

## Построение и исследование аналитико-численного решения задачи об изгибе жёстко защемлённой прямоугольной пластины

*Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского «ХАИ»*

В высоких приближениях получено решение «жёсткой» краевой задачи для бигармонического оператора в прямоугольной области с однородными граничными условиями, поставленными относительно искомой функции и её производной по нормали к границе. На основании проведенного численного анализа и сопоставления результатов, полученных методом Бубнова – Галёркина с помощью различных систем координатных функций, сделан вывод о качестве их аппроксимирующих свойств. Особое внимание уделено сравнению точности, сходимости и устойчивости как самих аналитико-численных решений, так и процесса их получения. Подробное обсуждение численных результатов сопровождается представлением их в виде таблиц и графиков.

**Ключевые слова:** жёсткое защемление, бигармонический оператор, краевая задача, аналитико-численное решение, прогиб, изгибающий момент, точность, сходимость.

### Введение

Как отмечает академик Александр Андреевич Самарский во введении к монографии [1], «без сомнения, вопрос точности является основным вопросом, как для теории, так и для практики приближённых методов вообще». До настоящего времени точное решение задачи об изгибе прямоугольной пластинки, защемлённой по всем сторонам, не получено. Точное решение плоской задачи теории упругости в прямоугольнике с произвольным нагружением по границе также отсутствует. Существует множество прямых методов, которые дают возможность получать приближённые решения поставленной задачи. Тогда возникает вопрос о точности и сходимости получаемых решений.

Неоднородная краевая задача изгиба прямоугольной пластики при произвольной системе заданных по границе функций прогибов и углов поворота в силу своей линейности редуцируется к неоднородной краевой задаче [2] (защемлённая пластина при однородных краевых условиях с произвольным нагружением в области). Точно так же производится редуцирование плоской задачи теории упругости [3]. Такая редукция обоснована теоремой о продолжении функции с границы в область [4]. Метод расширения области до канонической [5, 6, 7] позволяет распространить аналитико-численные решения для прямоугольника на разнообразные плоские области с липшецевой границей. Бигармонический оператор является старшим в теории пластин и оболочек, поэтому анализ краевых задач, его содержащих, является актуальной проблемой при исследовании напряжённо-деформированного состояния, устойчивости и колебаний разветвлённых тонкостенных пространственных систем, какими являются несущие конструкции летательных аппаратов. При подобном анализе широкое применение получил, разрабатываемый в Национальном аэрокосмическом университете им. Н.Е. Жуковского «ХАИ» метод идентификации краевых условий [8, 9, 10, 11, 12, 13] в сочетании с методом сопряжения конструктивных элементов [7, 9, 14, 15, 16], методом расширения области до канонической и методом наименьших квадратов по границе.

Решению одной из простейшей, на первый взгляд, задачи об изгибе прямоугольной пластинки, защемлённой по всем сторонам, посвящена данная работа.

### Постановка и пути решения основной задачи для бигармонического оператора в прямоугольнике при однородных краевых условиях

Рассматривается краевая задача в прямоугольной области  $\Omega = \{(x, y) : -1 < x < 1; -1 < y < 1\}$ , описываемая дифференциальным уравнением

$$Aw = \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\lambda^2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \lambda^4 \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{qa^4}{D} \quad (1)$$

при однородных краевых условиях

$$w = \frac{\partial w}{\partial n} = 0 \quad \text{на } \Gamma \quad (2)$$

где  $w(x, y)$  – функция прогиба пластины;  $n$  – нормаль к границе  $\Gamma$ ;  $\lambda = a/b$ ;  $2a, 2b$  – размеры пластины в плане;  $q(x, y)$  – функция давления из класса  $L_2(\Omega)$ ;

$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$  – цилиндрическая жёсткость пластины постоянной толщины  $h$ ;  $E$ ,

$\nu$  – модуль упругости и коэффициент Пуассона материала пластины соответственно.

Наряду с полуоднородной краевой задачей (1), (2) рассматривают следующую полуоднородную краевую задачу

$$Aw = 0 \quad \text{в } \Omega, \quad (3)$$

$$w = f(s), \frac{\partial w}{\partial n} = \varphi(s) \quad \text{на } \Gamma \quad (4)$$

где  $f(s)$  и  $\varphi(s)$  – функции из определённого класса, такого, что краевая задача (3), (4) имеет единственное решение,  $s$  – дуговая координата точки границы  $\Gamma$ .

В силу линейности оператора  $A$  и граничных условий (2), (4) обозначенные краевые задачи с учётом формы границы  $\Gamma$  редуцируются одна в другую. Это означает, что на основе теорем вложения, продолжения и теоремы о следах [4], решая одну из этих краевых задач, мы тем самым решаем одновременно и другую. В данной работе решается краевая задача (1), (2), что не умоляет общности подхода к решению краевых задач для оператора  $A$  при произвольных граничных условиях (2), (4) и при произвольных функциях  $q(x, y)$ ,  $f(s)$ ,  $\varphi(s)$  из соответствующих классов.

Для получения приближённого решения краевой задачи (1), (2) существуют различные подходы и методы. Среди них следует отметить наиболее распространённые:

- численные методы (конечного элемента, конечных разностей, метод полос, метод прямых и прочие);
- аналитико-численные (вариационные, Бубнова-Галёркина, Власова-Канторовича, сведения к бесконечным системам линейных алгебраических уравнений и т.д.).

В данной работе обсуждаются два метода: Бубнова-Галёркина и метод сведения к бесконечным системам линейных алгебраических уравнений. Поскольку оператор краевой задачи (1), (2) является положительно определённым, то вариационный метод Ритца и метод Бубнова-Галёркина приводят к одним и тем же

системам линейных алгебраических уравнений, т.е. они равноценны. Краевые условия (2), являясь главными, должны быть выполнены заранее как в методе Ритца, так и в методе Бубнова-Галёркина.

