

О колебании многозвенных струн

*Харьковский национальный экономический университет
Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского «ХАИ»*

При классических гипотезах рассмотрены задачи о свободных и вынужденных колебаниях однородной многозвенной струны. Предложен метод, позволяющий получать точные решения этих задач.

Ключевые слова: многозвенная струна, свободные и вынужденные колебания, симметризация начальных и нагрузочных функций, метод решения.

Задачи, рассмотренные в статье, являются новыми по своей постановке, её авторам не известны работы других учёных в этой области. В математическом плане изучаемая проблема требует для своего решения особых, нестандартных приёмов, связанных с разложением произвольной вектор - функции в ряды по системе векторных собственных функций неклассической спектральной задачи Штурма - Лиувилля с кратными собственными значениями. Метод решения оказался естественным образом связанным с гибридными собственными функциями [2]. Он интересен еще и потому, что находит применение в других задачах математической физики многокомпонентных сред [3, 4] (теплопроводность многолистных тонких пластин и разветвлённых стержней, кручение составных упругих тел и др.).

Практическое приложение настоящего исследования может найти в задачах, в которых рассматриваются: струнные подвесы для сосредоточенных масс; колебания разветвлённых стальных тросов; теплопроводность сложных проводников тепла.

Классическая однозвенная струна стала источником многочисленных интереснейших исследований как прямых, так и обратных задач математической физики. Трудными учеными в этой области был создан мощный математический аппарат спектрального анализа. Авторы статьи полагают, что постановка и решение простейших задач о многозвенных струнах вызовут интерес исследователей к подобного рода проблемам как в теоретическом плане, так и в плане использования новых результатов.

1. Свободные колебания N - звенной однородной струны при заданной начальной форме

Будем считать, что звенья струны расположены в горизонтальной плоскости. Отклонения точек струны $u(x, y)$ от положения равновесия происходят в направлении, перпендикулярном к плоскости струны (рис. 1). Края звеньев закреплены в точках на окружности радиуса R , все звенья соединены в одной точке, лежащей в центре круга (рис. 2). Примем классические гипотезы, лежащие в основе теории малых колебаний струны [1]. Через $u_j(x, t)$ будем обозначать перемещение точек j -го звена струны. Рассматриваем случай, когда звенья одинаковы, т. е. изготовлены из одного и того же материала, а края находятся в вершинах правильного N - угольника. Система сил в струне в этом случае всегда уравно-

вешена. Обозначим через T_0 силу натяжения в звене, а через ρ – линейную плотность распределения массы.

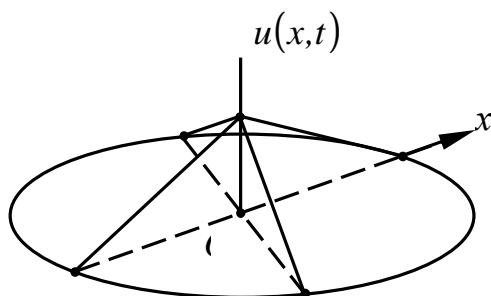


Рис. 1. Четырехзвенная струна

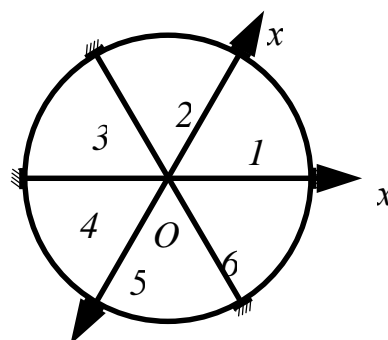


Рис. 2. Шестизвенная струна в плане

Уравнение свободных колебаний имеет вид

$$\frac{\partial^2 u_j}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u_j}{a^2 \partial t^2}, \quad a = \sqrt{\frac{T_0}{\rho}}. \quad (1.1)$$

К этому уравнению добавим краевые условия $u_j(R, t) = 0$, начальные условия

$$u_j(x, 0) = f_j(x), \quad u_{j,t}(x, 0) = 0 \quad (1.2)$$

и условия сопряжения звеньев в точке $x = 0$

$$u_j(0, t) = u_{j+1}(0, t), \quad j = 1, 2, \dots, N - 1; \quad (1.3)$$

$$\sum_{j=1}^N \frac{\partial u_j}{\partial x} = 0, \quad t > 0. \quad (1.4)$$

Первое условие сопряжения отражает непрерывность перемещения струны в точке соединения звеньев, второе условие выражает тот факт, что сумма проекций на ось $u(x, t)$ всех сил, действующих на струну в точке $x = 0$, равна нулю.

Задача состоит в нахождении функций $u_j(x, t)$ по уравнению колебания, условиям (1.2) – (1.4) и условию закрепления краев звеньев. Заметим, что без ущерба для общности задачи будем в дальнейшем считать $a = 1$.

