УДК 539.3
А.Г Николаев, Ю.А. Щербакова

Обоснование метода Фурье в осесимметричных задачах теории упругости для трансверсально-изотропных тел, ограниченных поверхностью параболоида

Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского «ХАИ»

Впервые в общей осесимметричной постановке рассматривается и решается проблема обоснования метода Фурье в пространственных краевых задачах теории упругости для трансверсально-изотропного параболоида вращения и трансверсально-изотропного пространства с параболоидальной полостью. Вводится понятие базисности частных решений системы уравнений равновесия трансверсально-изотропных канонических тел. Для указанных выше краевых задач доказаны теоремы о базисности построенных ранее частных решений.
Ключевые слова: метод Фурье, уравнения равновесия трансверсально-изотропной среды, базисность, частные решения для параболоида, краевая задача, теория упругости, канонические тела

1. Анализ исследований и публикаций

Точные решения основных пространственных краевых задач теории упругости в канонических односвязных областях были получены в последние десятилетия с помощью метода Фурье. В задачах для трансверсально-изотропных тел метод развивался и использовался в работах [1 - 10]. Впервые точные решения указанных выше задач применительно к трансверсально-изотропному параболоиду были получены Ю.Н. Подильчуком и представлены в статье [7]. В работе [11] были построены принципиально иные решения уравнений равновесия трансверсально-изотропных тел для параболоида вращения, необходимые для реализации обобщенного метода Фурье и наиболее приемлемые с точки зрения решения проблемы обоснования.

Впервые вопросы обоснования метода Фурье в общей постановке для канонических односвязных изотропных тел были поставлены и решены в работах [12 - 14]. Заметим, что в отечественной и зарубежной научной литературе практически отсутствуют работы, посвященные обоснованию метода Фурье для канонических односвязных трансверсально-изотропных тел. Некоторые частные аспекты обоснования для ряда канонических тел рассмотрены в работах [14 - 18].

В настоящей статье впервые в общей осесимметричной постановке рассматривается и решается проблема обоснования метода Фурье для трансверсально-изотропного параболоида вращения и трансверсально-изотропного пространства с параболоидальной полостью.

Полученные результаты не только важны для подтверждения достоверности решений краевых задач для односвязных тел, но и могут существенно использоваться для обоснования и оценки точности решений в задачах для многосвязных тел.

2. Постановка проблемы

Рассмотрим пространственные области $\Omega_9^{\pm}$, которые в некоторой декартовой прямоугольной системе координат (ρ, φ, z) задаются неравенствами

$\Omega_9^{\pm} = \left\{(\rho, \varphi, z) : z \gtrless c_1\rho^2 - c_2\right\}$. Будем считать, что области $\Omega_9^{\pm}$ заполнены трансверсально-изотропным материалом с упругими постоянными C_{ij}, ось анизотропии которого совпадает с осью OZ декартовой системы координат.

Рассмотрим осесимметричные первые краевые задачи для системы уравнений равновесия трансверсально-изотропной упругой среды в областях $\Omega_9^{\pm}$

$$\left[C_{11}\left(\Delta_2 - \frac{1}{\rho^2}\right) + C_{44}\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right]u_\rho + (C_{13} + C_{44})\frac{\partial^2 u_z}{\partial\rho\partial z} = 0, \qquad (1)$$

$$\left(C_{44}\Delta_2 + C_{33}\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)u_z + (C_{13} + C_{44})\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial u_\rho}{\partial z}\right) = 0 \qquad (2)$$

в случае, когда на границе $\partial\Omega_9^{\pm}$ этих областей заданы общие осесимметричные условия вида

$$\mathbf{U}\big|_{\Omega_9^{\pm}} = \int_0^\infty \left[B^{(1)}(\lambda)J_1(\lambda\alpha)\mathbf{e}_\rho + B(\lambda)J_0(\lambda\alpha)\mathbf{e}_z\right]d\lambda, \qquad (3)$$

где $J_m(x)$ – функции Бесселя первого рода; α – некоторый параметр, который будет описан ниже; $\mathbf{e}_\rho, \mathbf{e_z}$ - орты цилиндрической системы координат (ρ, z, φ), которая непосредственно связана с декартовой системой; $B^{(1)}(\lambda), B(\lambda)$ - заданные плотности. Будем считать, что интеграл в (3) сходится абсолютно и равномерно по λ.