### **Сведение решения краевой задачи к бесконечным системам линейных алгебраических уравнений**

Здесь, прежде всего, следует отметить подход С.П. Тимошенко [17], который свёл задачу об изгибе жёстко защемлённой пластины к задаче об изгибе свободно опёртой пластины, нагруженной по контуру неизвестными изгибающими моментами. Параметры этих неизвестных изгибающих моментов определяются из условия равенства нулю по границе углов поворота. Такой подход приводит к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений. Однако регулярность полученной бесконечной системы линейных алгебраических уравнений не доказана, хотя в работе [17] приведена достаточно подробная таблица распределения прогибов и изгибающих моментов. Как указывается в работе [17] эта таблица была составлена Ивэнсом<sup>1)</sup> в 1939 г. в отсутствие надёжных вычислительных средств. В дальнейшем сравнение наших результатов с результатами Ивэнса будет продемонстрировано.

Среди многочисленных работ, относящихся к этому направлению, необходимо упомянуть о работе [18]. В этой работе авторы предлагают искать решение рассматриваемой краевой задачи (1), (2) в виде комбинации тригонометрических рядов, помноженных на степенные функции от переменных  $x$  и  $y$ , что, в конечном счёте, приводит также к бесконечным системам линейных алгебраических уравнений. Здесь, также как и в работе [17], не доказана регулярность этой бесконечной системы. Более того, полнота предложенной системы функций также не доказана и сомнительна, так как в решении приводятся комбинации многочленов, одинарных тригонометрических рядов, одинарных тригонометрических рядов помноженных на степени независимых переменных и двойных тригонометрических рядов, которые не являются линейно независимыми. Так же авторы этой работы не заметили, что присутствующие в уравнениях бесконечные ряды допускают суммирование, что нами было исправлено. Последнее позволяет существенно упростить как составление бесконечной системы линейных алгебраических уравнений, так и его решение методом «урезания». В дальнейшем сравнение наших результатов с результатами работы [18] будет представлено в виде таблиц и графиков.

Обратимся к решению краевой задачи (3), (4). Решение уравнения (3) есть бигармоническая функция. Таких функций бесконечное множество, например, бигармонические многочлены [19], гипербола-тригонометрические функции [20] и т.д., обладающие свойством полноты в том или ином смысле. Выполнение условий (4) приводит к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений, которая получается методом наименьших квадратов по границе [20] в метрике пространства С.Л. Соболева  $W_2^{(1)}(\Gamma)$ . Конечно же, исследуемое состояние описывается приближённо. Степень этой приближённости трудно оценить как теоретически, так и практически.

Отметим, что регулярность полученных бесконечных систем линейных алгебраических уравнений требует отдельного доказательства в каждом конкретном

1) Evans T.H., J. Appl. Mech., т. 6, стр. А-7, 1939.

случае [21]. Это обстоятельство, конечно же, ограничивает пределы применимости такого подхода.

### Прямые методы решения поставленной краевой задачи

В качестве системных координатных функций применяются:

I – функции  $H_m(x)H_n(y)$ , предложенные и исследованные С.А. Халиловым [22];

II – функции, предложенные в работе [23] В.Б. Минтюком;

III – фундаментальные балочные функции А.Н. Крылова [24];

IV – косинус-биномы Филоненко-Бородича [20];

V – функции, предложенные в работе В.М. Даревского и И.Л. Шарина [18].

Кроме того все решения, полученные по указанным системам функций, в дальнейшем сравниваются с решением Ивэнса, приведенным в виде таблицы в работе [17], и с решениями, полученными по методу конечного элемента с использованием четырёхугольного несовместного конечного элемента с тремя неизвестными в каждом узле: прогиба и двух углов поворота.

Идеальным вариантом координатных функций является такой, который приводит к диагональной или ленточной матрице системы линейных алгебраических уравнений. При этом для координатных функций ортогональных или почти ортогональных в энергетическом пространстве  $H_A$  положительно определённого оператора  $A$  гарантируется сходимость приближённых решений к точному, а так же устойчивость их получения. Однако стремление невязки в уравнении (1) к нулю в открытой области  $\Omega$  не гарантируется, хотя граничные условия выполнены точно. Связи с этим приобретает большое значение практическая оценка невязки полученных решений, составленных по базисам I – V.

Отметим, что все используемые ниже координатные функции (кроме функций [23]) приводят к полностью заполненной матрице системы линейных алгебраических уравнений, а матрица [23] получается ленточной с шириной ленты, равной одиннадцати. В этом отношении последние функции имеют некоторое преимущество перед остальными.

Устойчивость вычислительных процедур зависит от качества разрешающих матриц. Необходимым и достаточным условием устойчивости процесса вычислений является ограниченность числа обусловленности матрицы Грама. Поэтому на практике особый интерес представляет оценка  $\kappa$ -числа обусловленности матриц Грама (отношение наибольшего собственного значения к наименьшему) в зависимости от порядка матриц. Результаты вычислений, с использованием базисов I – V, приведены в табл. 1 и показаны в виде графиков на рис. 1.

Из данных табл. 1 следует, что лучшую обусловленность матрицы Грама доставляют фундаментальные балочные функции. Однако это обстоятельство не даёт гарантий точности получаемых приближённых решений и наибольшей скорости их сходимости. Более того процесс вычисления по этим функциям не устойчив, т.к. в нём фигурируют малые разницы больших чисел. Что же касается функций Даревского-Шарина, то такая плохая обусловленность матрицы Грама ещё раз подтверждает не минимальность системы этих функций. Для наглядности данные табл. 1 проиллюстрированы на рис. 1.