Решение задачи строим методом разделения переменных. В соответствии с этим методом примем

$$u_j(x, t) = X_j(x) \cdot T(t), \quad T(t) = e^{i\lambda t}, \quad j = 1, 2, \dots, N. \quad (1.5)$$

Для функций $X_j(x)$ из (1.1) имеем уравнение

$$X_j'' + \lambda^2 X_j = 0, \quad (1.6)$$

краевые условия $X_j(R) = 0$ и условия сопряжения

$$X_j(0) = X_{j+1}(0), \quad j = 1, 2, \dots, N - 1; \quad \sum_{j=1}^N X_j'(0) = 0. \quad (1.7)$$

С учетом краевых условий получим

$$X_j(x) = A_j \sin \lambda(x - R). \quad (1.8)$$

Условия сопряжения (1.7) приводят к равенствам

$$\begin{cases} A_j \sin \lambda R = A_{j+1} \sin \lambda R, & j = 1, 2, \dots, N-1, \\ \sum_{j=1}^N A_j \cos \lambda R = 0. \end{cases} \quad (1.9)$$

Определитель этой системы $\Delta(\lambda)$ есть уравнение для собственных значений спектральной задачи (1.6), (1.7) при $X_j(R) = 0$.

Вычисления дают

$$\Delta(\lambda) = N \cdot \cos \lambda R \cdot (\sin \lambda R)^{N-1}. \quad (1.10)$$

Из (1.10) следует, что рассматриваемая задача имеет кратные и простые собственные значения (частоты колебаний): $\lambda_n^{(1)} = \frac{n\pi}{R}$, $\lambda_n^{(2)} = \frac{\pi}{2R}(2n+1)$.

Собственные функции анализируемой задачи будем трактовать как векторные собственные функции, составленные из N компонент.

Собственному значению $\lambda_n^{(1)} = n\pi/R$ соответствует собственная вектор-функция

$$y(x, \lambda_n^{(1)}) = (A_1(n)A_2(n) \cdots A_N(n))^T \cdot \sin \lambda_n^{(1)}(x - R), \quad A_1 + A_2 + \dots + A_N = 0, \quad (1.11)$$

где T – символ транспонирования. Другому собственному значению $\lambda_n^{(2)} = \frac{\pi}{2R}(2n+1)$ отвечает собственная функция

$$y(x, \lambda_n^{(2)}) = (11 \cdots 1)^T \cdot \sin \lambda_n^{(2)}(x - R). \quad (1.12)$$

Отметим, что каждая система функций $\{\sin \lambda_n^{(1)}(x - R)\}$ и $\{\sin \lambda_n^{(2)}(x - R)\}$ является ортогональной и полной на $(0, R)$, но эти системы не являются взаимно ортогональными.

Общее решение задачи запишем в виде ряда

$$(u_1(x, t)u_2(x, t) \cdots u_N(x, t))^T = \sum_{n=1}^{\infty} y(x, \lambda_n^{(1)}) \cos \lambda_n^{(1)} t + \sum_{n=0}^{\infty} b_n y(x, \lambda_n^{(2)}) \cos \lambda_n^{(2)} t. \quad (1.13)$$

Коэффициенты $A_j(n)$ и b_n следует определить из начальных условий (1.2).

Отметим, что второе условие (1.2) удовлетворяется при любых коэффициентах ряда (1.13). Первое условие (1.2) приводит к равенству

$$(f_1(x)f_2(x) \cdots f_N(x))^T = \sum_{n=1}^{\infty} y(x, \lambda_n^{(1)}) + \sum_{n=0}^{\infty} b_n y(x, \lambda_n^{(2)}), \quad 0 \leq x \leq R. \quad (1.14)$$

Здесь появляется определённая трудность в нахождении коэффициентов, входящих в (1.14). Традиционный подход к обращению равенства (1.14) приводит к бесконечным системам линейных алгебраических уравнений.

Для определения коэффициентов $A_j(n)$ и b_n введем на $[0, R]$ N непрерывных пока произвольных функций $\varphi_j(x)$, $j=1,2,\dots,N$ и разложим их в ряды Фурье по системе $\{\sin \lambda_n^{(1)}(x-R)\}$:

$$\varphi_j(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_j(n) \sin \lambda_n^{(1)}(x-R), \quad (1.15)$$

где

$$A_j(n) = \frac{2}{R} \int_0^R \varphi_j(\xi) \sin \lambda_n^{(1)}(\xi-R) d\xi, \quad n=1,2,\dots$$

Для выполнения второго равенства (1.11) необходимо и достаточно, чтобы функции $\varphi_j(x)$ удовлетворяли условию

$$\varphi_1(x) + \varphi_2(x) + \dots + \varphi_N(x) \equiv 0. \quad (1.16)$$

Функции $f_j(x)$ представим в виде

$$f_j(x) = F(x) + \varphi_j(x). \quad (1.17)$$

Из (1.16), (1.17) находим

$$\sum_{j=1}^N f_j(x) = N \cdot F(x), \quad F(x) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N f_j(x). \quad (1.18)$$

Теперь, зная $F(x)$, из (1.17) получим

$$\varphi_j(x) = -F(x) + f_j(x) = f_j(x) - \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N f_k(x). \quad (1.19)$$

Всё сделанное выше имеет цель представить равенство (1.14) в виде

$$F(x) + (\varphi_1(x)\varphi_2(x)\dots\varphi_N(x))^T = \sum_{n=0}^{\infty} b_n y(x, \lambda_n^{(2)}) + \sum_{n=1}^{\infty} y(x, \lambda_n^{(1)}). \quad (1.20)$$