Введем две параболоидальные системы координат $(\alpha_j, \beta_j, \varphi)$ $(\alpha_j, \beta_j \ge 0)$ $(j = 1,2)$, координаты которых связаны с соответствующими цилиндрическими координатами формулами

$$\begin{cases} z_j = \dfrac{a_j}{2}(\alpha_j^2 - \beta_j^2), \\ \rho_j = a_j\alpha_j\beta_j, \end{cases} \qquad \begin{cases} z = \sqrt{\nu_j}\left(z_j + \gamma_j\right), \\ \rho = \rho_j, \end{cases}$$

где ν_j – разные положительные корни уравнения

$$C_{44}C_{11}\nu^2 + (C_{13}^2 + 2C_{13}C_{44} - C_{11}C_{33})\nu + C_{33}C_{44} = 0,$$

$a_j > 0$ – параметры параболоидальных систем координат; постоянная γ_j выбирается из условия равенства $\beta_j = \beta_{j0}$ на поверхности $\partial\Omega_9^{\pm}$. При этом $a_j\beta_{j0}^2 = \dfrac{\sqrt{\nu_j}}{2c_1}$, $\gamma_j = \dfrac{\sqrt{\nu_j}}{4c_1} - \dfrac{c_2}{\sqrt{\nu_j}}$, а на поверхности $\partial\Omega_9^{\pm}$ выполняются равенства $\sqrt{\nu_j}a_j\alpha_j^{\,2} = 2c_1\rho^2$. Выбирая параметры a_j так, что $\sqrt{\nu_j}a_j = \omega$, получаем, что $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$ на указанной поверхности.

В работе [11] были построены частные решения системы уравнений равновесия (1), (2) в областях $\Omega_9^{\pm}$ при общих граничных условиях. В частном случае осесимметричных решений из них получаем

$$\mathbf{U}_{j,\lambda}^{\pm(9)}(\alpha_j,\beta_j) = a_j\frac{\partial}{\lambda\partial\lambda}\nabla_j u_\lambda^{\pm(9)}(\alpha_j,\beta_j), \tag{4}$$

где

$$\nabla_j = \mathbf{e}_\rho\frac{\partial}{\partial\rho} + \mathbf{e}_z\frac{k_j}{\sqrt{\nu_j}}\frac{\partial}{\partial z_j},\; k_j = \frac{C_{11}\nu_j - C_{44}}{C_{13}+C_{44}};$$

$$u_{j,\lambda}^{\pm(9)}(\alpha_j,\beta_j) = \left\{\begin{matrix} K_0(\lambda\beta_j) \\ I_0(\lambda\beta_j)\end{matrix}\right\} J_0(\lambda\alpha_j) \quad (\lambda\in R_+);$$

$K_m(x)$ – функция Макдональда; $I_m(x)$ – модифицированная функции Бесселя первого рода.

Координатная форма записи перемещений (4) имеет вид

$$\mathbf{U}_{j,\lambda}^{\pm(9)}(\alpha_j,\beta_j) = \pm u_{\lambda,1}^{\pm(9)}(\alpha_j,\beta_j)\,\mathbf{e}_\rho - \frac{k_j}{\sqrt{\nu_j}}u_\lambda^{\pm(9)}(\alpha_j,\beta_j)\,\mathbf{e}_z, \tag{5}$$

$$(j=1,2),$$

где

$$u_{\lambda,1}^{\pm(9)}(\alpha_j,\beta_j) = \left\{\begin{matrix} K_1(\lambda\beta_j) \\ I_1(\lambda\beta_j)\end{matrix}\right\} J_1(\lambda\alpha_j).$$

Далее для краткости будут использованы обозначения $\lambda\beta_{j0} = q_j$.

В работе [11] было введено понятие базисности системы решений уравнений Ламе в пространственных канонических областях. По аналогии с этим понятием введем следующее определение.