Таблица 1

## Числа обусловленности матриц Грама

Порядок матрицы	I	II	III	IV	Порядок матрицы	V
1	1	1	1	1	2	26,04
4	1,1640	2,6858	1,2607	3,3176	4	241,19
9	1,7975	7,1360	1,3376	5,0103	6	1049,72
16	3,1323	16,5101	1,3832	6,8690	8	1763,53
25	5,5769	33,1752	1,4146	8,7378	10	5107,18
36	9,6236	59,9787	1,4376	10,5786	12	14392,89
49	15,9186	100,2411	1,4546	12,3913	14	23220,54
64	25,2503	157,7501	1,4671	14,1821	16	62945,81
81	38,5471	236,7598	1,4758	15,9562	18	73410,01
100	56,8775	341,9912	1,4799	17,7179	20	77805,37

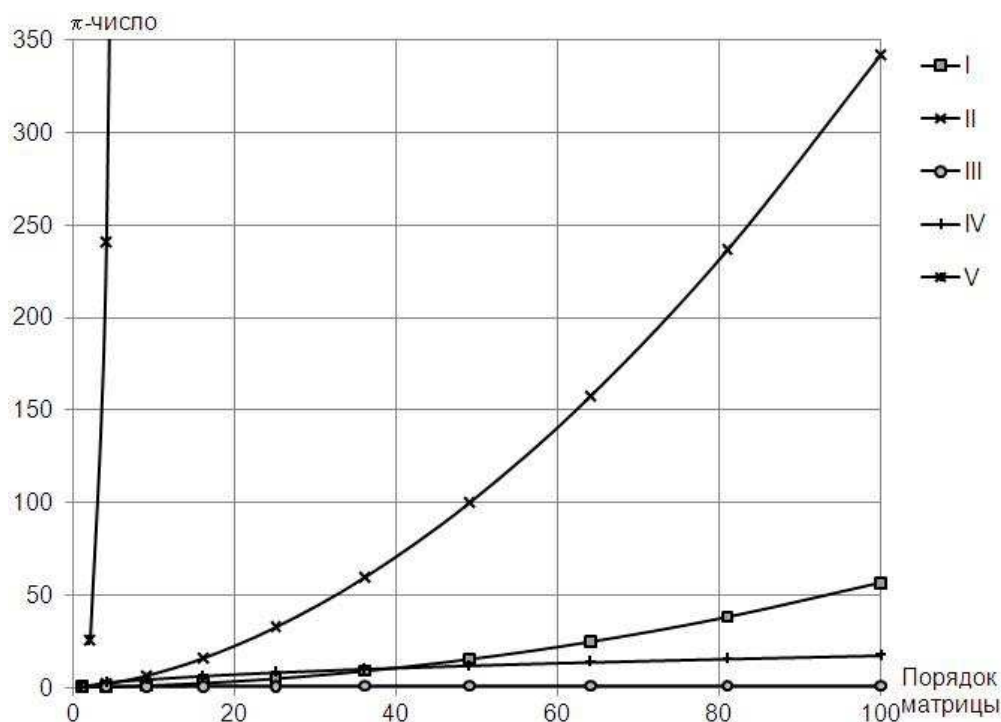


Рис. 1. Числа обусловленности матриц Грама

### Численный анализ и сопоставление решений, полученных с помощью различных координатных функций

В качестве критериальных приняты два решения: Ивэнса и решение, полученное по МКЭ. Здесь сопоставляются компоненты напряженно-деформированного состояния (НДС) как с «критериальными», так и между собой. Распределение относительных прогибов  $w$  в центре пластины, полученное различными методами, приведено в табл. 2 ( $\lambda = 1$ ) и в табл. 3 ( $\lambda = 0,5$ ). Эти решения получены в двойных рядах по системам различных координатных функций и по

МКЭ с удержанием большого числа неизвестных. Действительные прогибы связаны с относительными прогибами равенством  $w = \bar{w} \frac{qa^4}{D} (q = const)$ .

Таблица 2

Относительные прогибы в центре квадратной пластины (значения относительных прогибов увеличены в 1000 раз)

Порядок матрицы	I	II	III	IV	Порядок матрицы	МКЭ	Порядок матрицы	V	Ивэнс
1	1,32921	1,32921	1,33541	1,28325	243	1,28263	100	1,26528	1,26
4	1,26449	1,26449	1,25255	1,22214	1083	1,26962	400	1,26532	
9	1,26527	1,26527	1,26707	1,26261	2523	1,26723	900	1,26320	
16	1,26531	1,26531	1,25447	1,25860	4563	1,26639	1600	1,26320	
25	1,26532	1,26532	1,26551	1,26406	7203	1,26601	2500	1,26320	
36	1,26532	1,26532	1,26517	1,26327	10443	1,26580	3600	1,26320	
49	1,26532	1,26532	1,26536	1,26470	14283	1,26568	4900	1,26320	
64	1,26532	1,26532	1,26528	1,26445	18723	1,26558	6400	1,26320	
81	1,26532	1,26532	1,26634	1,26498	23763	1,26554	8100	1,26320	
100	1,26532	1,26532	1,26533	1,26488	29403	1,26549	10000	1,26320	