Из (1.20) с учетом (1.15), (1.19) находим

$$A_j(n) = \frac{2}{R} \int_0^R \varphi_j(\xi) \sin \lambda_n^{(1)}(\xi-R) d\xi = \frac{2}{R} \int_0^R \left[f_j(\xi) - \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N f_k(\xi) \right] \sin \lambda_n^{(1)}(\xi-R) d\xi. \quad (1.21)$$

Оставшееся равенство

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \sin \lambda_n^{(2)}(x-R)$$

позволяет найти коэффициенты b_n :

$$b_n = \frac{2}{R} \int_0^R F(\xi) \sin \lambda_n^{(2)}(\xi-R) d\xi = \frac{2}{RN} \int_0^R \sum_{k=1}^N f_k(\xi) \sin \lambda_n^{(2)}(\xi-R) d\xi. \quad (1.22)$$

Решение задачи найдено, и оно единственно, как это видно из способа его построения. Это решение получено в предположении, что $u_{j't}(x,0) \equiv 0$ для всех

$j = 1, 2, \dots, N$. Решение общей задачи, когда начальные скорости точек струны не нулевые, будет дано ниже. Сейчас рассмотрим формы колебаний, которые даёт полученное решение.

В общем случае найденное решение имеет две серии форм колебаний звеньев струны. Первая форма соответствует собственным значениям $\lambda_n^{(2)}$. Она имеет место, если все $f_j(x)$ равны между собой и равны $f(x)$. Тогда $F(x) = f(x)$, а все $\varphi_j(x) \equiv 0$. В этом случае $A_j(n) = 0$ и колебания всех звеньев будут одинаковыми. Этот случай назовем симметричным случаем колебания многозвенной струны. Он изображен на рис. 1. Имеется в виду симметрия относительно точки $x = 0$.

Вторая форма колебаний соответствует собственным значениям $\lambda_n^{(1)}$. Это есть колебания отдельных звеньев струны, закрепленных в точках $x = R$ и $x = 0$. Амплитуды этих колебаний являются независимыми между собой, но таковы, что их сумма равна нулю. Это отражает тот факт, что звенья связаны между собой в точке $x = 0$. Эти формы колебаний назовем несимметричными.

Если не все $f_j(x)$ равны между собой, но при этом $F(x) \equiv 0$, то симметричных колебаний в такой струне нет (так как $b_n = 0$), а существуют только несимметричные взаимно независимые колебания отдельных звеньев. Этот случай малоинтересен т.к. является классическим и хорошо изученным. В случае, когда $f_j(x)$ таковы, что $F(x) \neq 0$ и $\varphi_j(x) \neq 0$, имеем симметричные и несимметричные формы колебаний, и эти два вида движения в сумме определяют $u_j(x, t)$.

Следует особо отметить, что введение функций $F(x)$ и $\varphi_j(x)$ дало возможность не только найти замкнутое решение задачи, но и разделить формы колебаний на симметричные и несимметричные. Будем называть этот прием (введение $F(x)$ и $\varphi_j(x)$) симметризацией заданной системы функций, он неоднократно будет использован в дальнейшем.

2. Свободные колебания при заданных начальных скоростях

Приступим к решению второй задачи колебания N -звенной струны при тех же граничных условиях и условиях сопряжения, но начальные условия поставим такие:

$$v(x, 0) \equiv 0, \quad v_{j't}(x, 0) = g_j(x), \quad j = 1, 2, \dots, N. \quad (2.1)$$

Общее решение такой задачи берем в виде

$$(v_1(x, t)v_2(x, t) \cdots v_N(x, t))^T = \sum_{n=1}^{\infty} y(x, \lambda_n^{(1)}) \sin \lambda_n^{(1)} t + \sum_{n=0}^{\infty} c_n y(x, \lambda_n^{(2)}) \sin \lambda_n^{(2)} t, \quad (2.2)$$

где

$$y(x, \lambda_n^{(1)}) = (B_1(x, t)B_2(x, t) \cdots B_N(x, t))^T \sin \lambda_n^{(1)}(x - R),$$

а коэффициенты $B_j(n)$ связаны соотношением

$$B_1(n) + B_2(n) + \dots + B_N(n) = 0. \quad (2.3)$$

Решение в виде (2.2) первому начальному условию удовлетворяет при любых коэффициентах. Второе начальное условие (2.1) после взятия производной по переменной t приводит к равенству

$$(g_1(x)g_2(x)\cdots g_N(x))^T = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{(1)} y(x, \lambda_n^{(1)}) + \sum_{n=0}^{\infty} c_n \lambda_n^{(2)} y(x, \lambda_n^{(2)}). \quad (2.4)$$

При определении $B_j(n)$ и c_n возникают те же проблемы, что и в первой задаче. Поэтому для определения коэффициентов $B_j(n)$ и c_n воспользуемся приемом симметризации системы функций $g_j(x)$, $j=1,2,\dots,N$.