Определение 1. Системы вектор-функции $\left\{\mathbf{U}_{j,\lambda}^{\pm(9)}(\alpha_j,\beta_j)\right\}_{j=1,\lambda\in R_+}^{2}$ будем называть базисными осесимметричными системами решений уравнений равновесия (1), (2) в областях $\Omega_9^{\pm}$, если:

1) вектор-функций $\mathbf{U}_{j,\lambda}^{\pm(9)}(\alpha_j,\beta_j)$ при $j=1,2;\ \lambda\in R_+$ являются регулярными линейно независимыми решениями системы уравнений (1), (2) в областях $\Omega_9^{\pm}$;

2) существует набор функций $\left\{A_j(\lambda)\right\}_{j=1,\lambda\in R_+}^{2}$ такой, что функция $\mathbf{U}=\sum_{j=1}^{2}\int_0^{\infty}A_j(\lambda)\mathbf{U}_{j,\lambda}^{\pm(9)}(\alpha_j,\beta_j)d\lambda$ удовлетворяет условиям:

а) $\mathbf{U}\in C^2\left(\Omega_9^{\pm}\right)\cap C\left(\overline{\Omega_9^{\pm}}\right)$,

б) $\mathbf{U}\big|_{\beta_j=\beta_{j0}}=\int_0^{\infty}\left[B^{(1)}(\lambda)J_1(\lambda\alpha)\mathbf{e}_\rho+B(\lambda)J_0(\lambda\alpha)\mathbf{e}_z\right]d\lambda$.

В следующем разделе будет доказана базисность в осесимметричной постановке системы вектор-функций $\left\{\mathbf{U}_{j,\lambda}^{\pm(9)}(\alpha_j,\beta_j)\right\}_{j=1,\lambda\in R_+}^{2}$ в областях $\Omega_9^{\pm}$.

3. Основные результаты

Авторами доказаны следующие теоремы.

Теорема 1. При условии $\nu_1\neq\nu_2$ вектор-функции $\left\{\mathbf{U}_{j,\lambda}^{+(9)}(\alpha_j,\beta_j)\right\}_{j=1,\lambda\in\mathbf{R}_+}^{2}$ являются базисными осесимметричными решениями системы уравнений равновесия (1), (2) в области Ω_9^{+}.

Доказательство. Рассмотрим определитель

$$\Delta_\lambda^{+(1)9}=\begin{vmatrix}K_1(q_1) & -\frac{k_1}{\sqrt{\nu_1}}K_0(q_1)\\ K_1(q_2) & -\frac{k_2}{\sqrt{\nu_2}}K_0(q_2)\end{vmatrix}. \tag{6}$$

Раскрыв определитель и подставив вместо k_j выражение через ν_j, получим

$$\Delta_\lambda^{+(1)9}=K_1(q_1)K_1(q_2)\left[\frac{C_{11}}{C_{13}+C_{44}}\left(\sqrt{\nu_1}\frac{K_0(q_1)}{K_1(q_1)}-\sqrt{\nu_2}\frac{K_0(q_2)}{K_1(q_2)}\right)-\right.$$
$$\left.-\frac{C_{44}}{C_{13}+C_{44}}\left(\frac{1}{\sqrt{\nu_1}}\frac{K_0(q_1)}{K_1(q_1)}-\frac{1}{\sqrt{\nu_2}}\frac{K_0(q_2)}{K_1(q_2)}\right)\right]. \tag{7}$$

Оценим производную $\frac{d\tau}{d\nu}$ функции $\tau(\nu)=\sqrt{\nu}\frac{K_0(q)}{K_1(q)}$. Учитывая, что $\frac{dq}{d\nu}=\frac{q}{4\nu}$, можно записать

$$\frac{d\tau}{d\nu}=\frac{[K_1(q)]^{-2}}{4\sqrt{\nu}}\left\{2K_0(q)K_1(q)-q[K_1(q)]^2-qK_0(q)K_1'(q)\right\}.$$

Исключим $K_1'(q)$ из полученного равенства, используя рекуррентные соотношения для функций Макдональда. В результате

$$\frac{d\tau}{d\nu}=\frac{[K_1(q)]^{-2}}{4\sqrt{\nu}}\left\{q\left[K_0(q)K_2(q)-(K_1(q))^2\right]+K_0(q)K_1(q)\right\}. \qquad (8)$$

Выражение в квадратных скобках может быть представлено интегралом

$$K_0(q)K_2(q)-(K_1(q))^2=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-q(chu+chv)}\left[(chu-chv)^2+sh^2u+sh^2v\right]dudv. \qquad (9)$$

Из интегрального представления (9) и выражения (8) следует, что

$$\frac{d\tau}{d\nu}>\frac{K_0(q)}{4\sqrt{\nu}K_1(q)} \qquad (10)$$

при $\nu\in\mathbf{R}_+$. Таким образом, функция $\tau(\nu)$ монотонно возрастает при $\nu\in\mathbf{R}_+$.

