда значений  $\text{Res } \Upsilon(\omega_2)$  находим такое соотношение:

$$\frac{\pi M}{(1-k')^2} = h_1. \quad (4, 10)$$

Если обратиться к фиг. 1, то легко усмотреть следующее соотношение, вытекающее из условия неразрывности потока:

$$hV_0 = 2h_1V_1. \quad (4, 11)$$

Если теперь воспользоваться (4, 9), (4, 10) и (4, 11), то мы получим окончательно выражение для силы:

$$\left. \begin{aligned} P_y &= 0 \\ P_x &= \frac{\rho h}{2} (V_1 - V_0)^2 \end{aligned} \right\} \quad (4, 12)$$

Первого равенства, т. е. обращения  $P_y$  в нуль, следовало ожидать ввиду полной симметрии потока относительно оси  $x$ -ов. Если раз-



ность ( $V_1 - V_0$ ) обозначить через  $V^*$  и назвать ее приобретенной скоростью, то

$$P_x = \frac{\rho h}{2} V^{*2} \quad (4, 13)$$

и окончательный результат можем сформулировать так:

Усилие, действующее со стороны жидкости на обтекаемый ею, по схеме Helmholtz—Kirchoff'a, гладкий симметричный криволинейный контур, помещенный внутри бесконечно длинного прямолинейного канала и расположенного симметрично относительно его стенок, направлено параллельно стенкам канала и имеет величину равную половине произведения плотности жидкости на ширину канала и умноженной на квадрат приобретенной скорости.

Для решетки полученный результат формулируется так: при струйном обтекании решетки, состоящей из криволинейных гладких симметричных контуров, как указано на фиг. 1, усилие, действующее на каждое перо, равно половине произведения плотности жидкости на шаг решетки и умноженной на квадрат приобретенной скорости, где последнее представляет приращение скорости на бесконечности за и перед решеткой.

Примечание: Когда настоящая работа была сделана, я узнал о решении аналогичной задачи Чизоти (см. U. Cisotti, Rendiconti del circolo di Palermo, 1909, а также U. Cisotti, Idromeccanica Piana, т. II, 1921), где окончательный результат для сопротивления представлен в таком виде:

$$P_x = \frac{\Delta^2}{2h},$$

здесь  $\Delta$  — ширина застойной области на бесконечности,  
 $h$  — ширина канала.

Легко можно видеть, что из этого выражения можно получить формулу (4, 12) и наоборот, если воспользоваться соотношением:

$$(h - \Delta) v_1 = h \cdot v_0,$$

вытекающим из непрерывности потока, и положить далее, как это делает Чизоти, что  $\rho = 1$  и  $V_1 = 1$ .

Результат Чизоти получен, исходя из теоремы о количестве движения.

Несмотря на это, мне кажется, что настоящая статья представляет некоторый интерес, так как, кроме формулы для сопротивления, которая здесь получена иным путем, она содержит также построение характеристической функции потока, чего нет у Чизоти.