Строим функцию $\Phi(x)$ по заданным $g_j(x)$:

$$\Phi(x) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N g_k(x).$$

Для выполнения условия (2.3) введем функции $\psi_j(x)$ такие, что

$$\psi_1(x) + \psi_2(x) + \dots + \psi_N(x) \equiv 0. \quad (2.5)$$

Они определяются равенствами

$$\psi_j(x) = g_j(x) - \Phi(x) = g_j(x) - \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N g_k(x). \quad (2.6)$$

После этих преобразований вместо (2.4) будем иметь

$$\Phi(x) + \begin{pmatrix} \psi_1(x) \\ \psi_2(x) \\ \vdots \\ \psi_N(x) \end{pmatrix} = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{(1)} \begin{pmatrix} B_1(n) \\ B_2(n) \\ \vdots \\ B_N(n) \end{pmatrix} \sin \lambda_n^{(1)}(x-R) + \sum_{n=0}^{\infty} c_n \lambda_n^{(2)} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \sin \lambda_n^{(2)}(x-R). \quad (2.7)$$

Из этого равенства найдем

$$c_n \cdot \lambda_n^{(2)} = \frac{2}{R} \int_0^R \Phi(\xi) \sin \lambda_n^{(2)}(\xi - R) d\xi, \quad (2.8)$$

$$B_j(n) \cdot \lambda_n^{(1)} = \frac{2}{R} \int_0^R \psi_j(\xi) \sin \lambda_n^{(1)}(\xi - R) d\xi.$$

Решение задачи найдено, и оно единственным образом определяется по начальным данным.

Относительно форм колебаний можно сделать те же выводы, что и в п. 1, поэтому на них останавливаться не будем.

Общее решение задачи колебания многозвенной струны при начальных условиях

$$w_j(x,0) = f_j(x), \quad w_j'(x,0) = g_j(x),$$

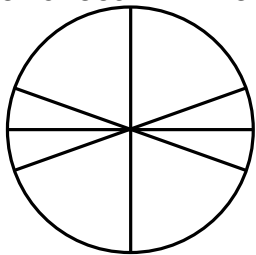
очевидно, будет иметь вид

$$w_j(x,t) = u_j(x,t) + v_j(x,t).$$

Разделение общей задачи на две более простые для $u(x,t)$ и $v(x,t)$ сделано для прозрачности изложения метода решения.

Пример. Пусть $N = 3$, $f_1(x) = -\sin \frac{x\pi}{R}$, $f_2(x) = \sin \frac{x\pi}{R}$, $f_3(x) \equiv 0$.

В этом случае $F(x) \equiv 0$, симметричных форм колебаний нет. Несимметричные колебания имеют вид



$$u_1(x,t) = -\sin \frac{\pi x}{R} \cdot \cos \frac{\pi t}{R}, \quad u_2(x,t) = \sin \frac{\pi x}{R} \cdot \cos \frac{\pi t}{R},$$

$$u_3(x,t) \equiv 0.$$

Звенья под номерами один и два колеблются с противоположными по знаку амплитудами, звено под номером три находится в состоянии покоя.

Рис. 3. Нерегулярное расположение звеньев

Замечание. Результаты остаются справедливыми и при положении звеньев, изображенных на рис. 3.

3. Свободные колебания струны с незакрепленными краями

В этом случае краевые условия таковы:

$$\left. \frac{\partial u_j(x,t)}{\partial x} \right|_{x=R} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, N, \tag{3.1}$$

условия сопряжения – прежние.

Начальные условия примем такими, как и в задаче для $u(x,t)$, т.е.

$$u_j(x,0) = f_j(x), \quad u_j'(x,0) = 0. \tag{3.2}$$

С учетом краевых условий имеем $X_j(x) = A_j \cdot \cos \lambda(x - R)$.

Условия сопряжения приводят к равенствам

$$\begin{cases} A_j \cdot \cos \lambda R = A_{j+1} \cdot \cos \lambda R, & j = 1, 2, \dots, N - 1, \\ \sum_{j=1}^N A_j \cdot \sin \lambda R = 0. \end{cases} \tag{3.3}$$

Определитель этой системы $\Delta_1(\lambda) = N \cdot \sin \lambda R \cdot (\cos \lambda R)^{N-1}$.

В этой задаче из уравнения $\Delta_1(\lambda) = 0$ находим корни $\lambda_n^{(1)} = \frac{n\pi}{R}$ – однократные и $\lambda_n^{(2)} = \frac{\pi}{2R}(2n + 1) - (N - 1)$ - кратные.

Если $\sin \lambda_n R = 0$, то $A_1 = A_2 = \dots = A_N$ и собственные функции, соответствующие этому случаю, таковы:

$$y(x, \lambda_n^{(1)}) = (11 \dots 1)^T \cos \lambda_n^{(1)}(x - R). \tag{3.4}$$

При $\lambda = \lambda_n^{(2)}$ имеем вторую серию собственных функций

$$y(x, \lambda_n^{(2)}) = (A_1 A_2 \dots A_N)^T \cos \lambda_n^{(2)}(x - R), \quad A_1 + A_2 + \dots + A_N = 0. \tag{3.5}$$

Каждая из систем функций $\{\cos \lambda_n^{(1)}(x - R)\}$ и $\{\cos \lambda_n^{(2)}(x - R)\}$ ортогональна