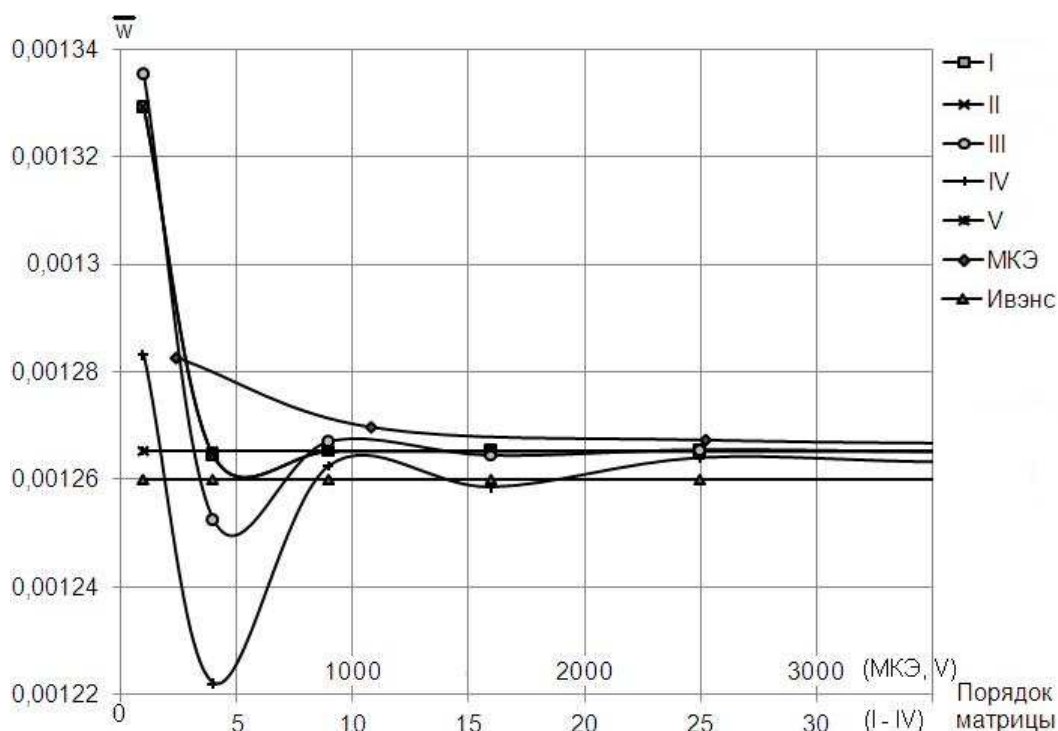


Рис. 2. Относительные прогибы в центре квадратной пластины

Прежде чем обсуждать данные табл. 2, отметим, что неизвестно какими порядками матриц ограничился Ивэнс. Это не отмечает и С.П. Тимошенко [17]. Во время появления работы Ивэнса развитая вычислительная техника практически отсутствовала. Поэтому имеются все предпосылки для уточнения данных Ивэнса. Это имеет принципиальное значение, поскольку может позволить оценить точность приближённых решений, получаемых тем или иным методом.

Если за критерий принять решение Ивэнса  $\bar{w} = 0,00126$ , то это значение 0,001265319 достигается быстрее (с меньшим числом неизвестных – шесть) с

помощью функций С.А. Халилова и В.Б. Минтюка. Решения отмеченных авторов совпадают с точностью до девятого знака после запятой и с увеличением числа неизвестных уже не изменяются, поэтому имеются все основания эти решения принять за критериальные. Если сравнивать с этими решениями данные, полученные с помощью других координатных функций, то все эти решения достигают необходимой точности при значительно большем числе неизвестных, наилучшей точностью обладает МКЭ даже более чем при 30000 неизвестных. Более наглядное представление об обсуждаемой проблеме точности и скорости сходимости приближённых решений дают графики, представленные на рис. 2. Данные этого рисунка абсолютно прозрачны и не требуют обсуждения.

Результат распределения относительных прогибов  $\bar{w}$  в центре прямоугольной пластины при  $\lambda = 0,5$  (удлинение равно 2) приведен в табл. 3, по данным которой построены графики (рис. 3).

Таблица 3

Относительные прогибы в центре прямоугольной пластины  
(значения относительных прогибов увеличены в 1000 раз)

Порядок матрицы	I	II	III	IV	Порядок матрицы	МКЭ	Порядок матрицы	V	Ивэнс
1	2,83565	2,83565	2,86598	2,78400	243	2,59611	100	2,53277	2,54
4	2,50166	2,50166	2,46635	2,41994	1083	2,54885	400	2,53294	
9	2,53243	2,53243	2,54786	2,54812	2523	2,54005	900	2,53295	
16	2,53297	2,53297	2,52754	2,51642	4563	2,53695	1600	2,53295	
25	2,53296	2,53296	2,53488	2,53501	7203	2,53551	2500	2,53296	
36	2,53296	2,53296	2,53198	2,52829	10443	2,53473	3600	2,53296	
49	2,53296	2,53296	2,53339	2,53329	14283	2,53427	4900	2,53296	
64	2,53296	2,53296	2,53269	2,53111	18723	2,53395	6400	2,53296	
81	2,53296	2,53296	2,53309	2,53297	23763	2,53376	8100	2,53296	
100	2,53296	2,53296	2,53294	2,53207	29403	2,53359	10000	2,53296	

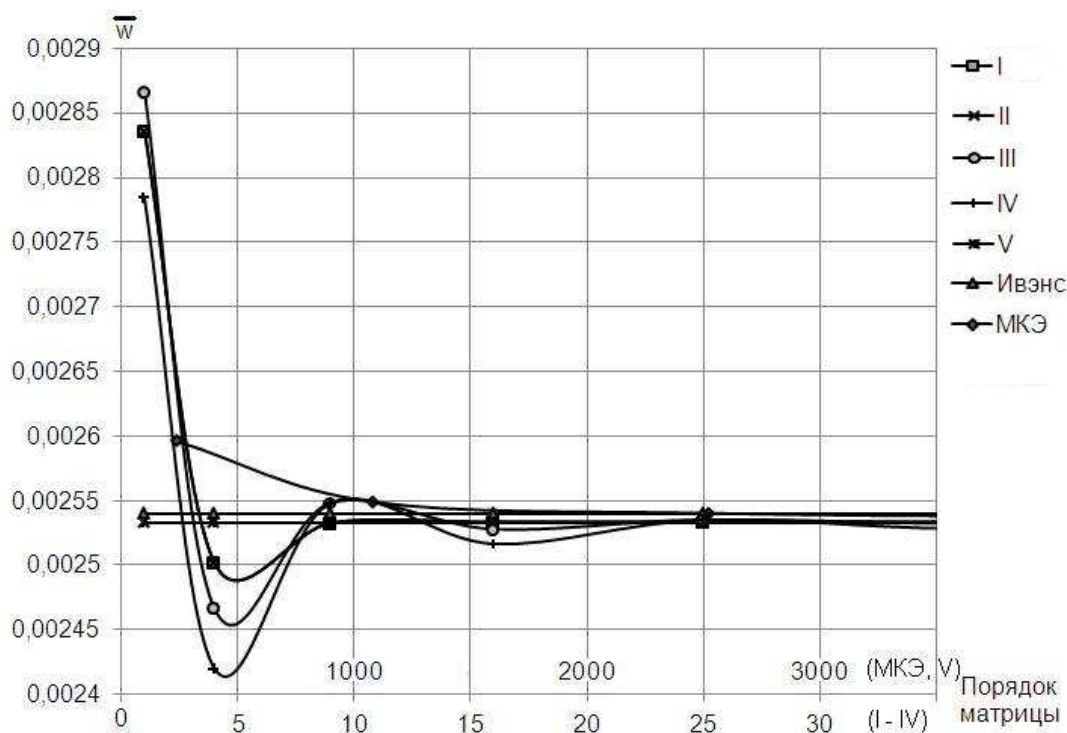


Рис. 3. Относительные прогибы в центре прямоугольной пластины

Даже беглое сравнение данных табл. 2, 3 и рис. 2, 3 позволяет сделать вывод: эти данные качественно не отличаются, небольшое количественное различие не столь существенное.