Аналогично, для функции $\sigma(\nu)=\frac{1}{\sqrt{\nu}}\frac{K_0(q)}{K_1(q)}$ можно записать

$$\frac{d\sigma}{d\nu}=\frac{[K_1(q)]^{-2}}{4\nu^{3/2}}\left\{-2K_0(q)K_1(q)-q[K_1(q)]^2-qK_0(q)K_1'(q)\right\}=$$

$$=\frac{[K_1(q)]^{-2}}{4\nu^{3/2}}\left\{-q\left[(K_1(q))^2-(K_0(q))^2\right]-K_0(q)K_1(q)\right\}.$$

Так как $K_1(q)>K_0(q)$, то из последнего равенства следует $\frac{d\sigma}{d\nu}<-\frac{K_0(q)}{4\nu^{3/2}K_1(q)}$ при $\nu\in\mathbf{R}_+$, т.е. функция $\sigma(\nu)$ монотонно убывает при $\nu\in\mathbf{R}_+$.

Монотонность функций $\tau(\nu)$ и $\sigma(\nu)$ позволяет получить следующую оценку определителя $\Delta_\lambda^{+(1)9}$:

$$\Delta_\lambda^{+(1)9}>K_1(q_1)K_1(q_2)\frac{C_{11}}{C_{13}+C_{44}}\left|\sqrt{\nu_1}\frac{K_0(q_1)}{K_1(q_1)}-\sqrt{\nu_2}\frac{K_0(q_2)}{K_1(q_2)}\right|\geq$$

$$\geq K_1(q_1)K_1(q_2)\frac{C_{11}}{C_{13}+C_{44}}\min_\nu\left(\frac{d\tau}{d\nu}\right)|\nu_1-\nu_2|.$$

Используя оценку, полученную в [14], можно записать

$$\Delta_{\lambda}^{+(1)9} > K_1(q_1)K_1(q_2)\frac{C_{11}}{C_{13}+C_{44}}\min_{\nu}\left\{\frac{q}{4\sqrt{\nu}\,(q+3)}\right\}\left|\nu_1-\nu_2\right| =$$

$$= \frac{C_{11}\,\gamma(\lambda)}{C_{13}+C_{44}}K_1(q_1)K_1(q_2)\left|\nu_1-\nu_2\right|, \qquad (11)$$

где

$$\gamma(\lambda) = \frac{1}{4}\frac{\lambda}{\sqrt{\nu_{max}}\lambda + 3\sqrt{2c_1\omega}}.$$

Оценка (11) показывает, что определитель $\Delta_{\lambda}^{+(1)9} \neq 0$ при $\nu \in \mathbf{R}_+$, т.е. для вектор-функций $\left\{\mathbf{U}_{j,\lambda}^{+(9)}\left(\alpha_j,\beta_j\right)\right\}_{j=1,\lambda\in\mathbf{R}_+}^{2}$ выполняется условие 1 определения базисности системы функций.

Теперь запишем общее решение краевой задачи для системы дифференциальных уравнений (1), (2) в области Ω_9^+ с граничным условием (3) в виде

$$\mathbf{U} = \sum_{j=1}^{2}\int_0^{\infty} A_j(\lambda)\mathbf{U}_{j,\lambda}^{\pm(9)}\left(\alpha_j,\beta_j\right)d\lambda. \qquad (12)$$

Удовлетворяя условию (3), относительно неизвестных плотностей $A_j(\lambda)$ получаем линейную алгебраическую систему

$$A_1(\lambda)K_1(q_1) + A_2(\lambda)K_1(q_2) = B^{(1)}(\lambda), \qquad (13)$$

$$-\frac{k_1}{\sqrt{\nu_1}}A_1(\lambda)K_0(q_1) - \frac{k_2}{\sqrt{\nu_2}}A_2(\lambda)K_0(q_2) = B(\lambda), \qquad (14)$$

определитель которой совпадает с $\Delta_{\lambda}^{+(1)9}$.