и полна на $(0, R)$. Общее решение задачи имеет вид

$$(u_1(x,t)u_2(x,t)\cdots u_N(x,t))^T = \sum_{n=1}^{\infty} a_n y(x, \lambda_n^{(1)}) \cos \lambda_n^{(1)} t + \sum_{n=0}^{\infty} y(x, \lambda_n^{(2)}) \cos \lambda_n^{(2)} t. \quad (3.6)$$

Начальные условия задачи приводят к равенствам

$$(f_1(x)f_2(x)\cdots f_N(x))^T = \sum_{n=1}^{\infty} a_n y(x, \lambda_n^{(1)}) + \sum_{n=0}^{\infty} y(x, \lambda_n^{(2)}). \quad (3.7)$$

Для нахождения коэффициентов $A_j(n)$ и a_n , как это было сделано в предыдущих задачах, воспользуемся приемом симметризации функций $f_j(x)$: строим вспомогательные функции

$$F(x) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N f_k(x), \quad \varphi_j(x) = f_j(x) - F(x).$$

Затем функцию $F(x)$ раскладываем в ряд Фурье по системе $\{\cos \lambda_n^{(1)}(x - R)\}$, а функции $\varphi_j(x)$ – по системе $\{\cos \lambda_n^{(2)}(x - R)\}$. Коэффициенты $A_j(n)$ и a_n находим из (3.7) по формулам (1.21), (1.22). Нетрудно проверить, что второе условие (3.5) выполняется.

Как и в случае закрепленных краев, здесь имеем симметричные формы колебаний (3.4) и несимметричные формы (3.5) связанных между собой звеньев. Прием симметризации начальных функций позволяет при любых начальных данных прогнозировать существование тех, других или смешанных форм колебаний.

Очевидно, что не представляет труда применить метод решения к случаю, когда начальные данные таковы:

$$v_j(x,0) \equiv 0, \quad v_j'(x,0) = g_j(x).$$

Решение общей задачи при не равных нулю начальных отклонениях и начальных скоростях будет суммой двух решений $u_j(x,t)$ и $v_j(x,t)$.

4. Колебания струны с некоторыми незакрепленными звеньями

В этом случае имеем множество вариантов, каждый из которых сам по себе имеет право быть исследованным отдельно.

Рассмотрим один такой случай, когда конец звена с номером один свободен, а два других конца закреплены (рис. 4).

Краевые условия задачи имеют вид

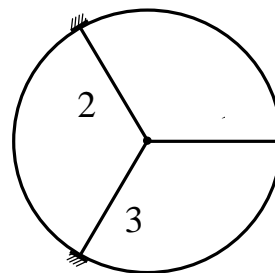


Рис. 4. Одно звено трехзвенной струны свободно

$$u_j(x, R) = 0, \quad j = 2, 3; \quad \left. \frac{\partial u_1}{\partial x} \right|_{x=R} = 0. \quad (4.1)$$

Условия сопряжения – прежние. Начальные условия

$$u_j(x,0) = f_j(x), \quad u_{j't}(x,0) \equiv 0. \quad (4.2)$$

В этом случае находим

$$X_j(x) = A_j \sin \lambda(x - R), \quad j = 2,3, \quad X_1(x) = A_1 \cos \lambda(x - R).$$

Условия сопряжения приводят к системе

$$\begin{cases} A_1 \cos \lambda R + A_2 \sin \lambda R = 0, \\ A_2 \sin \lambda R - A_3 \sin \lambda R = 0, \\ A_1 \sin \lambda R + (A_2 + A_3) \cos \lambda R = 0. \end{cases} \quad (4.3)$$

Характеристическое уравнение для собственных значений будем таким:

$$\Delta_2(\lambda) \equiv \sin \lambda R (2 \cos^2 \lambda R - \sin^2 \lambda R) = 0. \quad (4.4)$$

Имеем две серии собственных значений: $\lambda_n^{(1)} = \frac{n\pi}{R}$,

$$\lambda_n^{(2)} = (\pm \operatorname{arctg} \sqrt{2} + n\pi) \frac{1}{R}.$$

Собственные функции в этой задаче:

$$\text{а) } \lambda = \lambda_n^{(1)}, \quad A_2 + A_3 = 0, \quad y(x, \lambda_n^{(1)}) = \begin{pmatrix} 0 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix} \sin \lambda_n^{(1)}(x - R); \quad (4.5)$$

$$\text{б) } \lambda = \lambda_n^{(2)}, \quad y(x, \lambda_n^{(2)}) = \begin{pmatrix} \sin \lambda_n^{(2)} R \\ -\cos \lambda_n^{(2)} R \\ -\cos \lambda_n^{(2)} R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \lambda_n^{(2)}(x - R) \\ \sin \lambda_n^{(2)}(x - R) \\ \sin \lambda_n^{(2)}(x - R) \end{pmatrix}. \quad (4.6)$$

Полнота и ортогональность системы функций $\sin \lambda_n^{(1)}(x - R)$ не требует доказательства. В отношении системы (4.6) требуется более внимательное и более детальное исследование.