В прочностных задачах наибольшее значение имеет установление тензорных полей напряжений, которые определяются моментами, выражающимися через вторые производные от векторного поля перемещений. С ростом порядка дифференцирования ухудшается точность вычисления производных: чем выше порядок дифференцирования, тем ниже точность производных. Имея в виду определение поля напряжений с достаточной точностью, необходимо проанализировать точность и сходимость вторых производных приближённых решений.

В табл. 4 приведены значения относительных изгибающих моментов  $\bar{M}$  в центре квадратной пластины, с которыми действительные моменты связаны равенством  $M = \bar{M}qa^2$ . По данным этой таблицы построены графики, изображённые на рис. 4.

Таблица 4

Относительные изгибающие моменты  $\bar{M}_x|_{x=0,y=0} = \bar{M}_y|_{x=0,y=0}$   
(значения моментов увеличены в 100 раз)

Порядок матрицы	I	II	III	IV	Порядок матрицы	МКЭ	Порядок матрицы	V	Ивэнс
1	2,7648	2,7648	2,9731	3,2929	243	2,3883	100	2,2792	2,31
4	2,2825	2,2825	2,1074	1,8817	1083	2,3154	400	2,2875	
9	2,2891	2,2891	2,3615	2,5092	2523	2,3017	900	2,2892	
16	2,2903	2,2903	2,2546	2,1518	4563	2,2967	1600	2,2897	
25	2,2904	2,2904	2,3097	2,3827	7203	2,2946	2500	2,2900	
36	2,2905	2,2905	2,2782	2,2226	10443	2,2933	3600	2,2902	
49	2,2905	2,2905	2,2982	2,3409	14283	2,2925	4900	2,2903	
64	2,2905	2,2905	2,2848	2,2505	18723	2,2921	6400	2,2903	
81	2,2905	2,2905	2,2948	2,3221	23763	2,2917	8100	2,2904	
100	2,2905	2,2905	2,2935	2,2642	29403	2,2917	10000	2,2904	

Значения максимальных изгибающих моментов в середине закреплённых сторон квадратной пластины приведены в табл. 5, по данным которой построены графики (рис. 5).

Таблица 5

Относительные изгибающие моменты  $\bar{M}_x|_{x=1,y=0} = \bar{M}_y|_{x=0,y=1}$   
(значения моментов увеличены в 100 раз)

Порядок матрицы	I	II	III	IV	Порядок матрицы	МКЭ	Порядок матрицы	V	Ивэнс
1	-4,2535	-4,2535	-3,7626	-2,5330	243	-5,0250	100	-4,9462	-5,13
4	-5,1160	-5,1160	-4,5261	-3,3774	1083	-5,0330	400	-5,0381	
9	-5,1279	-5,1279	-4,8391	-3,8922	2523	-5,1042	900	-5,0695	
16	-5,1390	-5,1390	-4,9521	-4,1473	4563	-5,1125	1600	-5,0853	
25	-5,1303	-5,1303	-5,0108	-4,3284	7203	-5,1167	2500	-5,0949	
36	-5,1350	-5,1350	-5,0481	-4,4490	10443	-5,1167	3600	-5,1012	
49	-5,1325	-5,1325	-5,0670	-4,5397	14283	-5,1208	4900	-5,1058	
64	-5,1338	-5,1338	-5,0840	-4,6094	18723	-5,1208	6400	-5,1092	
81	-5,1332	-5,1332	-5,0927	-4,6636	23763	-5,1250	8100	-5,1119	
100	-5,1335	-5,1335	-5,0954	-4,7088	29403	-5,1250	10000	-5,1141	



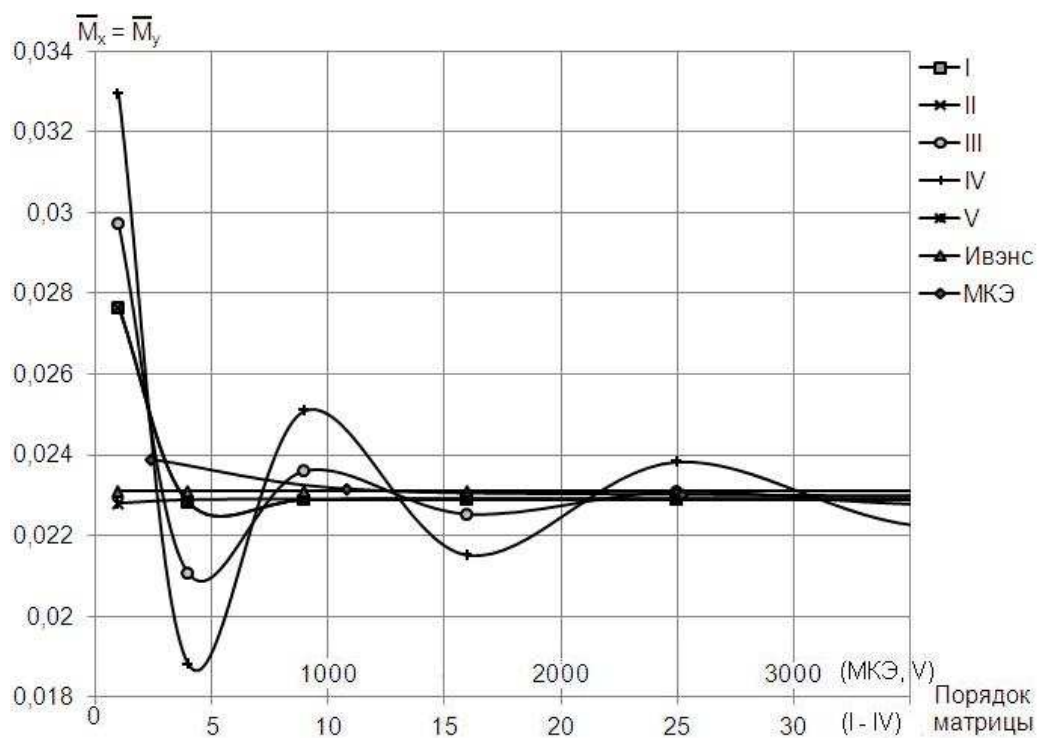


Рис. 4. Относительные изгибающие моменты  $\bar{M}_x|_{x=0,y=0} = \bar{M}_y|_{x=0,y=0}$