Решение системы имеет вид

$$A_1(\lambda) = -\left(\Delta_{\lambda}^{+(1)9}\right)^{-1}\left[\frac{k_2}{\sqrt{\nu_2}}B^{(1)}(\lambda)K_0(q_2) + B(\lambda)K_1(q_2)\right], \qquad (15)$$

$$A_2(\lambda) = \left(\Delta_{\lambda}^{+(1)9}\right)^{-1}\left[\frac{k_1}{\sqrt{\nu_1}}B^{(1)}(\lambda)K_0(q_1) + B(\lambda)K_1(q_1)\right]. \qquad (16)$$

Подставив (15), (16) в формулу (12), получим

$$\mathbf{U} = \int_0^{\infty}\left(\Delta_{\lambda}^{+(1)9}\right)^{-1}\left\{-\left[\frac{k_2}{\sqrt{\nu_2}}B^{(1)}(\lambda)K_0(q_2) + B(\lambda)K_1(q_2)\right]\cdot\right.$$

$$\cdot\left[K_1(\lambda\beta_1)\,J_1(\lambda\alpha_1)\boldsymbol{e}_\rho-\frac{k_1}{\sqrt{\nu_1}}K_0(\lambda\beta_1)\,J_0(\lambda\alpha_1)\,\boldsymbol{e}_z\right]+$$

$$+\left[\frac{k_1}{\sqrt{\nu_1}}B^{(1)}(\lambda)K_0(q_1)+B(\lambda)K_1(q_1)\right]\times$$

$$\times\left[K_1(\lambda\beta_2)\,J_1(\lambda\alpha_2)\boldsymbol{e}_\rho-\frac{k_2}{\sqrt{\nu_2}}K_0(\lambda\beta_2)\,J_0(\lambda\alpha_2)\,\boldsymbol{e}_z\right]d\lambda. \tag{17}$$

Используя формулу (11) и оценку

$$\frac{K_0(\lambda z)}{\lambda K_1(\lambda z)}<\sqrt{\frac{\pi z}{2\lambda}},$$

каждую компоненту подынтегральной функции (17) можно оценить так:

$$\left(c_1+\frac{c_2}{\lambda}\right)\left\{\left[\left|B^{(1)}(\lambda)\right|\frac{k_2}{\sqrt{\nu_2}}\frac{K_0(q_2)}{K_1(q_1)}+\left|B(\lambda)\right|\right]\left[\frac{K_1(\lambda\beta_1)}{K_1(q_1)}\left|J_1(\lambda\alpha_1)\right|+\right.\right.$$

$$\left.+\frac{k_1}{\sqrt{\nu_1}}\frac{K_0(\lambda\beta_1)}{K_0(q_1)}\frac{K_0(q_1)}{K_1(q_1)}\left|J_0(\lambda\alpha_1)\right|\right],\left[\left|B(\lambda)\right|+\left|B^{(1)}(\lambda)\right|\frac{k_1}{\sqrt{\nu_1}}\frac{K_0(q_1)}{K_1(q_1)}\right]\times$$

$$\left.\times\left[\frac{K_1(\lambda\beta_2)}{K_1(q_2)}\left|J_1(\lambda\alpha_2)\right|+\frac{k_2}{\sqrt{\nu_2}}\frac{K_0(\lambda\beta_2)}{K_0(q_2)}\frac{K_0(q_2)}{K_1(q_2)}\left|J_0(\lambda\alpha_1)\right|\right]\right\}\le$$

$$\le\left(c_1+\frac{c_2}{\lambda}\right)\left\{\left[\left|B^{(1)}(\lambda)\right|\frac{k_2}{\sqrt{\nu_2}}\sqrt{\frac{\pi\lambda\beta_{20}}{2}}+\left|B(\lambda)\right|\right]\left[\frac{K_1(\lambda\beta_1)}{K_1(\lambda\beta_{10})}\left|J_1(\lambda\alpha_1)\right|+\right.\right.$$

$$\left.+\frac{k_1}{\sqrt{\nu_1}}\frac{K_0(\lambda\beta_1)}{K_0(\lambda\beta_{10})}\sqrt{\frac{\pi\lambda\beta_{10}}{2}}\left|J_0(\lambda\alpha_1)\right|\right],\left[\left|B(\lambda)\right|+\left|B^{(1)}(\lambda)\right|\frac{k_1}{\sqrt{\nu_1}}\sqrt{\frac{\pi\lambda\beta_{10}}{2}}\right]\times$$

$$\left.\times\left[\frac{K_1(\lambda\beta_2)}{K_1(\lambda\beta_{20})}\left|J_1(\lambda\alpha_2)\right|+\frac{k_2}{\sqrt{\nu_2}}\frac{K_0(\lambda\beta_2)}{K_0(\lambda\beta_{20})}\sqrt{\frac{\pi\lambda\beta_{20}}{2}}\left|J_0(\lambda\alpha_1)\right|\right]\right\}.$$