Формальное решение задачи можно представить в виде

$$\begin{pmatrix} u_1(x,t) \\ u_2(x,t) \\ u_3(x,t) \end{pmatrix} = \sum_{n=1}^{\infty} \begin{pmatrix} 0 \\ A_2(n) \\ A_3(n) \end{pmatrix} \sin \lambda_n^{(1)}(x - R) \cos \lambda_n^{(1)} t + \sum_{n=1}^{\infty} c_n y(x, \lambda_n^{(2)}) \cos \lambda_n^{(2)} t; \quad (4.7)$$

$$A_2(n) + A_3(n) = 0,$$

где $\lambda_n^{(2)}$ – положительные.

Начальные условия приводят к равенствам

$$\begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ f_3(x) \end{pmatrix} = \sum_{n=1}^{\infty} \begin{pmatrix} 0 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix} \sin \lambda_n^{(1)}(x - R) + \sum_{n=0}^{\infty} c_n y(x, \lambda_n^{(2)}). \quad (4.8)$$

Условие $A_2(n) + A_3(n) = 0$ подсказывает применить прием симметризации к функциям $f_2(x)$ и $f_3(x)$.

Вводим функции

$$F(x) = \frac{1}{2}(f_2(x) + f_3(x)), \quad \varphi_j(x) = f_j(x) - F(x), \quad j = 2,3. \quad (4.9)$$

Тогда (4.8) можно записать в виде

$$\begin{pmatrix} f_1(x) \\ F(x) + \varphi_2(x) \\ F(x) + \varphi_3(x) \end{pmatrix} = \sum_{n=1}^{\infty} \begin{pmatrix} 0 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix} \sin \lambda_n^{(1)}(x - R) + \sum_{n=1}^{\infty} c_n y(x, \lambda_n^{(2)}). \quad (4.10)$$

Из (4.10) видно, что если функции $\varphi_j(x)$ разложить в ряды Фурье по полной системе $\{ \sin \lambda_n^{(1)}(x - R) \}$, то коэффициенты $A_2(n)$ и $A_3(n)$, найденные обычным способом по классическим формулам Эйлера, будут удовлетворять второму условию в (4.7). В результате получим равенство

$$\begin{pmatrix} f_1(x) \\ F(x) \end{pmatrix} = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \begin{pmatrix} \sin \lambda_n^{(2)} R \cdot \cos \lambda_n^{(2)}(x - R) \\ -\cos \lambda_n^{(2)} R \cdot \sin \lambda_n^{(2)}(x - R) \end{pmatrix}, \quad 0 \leq x \leq R. \quad (4.11)$$

Из этого векторного равенства надо определить коэффициенты c_n .

Для этого рассмотрим функцию

$$z_1(x, \lambda_n^{(2)}) = \begin{cases} \sin \lambda_n^{(2)} R \cdot \cos \lambda_n^{(2)}(x - R), \\ -\cos \lambda_n^{(2)} R \cdot \sin \lambda_n^{(2)}(x - R), \end{cases} \quad 0 \leq x \leq R.$$

Сделаем замены: $x = -x_1$ в верхней формуле последнего равенства и $x = x_1$ в нижней. В результате получим

$$z_1(x_1, \lambda_n^{(2)}) = \begin{cases} \sin \lambda_n^{(2)} R \cdot \cos \lambda_n^{(2)}(x_1 + R), & -R \leq x_1 \leq 0, \\ -\cos \lambda_n^{(2)} R \cdot \sin \lambda_n^{(2)}(x_1 - R), & 0 \leq x_1 \leq R. \end{cases} \quad (4.12)$$

Эта функция является собственной функцией задачи Штурма - Лиувилля:

$$\begin{aligned} y'' + \lambda^2 y &= 0, & -R < x_1 < R, & \quad y(-0) = y(+0), \\ y'(-R) &= y(R) = 0, & \quad y'(-0) &= 2y'(+0). \end{aligned}$$

Последняя задача является спектральной задачей, изученной в работе [2]. Там показано, что собственные значения такой задачи вещественные и простые, а собственные функции ортогональны с весом

$$\rho(x_1) = \begin{cases} 1, & -R \leq x_1 \leq 0, \\ 2, & 0 \leq x_1 \leq R, \end{cases}$$

т.е.

$$\int_{-R}^R \rho(x_1) z_1(x_1, \lambda_n^{(2)}) \cdot z_1(x_1, \lambda_m^{(2)}) dx_1 = 0, \quad m \neq n. \quad (4.13)$$

В работах [2, 5] показана полнота системы собственных функций $\{ z_1(x_1, \lambda_n^{(2)}) \}$. Из этого следует, что формально записанное равенство (4.11) действительно имеет место.

В нашем случае составим функцию

$$F_1(x_1) = \begin{cases} f_1(-x_1), & -R \leq x_1 \leq 0, \\ F(x_1), & 0 \leq x_1 \leq R \end{cases}$$

и используем свойство полноты системы $z_1(x_1, \lambda_n^{(2)})$ на $(-R, R)$.