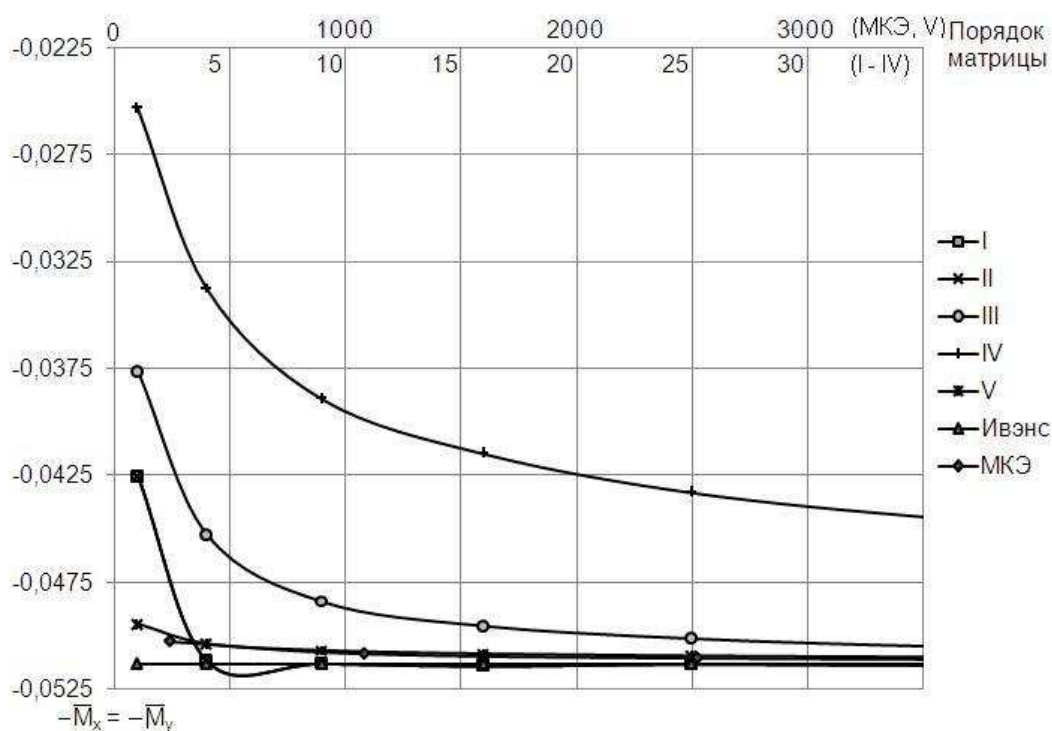


Рис. 5. Относительные изгибающие моменты  $\bar{M}_x|_{x=1,y=0} = \bar{M}_y|_{x=0,y=1}$

Для прямоугольной пластины любого удлинения степень сходимости и точности качественно остаётся такой же, как и для квадратной пластины. Для прямоугольной пластины с удлинением, равным двойке ( $\lambda = 0,5$ ), изгибающий момент

достигает наибольшего значения в середине длинной стороны и составляют:  $\overline{M}_x^I = \overline{M}_x^{II} = -0,056987$  – порядок матрицы 100;  $\overline{M}_x = -0,0571$  – решение Ивэнса;  $\overline{M}_x^{III} = -0,055401$  – порядок матрицы 100;  $\overline{M}_x^{IV} = -0,048138$  – порядок матрицы 100;  $\overline{M}_x^V = -0,0565571$  – порядок матрицы 10000;  $\overline{M}_x^{МКЭ} = -0,056167$  – порядок матрицы 29403.

Близкие между собой результаты получаются по функциям Халилова и Минтюка, меньшей точностью обладают результаты по функциям Крылова, и завышенное значение доставляет решение Ивэнса. Результаты, полученные по функциям Даревского-Шаринова и с помощью МКЭ, достигают той же точности при гораздо большем порядке разрешающей матрицы. А решение по косинус-биномам Филоненко-Бородича далеко от точного решения даже при порядке матрицы, равном ста. Анализируя полученные результаты, можно заключить, что за критериальные необходимо принять совершенно совпадающие до любого знака решения, полученные по функциям С.А. Халилова и В.Б. Минтюка, которые незначительно подправляют решение Ивэнса.

### Практическая оценка невязки решения

Для того чтобы оценить точность и сходимость указанных решений в двойных рядах, необходимо исследовать качество этого решения ещё в одном направлении: стремление невязки уравнения к нулю в открытой области  $\Omega$ . Ниже будем говорить об относительной невязке, которую определим в каждой точке  $(x, y) \in \Omega$  так:

$$\varepsilon = \left| \frac{q_n - q}{q} \right| \cdot 100\%, \quad (5)$$

где  $q_{II}$  – значение левой части уравнения (1) в точке  $(x; y)$ ;  $q_{II} = A(w) \frac{D}{a^4}$ ; а  $q$  – значение действующей нагрузки. Ниже распределение искомой невязки представлено в табл. 6, которая в силу симметрии по обеим переменным составлена для четверти квадратной пластины.

Таблица 6

Распределение невязки решения в двойных рядах по функциям  $H_m(x)H_n(y)$ , в %

		ось абсцисс						
		0	0,15	0,3	0,45	0,6	0,75	0,9
ось ординат	0	0,001242	0,001164	0,000785	0,000470	0,003836	0,005076	0,125937
	0,15	0,001164	0,001085	0,000708	0,000522	0,003759	0,004632	0,121607
	0,3	0,000786	0,000708	0,000358	0,000713	0,003294	0,002768	0,102467
	0,45	0,000470	0,000522	0,000713	0,001109	0,001440	0,002330	0,039353
	0,6	0,003836	0,003759	0,003294	0,001440	0,004417	0,012458	0,119370
	0,75	0,005076	0,002768	0,002768	0,002330	0,012458	0,005320	0,235024
	0,9	0,125937	0,102467	0,039353	0,039353	0,119371	0,235025	1,204907

Более наглядное представление о распределении невязки даёт рис. 6.