Из асимптотических формул для функций Макдональда при $\lambda\to\infty$ следует, что вектор-функция $\mathbf{U}$ дважды непрерывно дифференцируема в области Ω_9^{+}, т.е. $\mathbf{U}\in C^2\left(\Omega_9^{\pm}\right)\bigcap C\left(\overline{\Omega_9^{\pm}}\right)$. Таким образом, теорема доказана.

Теорема 3. При условии $\nu_1\ne\nu_2$ вектор-функции $\left\{\mathbf{U}_{j,\lambda}^{-(9)}\left(\alpha_j,\beta_j\right)\right\}_{j=1,\lambda\in\mathbf{R}_+}^{2}$ являются базисными осесимметричными решениями системы уравнений равновесия (1), (2) в области $\Omega_{\overline{9}}^{-}$.

Доказательство. Рассмотрим определитель

$$\Delta_{\lambda}^{+(1)9} = \begin{vmatrix} I_1(q_1) & \dfrac{k_1}{\sqrt{\nu_1}} I_0(q_1) \\ I_1(q_2) & \dfrac{k_2}{\sqrt{\nu_2}} I_0(q_2) \end{vmatrix}. \qquad (18)$$

Раскрыв определитель и подставив вместо k_j выражение через ν_j, получим

$$\Delta_{\lambda}^{-(1)9} = I_1(q_1) I_1(q_2) \left[\frac{C_{11}}{C_{13}+C_{44}} \left(\sqrt{\nu_2} \frac{I_0(q_2)}{I_1(q_2)} - \sqrt{\nu_1} \frac{I_0(q_1)}{I_1(q_1)} \right) - \right.$$

$$\left. - \frac{C_{44}}{C_{13}+C_{44}} \left(\frac{1}{\sqrt{\nu_2}} \frac{I_0(q_2)}{I_1(q_2)} - \frac{1}{\sqrt{\nu_1}} \frac{I_0(q_1)}{I_1(q_1)} \right) \right]. \qquad (19)$$

Вычислим производную $\dfrac{d\tau}{d\nu}$ функции $\tau(\nu) = \sqrt{\nu} \dfrac{I_0(q)}{I_1(q)}$:

$$\frac{d\tau}{d\nu} = \frac{[I_1(q)]^{-2}}{4\sqrt{\nu}} \left\{ 2I_0(q) I_1(q) + q[I_1(q)]^2 - q I_0(q) I_1'(q) \right\}.$$

Используя рекуррентные соотношения для модифицированных функций Бесселя и их производных, можно записать

$$\frac{d\tau}{d\nu} = \frac{[I_1(q)]^{-2}}{4\sqrt{\nu}} \left\{ q\left[(I_1(q))^2 - I_0(q) I_2(q) \right] + I_0(q) I_1(q) \right\}.$$

Используя оценку [14]

$$(I_1(q))^2 - I_0(q) I_2(q) \geq 0,$$

из предыдущего выражения получим

$$\frac{d\tau}{d\nu} > \frac{I_0(q)}{4\sqrt{\nu}\, I_1(q)}. \qquad (20)$$

Таким образом, доказано, что функция $\tau(\nu)$ монотонно возрастает при $\nu \in \mathbf{R}_+$.