Можно записать равенство

$$F_1(x_1) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z_1(x_1, \lambda_n^{(2)}) \quad (-R < x_1 < R). \quad (4.14)$$

Из (4.14) с учетом (4.13) найдем

$$c_n = \frac{1}{\|z(x_1, \lambda_n^{(2)})\|^2} \int_{-R}^R F_1(x_1) \rho(x_1) z_1(x_1, \lambda_n^{(2)}) dx, \quad (4.15)$$

где

$$\|z_1(x_1, \lambda_n^{(2)})\|^2 = \int_{-R}^R \rho(x_1) z_1^2(x_1, \lambda_n^{(2)}) dx = 2R \cos^2 \lambda_n^{(2)} R = R \sin^2 \lambda_n^{(2)} R = \frac{2}{3} R.$$

Решение задачи найдено, и оно является единственным. Сходимость ряда (4.14) такая же, как и сходимость обычного ряда Фурье [5].

Аналогичным образом решается задача с начальными данными $u_j(x, 0) = 0$, $u_{j,t}(x, 0) = g_j(x)$.

Указанным приемом можно решить задачу в случае, когда два края струны свободны, а один закреплен.

5. Вынужденные колебания многозвенной струны

Если на звенья струны (см. рис. 1) действует внешняя нагрузка $g_j(x, t)$, рассчитанная на единицу длины, то уравнение вынужденных колебаний будет иметь вид

$$\frac{\partial^2 u_j}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u_j}{\partial t^2} - \frac{g_j(x, t)}{T_0}, \quad j = 1, 2, \dots, N. \quad (5.1)$$

Примем краевые условия такими: $u_j(R, t) = 0$.

Начальные условия:

$$u_j(x, 0) = f_j(x), \quad u_{j,t}(x, 0) = m_j(x).$$

Условия сопряжения звеньев струны имеют вид (1.3), (1.4).

Классический подход [1] к решению этой задачи состоит в том, что она представляется в виде суммы двух решений, первое из которых есть решение однородного уравнения колебаний с начальными данными $f_j(x)$ и $m_j(x)$, а второе – решение неоднородного уравнения (5.1) с нулевыми начальными данными.

Поступим таким же образом. Первое решение нами уже получено, поэтому будем решать вторую задачу.

Систему функций $g_j(x, t)$ подвергнем симметризации. Строим вспомогательные функции

$$F(x, t) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N g_k(x, t) T_0^{-1}, \quad \varphi_j(x, t) = g_j(x, t) T_0^{-1} - F(x, t) \quad (5.2)$$

так, чтобы $T_0^{-1}g_k(x,t) = F(x,t) + \varphi_k(x,t)$ и $\sum_{j=1}^N \varphi_j(x,t) \equiv 0$. Раскладываем их по собственным функциям однородной задачи (1.6), (1.7):

$$F(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n(t) \sin \lambda_n^{(2)}(x-R), \quad \alpha_n(t) = \frac{2}{R} \int_0^R F(\xi,t) \sin \lambda_n^{(2)}(\xi-R) d\xi,$$

$$\varphi_j(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n^{(j)}(t) \sin \lambda_n^{(1)}(x-R), \quad \beta_n^{(j)}(t) = \frac{2}{R} \int_0^R \varphi_j(\xi,t) \sin \lambda_n^{(1)}(\xi-R) d\xi.$$

Отметим, что $\beta_n^{(j)}(t)$ удовлетворяют соотношению

$$\beta_n^{(1)}(t) + \beta_n^{(2)}(t) + \dots + \beta_n^{(N)}(t) \equiv 0. \tag{5.3}$$

Решение неоднородного уравнения (5.1) представим рядом

$$u_j(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_{nj}(t) \sin \lambda_n^{(1)}(x-R) + \sum_{n=0}^{\infty} R_n(t) \sin \lambda_n^{(2)}(x-R). \tag{5.4}$$

Первое условие сопряжения удовлетворяется автоматически, второе – переходит в условие

$$T_{n1}(t) + T_{n2}(t) + T_{n3}(t) \equiv 0. \tag{5.5}$$

Так как

$$g_j(x,t) \cdot T_0^{-1} = F(x,t) + \varphi_j(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n(t) \sin \lambda_n^{(2)}(x-R) + \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n^{(j)}(t) \sin \lambda_n^{(1)}(x-R),$$

то подстановка (5.4) в (5.1) приводит к равенствам

$$\frac{d^2 R_n}{dt^2} + \left(\lambda_n^{(2)}\right)^2 R_n = \alpha_n(t), \quad R_n(0) = R_n'(0) = 0, \tag{5.6}$$

$$\frac{d^2 T_{nj}}{dt^2} + \left(\lambda_n^{(1)}\right)^2 T_{nj} = \beta_n^{(j)}(t), \quad T_{nj}(0) = T_{nj}'(0) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, N. \tag{5.7}$$

Задачи Коши (5.6), (5.7) будем решать методом вариации произвольных постоянных. В итоге найдем

$$R_n(t) = \frac{1}{\lambda_n^{(2)}} \int_0^t \alpha_n(\tau) \sin \lambda_n^{(2)}(t-\tau) d\tau,$$

$$T_{nj}(t) = \frac{1}{\lambda_n^{(1)}} \int_0^t \beta_n^{(j)}(\tau) \sin \lambda_n^{(1)}(t-\tau) d\tau.$$

Отметим, что условие (5.5) удовлетворяется с помощью (5.3).