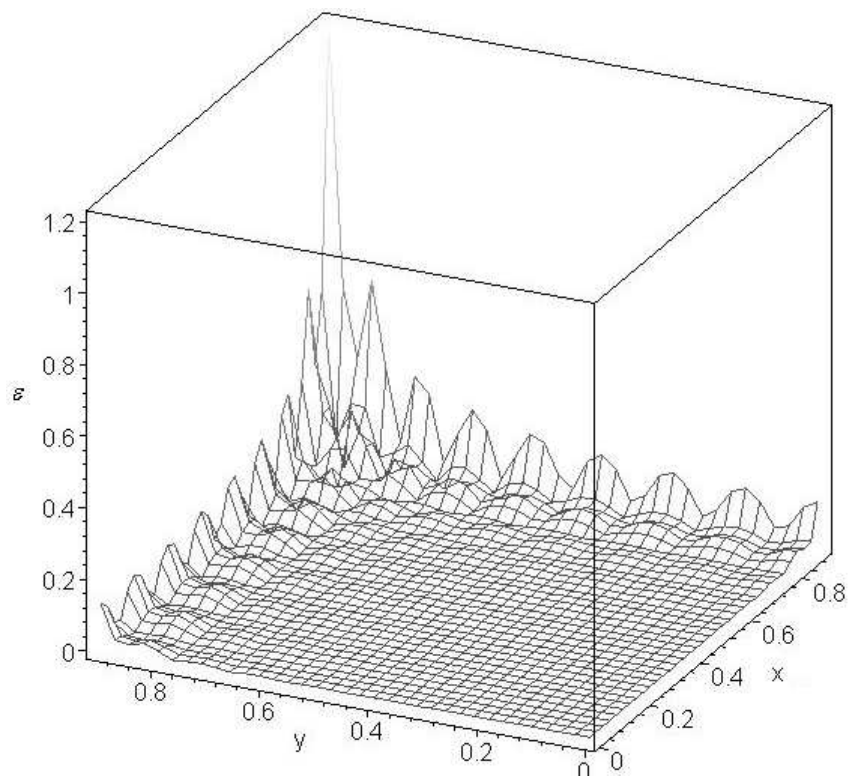


Рис. 6. Распределение невязки по поверхности пластины

Из данных табл. 6 и рис. 6 следует прозрачное заключение: в области  $\Omega' \subset \Omega$  невязка практически обращается в нуль. При приближении к краю, а особенно к угловым точкам, невязка претерпевает всплески; однако относительные всплески невязки менее 1,2%, что вполне приемлемо. Здесь следует ещё отметить, что в достаточной близости к границе имеет место явление Гиббса: невязка равна нулю почти всюду (в смысле нулевой лебеговой меры).

### Выводы

1. В высоких приближениях получено решение полуоднородной краевой задачи в прямоугольнике для бигармонического оператора (точное решение этой задачи неизвестно по сей день). При этом применён метод Бубнова-Галёркина с помощью различных систем координатных функций. Расчётным путём показано, что требованиям точности, устойчивости и сходимости приближённых решений отвечают функции С.А. Халилова и В.Б. Минтюка, предложенные в Национальном аэрокосмическом университете им. Н.Е. Жуковского «ХАИ».

2. Исследован принципиальный вопрос о сходимости к нулю невязки решения почти всюду (в смысле лебеговой меры нуль). Наилучшими аппроксимирующими свойствами с точки зрения данного вопроса обладают функции С.А. Халилова.

3. Данное решение так называемой «жёсткой» задачи позволяет путём редукции получить приближённо аналитическое представление решения как задачи об изгибе прямоугольной пластины при заданной на границе произвольной системы прогибов и углов поворота, так и плоской задачи теории упругости в прямоугольнике при произвольной системе заданных на границе нормальных и каса-

тельных напряжений. Эти решения широко используются для анализа напряжённо-деформированного состояния тонкостенных пространственных систем, состоящих из пластин, путём реализации метода сопряжения конструктивных элементов, разработанного в Национальном аэрокосмическом университете им. Н.Е. Жуковского «ХАИ».

### Список литературы

1. Самарский А.А. Разностные схемы для дифференциальных уравнений с обобщёнными решениями / А.А. Самарский, Р.Д.Лазарев, В.Л. Макаров, – М.: «Высшая школа», 1987. – 296 с.
2. Халилов С.А. Изгиб прямоугольной ортотропной пластины при заданных на границе перемещениях / С.А. Халилов // Вопросы проектирования и производства конструкций летательных аппаратов. Тематический сборник научных трудов. – Х.: ХАИ, 1987. – С. 31-39.
3. Халилов С.А. Решение в прямоугольнике статической задачи теории упругости при заданных на границе напряжениях / С.А. Халилов // Вопросы проектирования самолетных конструкций. Тематический сборник научных трудов. – Х.: ХАИ, 1982. – Вып.3. – С.120-127.
4. Бесов О.В. Интегральные представления функций и теоремы вложения. / О.В. Бесов, В.П. Ильин, С.М. Никольский, – М.: Наука, 1975. – 480 с.
5. Халилов С.А. Приближенное замкнутое решение плоской задачи теории упругости в трапециевидной области / С.А. Халилов, М.А. Яровой // Авиационно-космическая техника и технология. – 2004. –2/10. – С.33-38.
6. Халилов С.А. Построение приближенного аналитического решения плоской задачи теории упругости в трапециевидной области / С.А. Халилов, С.Г. Кравченко// Авиационно-космическая техника и технология. – 2009. – 1/58. – С. 16-23.
7. Кравченко С.Г. Устойчивость пространственных тонкостенных пластинчатых систем. Дисс. канд. техн. наук: 01.02.04; защищена 24.09.10; утв. 17.12.10 / Кравченко Сергей Григорьевич. – Х., 2010. – 160 с.
8. Халилов С.А. Метод идентификации краевых условий в задачах упругой устойчивости. Идея метода / С.А.Халилов // Авиационно-космическая техника и технология. – 2003. – 36/1. – С. 15-21.
9. Минтюк В.Б. Устойчивость подкреплённой в области и на кривошипной границе пластины как элемента тонкостенной пространственной системы. Дисс. канд. техн. наук: 01.02.04; защищена 04.12.04; утв. 10.03.05 / Минтюк Виталий Борисович. – Х., 2005. – 147 с.
10. Кривцов В.С. Исследование устойчивости силового кессона крыла методом идентификации краевых условий. / В.С. Кривцов, С.А. Халилов, В.Б. Минтюк. // Авиационно-космическая техника и технология. – Харьков. "ХАИ". – Вып. 7(23). – 2005. – С.151–161.
11. Кривцов В.С., Халилов С.А., Минтюк В.Б. Устойчивость силового кессона крыла. Численный анализ на основе метода идентификации краевых условий. / В.С. Кривцов, С.А. Халилов, В.Б. Минтюк. // Авиационно-космическая техника и технология. – Харьков: Нац. аэрокосм. ун-т «ХАИ». – Вып. 3(39). – 2007. – С. 5-26.
12. Халилов С.А. Исследование устойчивости отсека крыла методом идентификации краевых условий на основе упрощенной модели Авиационно-