Аналогично изучим функцию $\sigma(\nu) = \dfrac{1}{\sqrt{\nu}} \dfrac{I_0(q)}{I_1(q)}$. Дифференцируя по ν, находим

$$\frac{d\sigma}{d\nu} = \frac{[I_1(q)]^{-2}}{4\nu^{3/2}} \left\{ -2I_0(q) I_1(q) + q[I_1(q)]^2 - q I_0(q) I_1'(q) \right\} =$$

$$= \frac{[I_1(q)]^{-2}}{4\nu^{3/2}} \left\{ q\left[I_1^{\,2}(q) - I_0^{\,2}(q) \right] - I_0(q) I_1(q) \right\}.$$

Так как $I_0(q) > I_1(q)$, то справедлива оценка

$$\frac{d\sigma}{d\nu} < -\frac{I_0(q)}{4\nu^{3/2}\, I_1(q)}, \tag{21}$$

которая показывает монотонное убывание функции $\sigma(\nu)$ при $\nu \in \mathbf{R}_+$. Учитывая (20) и (21), из формулы (19) получаем

$$\left| \Delta_{\lambda}^{-(1)9} \right| > I_1(q_1) I_1(q_2) \frac{C_{11}}{C_{13} + C_{44}} \min_{\nu} \left\{ \frac{I_0(q)}{4\sqrt{\nu}\, I_1(q)} \right\} \left| \nu_1 - \nu_2 \right|.$$

Можно показать справедливость следующей оценки для модифицированных функций Бесселя:

$$\frac{I_0(q)}{I_1(q)} > 1 + \frac{1}{2q}, \quad q > 0.$$

Из нее следует, что

$$\Delta_{\lambda}^{-(1)9} > \frac{C_{11} \tilde{\gamma}(\lambda)}{C_{13} + C_{44}} I_1(q_1) I_1(q_2) \left| \nu_1 - \nu_2 \right|, \tag{22}$$

где

$$\tilde{\gamma}(\lambda) = \frac{1}{4\sqrt{\nu_{max}}} \left(1 + \frac{1}{\lambda} \sqrt{\frac{c_1 \omega}{2\nu_{max}}} \right).$$

Оценка (22) показывает, что определитель $\Delta_{\lambda}^{-(1)9} \neq 0$ при $\nu \in \mathbf{R}_+$.

Остальная часть доказательства теоремы аналогична приведенным выше рассуждениям в теореме 3.

4. Выводы

1. Впервые в общей осесимметричной постановке рассматривается и решается проблема обоснования метода Фурье в пространственных краевых задачах теории упругости для трансверсально-изотропного параболоида вращения и трансверсально-изотропного пространства с параболоидальной полостью.

2. По аналогии с результатом работы [11] вводится понятие базисности частных решений системы уравнений равновесия трансверсально-изотропных канонических тел в рассматриваемых областях.

3. Для построенных ранее частных решений основных осесимметричных краевых задач для трансверсально-изотропного параболоида и трансверсально-изотропного пространства с параболоидальной полостью доказаны теоремы об их базисности.