Подстановка в последние формулы выражений для $\alpha_n(t)$ и $\beta_n^{(j)}(t)$ приводит к равенствам

$$R_n(t) = \frac{2}{R\lambda_n^{(2)}} \int_0^t d\tau \int_0^R F(\xi, \tau) \sin \lambda_n^{(2)}(t - \tau) \sin \lambda_n^{(2)}(\xi - R) d\xi, \quad (5.8)$$

$$T_{nj}(t) = \frac{2}{R\lambda_n^{(1)}} \int_0^t d\tau \int_0^R \varphi_j(\xi, \tau) \sin \lambda_n^{(1)}(t - \tau) \sin \lambda_n^{(1)}(\xi - R) d\xi. \quad (5.9)$$

Формальное решение задачи на этом заканчивается, функция $u_j(x, t)$ определяется формулами (5.4), (5.8), (5.9). Они удовлетворяют всем условиям задачи.

Решение для случая незакрепленных краёв струны находим с использованием результатов третьего пункта.

Пример. Пусть $N = 3$, $g_j(x, t) = T_0 \cdot p(t) \cdot \frac{1}{3} \delta(x - \varepsilon)$, где $\delta(x)$ - дельта функция, $0 < \varepsilon < R$, $j = 1, 2, 3$.

В этом случае $\varphi_j(x, t) = 0$ и $T_{nj}(t) = 0$, $F(x, t) = p(t) \cdot \frac{1}{3} \delta(x - \varepsilon)$,

$$R_n(t) = \frac{2 \sin \lambda_n^{(2)}(\varepsilon - R)}{3R\lambda_n^{(2)}} \int_0^t p(\tau) \sin \lambda_n^{(2)}(t - \tau) d\tau.$$

Положим в последней формуле $\varepsilon = 0$ и подставим $R_n(t)$ в (5.3). В результате найдем

$$u_j(x, t) = \frac{2}{3R} \int_0^t p(\tau) r_1(x, t - \tau) d\tau, \quad r_1(x, t) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n-1/2) \frac{\pi}{R} t}{n-1/2} \cos(n-1/2) \frac{\pi}{R} x.$$

Это есть решение для сосредоточенной в узле силы $p(t)$. Если $p(t)$ имеет производную, то выражению для $u_j(x, t)$ можно придать вид

$$u_j(x, t) = p(t) r_2(x, 0) - p(0) r_2(x, t) - \int_0^t p'(\tau) r_2(x, t - \tau) d\tau,$$

$$r_2(x, t) = \frac{2R}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n-1/2) \frac{\pi}{R} x}{(n-1/2)^2} \cos(n-1/2) \frac{\pi}{R} t, \quad r_2(x, 0) = R - x.$$

Все $u_j(x, t)$ одинаковы. Имеем случай симметричных колебаний.

Выводы

Дана постановка задачи о колебании многозвенной однородной струны с равными звеньями (закрепленными или свободными).

Предложен обобщающий классический метод решения задач о свободных и вынужденных колебаниях такой струны. Метод существенно использует приём симметризации начальных функций, введенный авторами статьи. Этот прием по-

зволяет по начальным данным и нагрузке прогнозировать существование симметричных и несимметричных форм колебаний.

В задаче о нагруженной струне метод симметризации применен также и к нагрузочным функциям, благодаря чему решение этой задачи имеет классическую форму.

Список литературы

1. Тихонов А.Н. Уравнения математической физики / А.Н. Тихонов, А.А. Самарский. – М.: Наука, 1972. – 735 с.
2. Проценко В.С. Некоторые обобщения в теории ортогональных разложений / В.С. Проценко // Математические методы анализа динамических систем: сб. науч. тр. Харьк. авиац. ин-та. – Вып. 1. – Х., 1977. – С. 3-13.
3. Денисова Т.В. Задачи идентификации и управления для многокомпонентных систем с распределёнными параметрами / Т.В. Денисова, В.С. Проценко // Открытые информационные и компьютерные интегрированные технологии: сб. науч. тр. Нац. аэрокосм. ун-та им. Н.Е. Жуковского «ХАИ». – Вып. 45. – Х., 2010. – С. 215-232.
4. Сергиенко И.В. Решение граничных обратных задач для параболических многокомпонентных распределенных систем / И.В. Сергиенко, В.С. Дайнека // Кибернетика и системный анализ. – 2007. – №4. – С. 49-73.
5. Ефимова И.Т. Об одном обобщении интегральной теоремы Фурье и её приложениях / И.Т. Ефимова, Я.С. Уфлянд // ПММ. – 1969. – Т.33. – Вып. 5. – С. 941-944.

Рецензент: д-р физ.-мат. наук, проф. Меньшиков В.А., Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского «ХАИ», Харьков

Поступила в редакцию 21.01.11

Про коливання багатоланкових струн

При класичних гіпотезах розглянуто задачі про вільні та вимушені коливання однорідної багатоланкової струни. Запропоновано метод відшукування точних розв'язків цих задач.

Ключові слова: багатоланкова струна, вільні й вимушені коливання, симетризація початкових і навантажувальних функцій, метод розв'язання.

On vibration of multilink strings

In classic hypothesis the tasks on free and forced vibrations of homogeneous multilink string are considered. The method, which allows to get exact solutions of these problems, is offered.

Keywords: multilink string, free and forced vibrations, symmetrization of initial and load functions, method of solution.