космическая техника и технология. / С.А. Халилов, В.Б. Минтюк – Х.: Нац. аэрокосм. ун-т им. Н.Е. Жуковского «ХАИ». – 2003. – Вып. 2 (37). – С. 6–10.

13. Халилов С.А. Исследование устойчивости отсека крыла методом идентификации краевых условий на основе двумерной упрощенной модели. / С.А. Халилов, В.Б. Минтюк // Авиационно-космическая техника и технология. – Х.: Нац. аэрокосм. ун-т им. Н.Е. Жуковского «ХАИ». – 2004. – Вып. 1 (40). – С. 12–16.

14. Теоретические основы математического моделирования устойчивости несущих конструкций авиакосмической техники: Отчет о НИР, Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского «ХАИ» – №ГР 0100U003434; Инв. № 0203U008196. – Харьков, 2003. – 173с.

15. Теоретические основы метода идентификации краевых условий для исследования упругой устойчивости силовой конструкции аэрокосмической техники: Отчет о НИР, Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е.Жуковского «ХАИ» – №ГР 0103U005070; Инв. № 0206U002451. – Харьков, 2006. – 173 с.

16. Теория и численная реализация метода идентификации краевых условий в задачах упругой устойчивости и колебаний: Отчет о НИР, Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е.Жуковского «ХАИ» – №ГР0106U001061; Инв. №0209U005481 . – Харьков, 2009. – 178с.

17. Тимошенко С.П. Пластины и оболочки / С.П. Тимошенко, С. Войновский–Кригер. – М.: Наука, 1966. – 636с.

18. Даревский В.М. Новое решение задачи об изгибе защемленной по краям прямоугольной пластины / В.М. Даревский, И.Л. Шарин // Успехи механики деформируемых сред. – М.: «Наука», 1975. – С.183-194.

19. Бондаренко Б.А. Полигармонические полиномы / Б.А. Бондаренко, – Т.: ФАН, 1968. – 171с.

20. Ректорис К. Вариационные методы в математической физике и технике: пер.с англ., – М.: Мир, 1985. – 590с.

21. Канторович Л.В. Приближенные методы высшего анализа / Л.В. Канторович, В.И. Крылов, – М.-Л.: Гос.изд.техн.-теор.лит., 1950. – 695с.

22. Халилов С.А. Новые системы ортонормированных многочленов, некоторые их свойства и приложения / С.А. Халилов // Прочность конструкций летательных аппаратов. Тематический сборник научных трудов. – Х.: ХАИ, 1978. – Вып.5. – С.46-56.

23. Минтюк В. Б. Ортонормированный базис для одномерных краевых задач / В. Б. Минтюк // Авиационно-космическая техника и технология: сб. науч. тр. – Х., Нац. аэрокосм. ун-т "ХАИ", 2007. – Вып. 5/41. – С. 32–36.

24. Власов В.З. Тонкостенные упругие стержни / В.З. Власов, – М.: Физматлит, 1959. – 568 с.

**Рецензент:** д-р. техн. наук, проф., зав. каф. П.А. Фомичёв,  
Национальный аэрокосмический университет  
им. Н.Е. Жуковского «ХАИ», Харьков.

Поступила в редакцию 14.03.11

## **Побудова та дослідження аналітико-числового розв'язання задач про вигин жорстко защемленої прямокутної пластини**

У великих наближеннях отримано розв'язок «жорсткої» крайової задачі для бігармонічного оператора в прямокутній області з однорідними крайовими умовами, поставленими відносно функції, що розшукується, та її похідних за нормалю до межі. На основі проведеного числового аналізу та порівняння результатів, отриманих методом Бубнова – Гальоркіна за допомогою різних систем координатних функцій, зроблено висновок про якість їхніх апроксимуючих властивостей. Особлива увага приділяється порівнянню точності, збіжності та стійкості як самих аналітико-числових розв'язок, так і процесу їх отримання. Ретельне обговорення числових результатів супроводжується поданням їх у вигляді таблиць і графіків.

**Ключові слова:** жорстке защемлення, бігармонічний оператор, крайова задача, аналітико-числовий розв'язок, вигин, згинальний момент, точність, збіжність.

## **Development and Research of the Analytic-Numerical Solution for the Bending Problem of Fixed Supported Rectangular Plate**

With extra-high accuracy the approximate solution for «rigid» boundary problem in rectangular area is derived. The operator of the problem is biharmonic, the boundary conditions are formulated for the function to be found and it's derivate, normal to the contour line. The problem is solved by means of Bubnov-Halerkin method using different system of coordinate functions. Basing on the numerical research and comparing results the conclusion due to approximations quality of different coordinate functions is made. A special attention is given to compare accuracy, convergence and stability of both analytic-numerical solutions and true processes to develop them. Detailed discussion of numerical results is illustrated with tables and graphs.

**Keywords:** fixed support, biharmonic operator, boundary problem, analytic-numerical solution, deflection, bending moment, accuracy and convergence.