Список литературы

1. Zureick A.H. The asymmetric displacement of a rigid spheroidal inclusion embedded in transversely isotropic medium / A.H. Zureick // Acta. mech. – 1989/ V. 77, N 1-2. – P. 101 - 110.
2. Zhong Z. Analysis of a transversely isotropic rod containing a single cylindrical inclusion with axisymmetric eigenstrains / Z. Zhong // Int. Journal of Solids and Structures. – 2002. - V. 39, Issue 23. – P. 5753 - 5765.
3. Wang X., Thermal stress-focusing in a transversely isotropic sphere and an isotropic sphere / X. Wang, C. Wang , G. Lu , B. M. Zhou // Journal Of Thermal Stresses. – 2002. – V. 25, №1. P. 31 – 44.
4. Toshiaki H. Thermal stress-focusing effect in a transversely isotropic spherical inclusion embedded in an isotropic infinite elastic medium / H. Toshiaki // Journal Of Thermal Stresses. - 2002. – V.25, №7. – P. 691 - 702.
5. Подильчук Ю.Н. Пространственные задачи теории упругости и пластичности. / Ю.Н. Подильчук. – К.: Наук. думка, 1984. – Т. 1: Граничные задачи статики упругих тел – 304 с.
6. Подильчук Ю.Н. Термоупругая деформация трансверсально-изотропного вытянутого сфероида / Ю.Н. Подильчук // Прикл. механика. – 1987. – Т. 23, № 12. – С. 25 - 34.
7. Подильчук Ю.Н. Упругая деформация трансверсально изотропного параболоида вращения / Ю.Н. Подильчук // Прикл. механика. – 1989. – Т.25, №2. – С. 12 - 19.
8. Подильчук Ю.Н. Точные аналитические решения пространственных граничных задач статики трансверсально-изотропного тела канонической формы (обзор) / Ю.Н. Подильчук// Прикл. механика. – 1997.- Т.33, №10.- С.3 - 30.
9. Подильчук Ю. Н. Точные аналитические решения трехмерных статических задач термоупругости трансверсально изотропного тела в криволинейной системе координат / Ю.Н. Подильчук // Прикл. механика. – 2001. – Т. 37, № 6.– С.72 – 78.
10. Теоремы сложения перемещений трансверсально изотропных канонических тел / А.Г. Николаев. – ХАИ. – Х., 1996. – 52 с. – Деп. в ГНТБ Украины 10.07.96, №1568 – Ук 96.
11. Николаев А.Г. Обоснование метода Фурье в основных краевых задачах теории упругости для некоторых пространственных канонических областей / А.Г. Николаев // Доп. НАН України. –1998, №2. – С. 78 – 83.
12. Николаев А.Г. Обоснование метода Фурье в пространственных задачах теории упругости для канонических односвязных областей / А.Г. Николаев // Современные проблемы концентрации напряжений: тр. Междунар. науч. конф. – Донецк, 1998. – С. 199 - 203.
13. Николаев А.Г. Круговой штамп на трансверсально-изотропном полупространстве со сфероидальной полостью при наличии сцепления / А.Г. Николаев // Прикл. механика. - 1994. – Т. 30, № 8.- С. 48 - 53.
14. Трансверсально-изотропное полупространство с полостью под действием частично сцепленного штампа / А.Г. Николаев. ХАИ. – Х., 1993 – 17 с. – Деп. в

ГНТБ Украины 21.06.93, №1177 – Ук 93.
15. Николаев А.Г. Круговая трещина в трансверсально-изотропном сфероиде под действием нормальной нагрузки / А.Г. Николаев, Ю.А. Щербакова // Теоретическая и прикладная механика. – 2003. – Вып. 38. – С. 9 - 14.
16. Ніколаєв О.Г. Аналіз напружено-деформівного стану трансфер сально-ізотоп-ного сфероїда зі сфероїдальною порожниною / О.Г. Ніколаєв, Ю.А. Щербакова // Вісник Львів. ун-ту. Сер. Прикладна математика та інформатика. – 2007. – Вип. 12. – С. 176 – 181.
17. Николаев А.Г. Обобщенный метод Фурье в пространственных задачах теории упругости для канонических многосвязных тел.: дис. … д-ра физ.-мат. наук: 01.02.04; защищена 13.07.97; утв. 20.09.97 / Николаев Алексей Георгиевич. – Х., 1997. – 331 с.
18. Николаев А.Г. Аппарат и приложения обобщенного метода Фурье для трансверсально-изотропных тел, ограниченных плоскостью и параболоидом вращения / А.Г. Николаев, Ю.А. Щербакова // Мат. методи та фіз.-мех. поля. 2009. – № 3. - С. 160-169.

Рецензент: д.ф.-м. н., проф. В.С. Проценко,
Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского «ХАИ», Харьков

Поступила в редакцию 15.12.10

Обґрунтування методу Фур'є в осесиметричних задачах теорії пружності для трансверсально-ізотропних тіл, які обмежені поверхнею параболоїда

Уперше в загальній осесиметричній постановці розглядається і вирішується проблема обґрунтування методу Фур'є в просторових крайових задачах теорії пружності для трансверсально-ізотропного параболоїда обертання і трансверсально-ізотропного простору з параболоїдальною порожниною.

Ключові слова: метод Фур'є, рівняння рівноваги трансверсально-ізотропне середовище, базисність, частинні розв’язки для параболоїда, крайова задача, теорія пружності, канонічні тіла

Justification of Fourier's method in axially symmetric elasticity problems for transversely isotropic bodies with paraboloidal surface

For the first time in a general axisymmetric formulation is considered and solved the problem of justification of Fourier's method in three-dimensional boundary value problems of elasticity for transversely isotropic paraboloid and a transversely isotropic space with a paraboloidal cavity.

***Keywords**:* Fourier's method, equilibrium equations of a transversely isotropic medium basis property, partial solutions for the paraboloid, boundary problem, elasticity theory, the canonical body