

## **Исследование вероятностных характеристик композитной конструкции при различных значениях приложенной нагрузки**

*Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского «ХАИ»*

Рассмотрена проблема определения вероятности разрушения композитной конструкции (каркаса раскоса шасси самолета Ан-140). Используя специально разработанное программное обеспечение, проведено исследование по определению наиболее эффективной аппроксимирующей модели критериальной функции. По результатам исследования отображена зависимость между значением приложенной сосредоточенной нагрузки и вероятностью работоспособности исследуемого объекта.

**Ключевые слова:** вероятность работоспособности, вероятность разрушения, аппроксимирующая модель критериальной функции, композитная конструкция.

### **1. Введение**

Объем использования композиционных материалов (КМ) в авиации постоянно увеличивается. У современных самолетов он достигает 40 - 50% . Это связано с совокупностью уникальных свойств КМ (относительно небольшая масса, высокая прочность, жаропрочность и т.д.) В настоящее время увеличение объемов использования КМ происходит уже не только за счет их применения для снижения массы конструкции, но и на основе исследований по применению КМ в высоконагруженных деталях и узлах. В связи с существенными случайными разбросами геометрических и физических характеристик КМ такие исследования включают и вероятностный подход.

Вероятностный подход при проектировании технических объектов учитывает влияние, которое случайные факторы оказывают на объект при его проектировании, изготовлении и эксплуатации. С его помощью можно определить вероятность работоспособности/разрушения объекта, основываясь на известных случайных характеристиках объекта. Однако традиционные методы теории вероятностей не подходят, когда речь идет о проектировании авиационных конструкций, поскольку в этом случае необходима гораздо более высокая точность, чем они могут обеспечить [1]. Поэтому для оценки вероятности работоспособности таких конструкций необходима разработка специальных методов.

В настоящее время проводятся исследования в области вероятностного подхода к проектированию авиационных конструкций. Разработаны алгоритмы построения граничных линейных моделей критериальных функций для оценки вероятности работоспособности объектов аэрокосмической техники [2], методы проектной оценки вероятности достижения этими объектами предельных состояний [3]. Произвести оценку качества граничных моделей для определения вероятности разрушения конструкции также можно с помощью специальных методов [4]. Кроме того, исследуются особенности проектирования самолетных конструкций из композиционных материалов на основе стохастических моделей [5].

## 2. Математическая постановка задачи

Основной задачей, поставленной перед автором данной статьи, является определение наиболее эффективной аппроксимирующей модели критериальной функции (КФ) и построение на её основе графика зависимости вероятности работоспособности композитного стержня от приложенной к нему нагрузки.

В качестве объекта исследования выступил каркас раскоса шасси самолета Ан-140 (рис. 1). Исследуемый объект представляет собой полый стержень, созданный посредством намотки композиционной ленты.

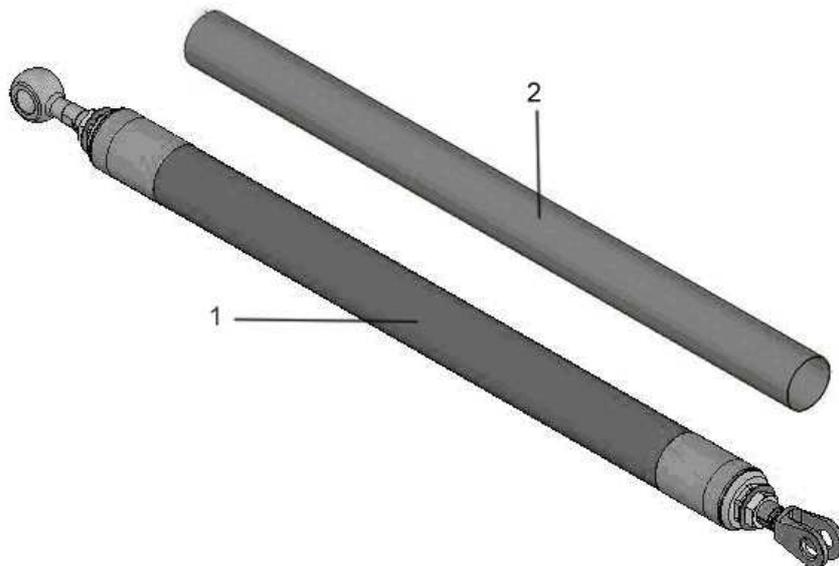


Рис. 1. Раскос шасси самолета Ан-140 (1) и каркас этого раскоса (2)

Критериальная функция представляет собой напряжение, которое возникает в жестко закрепленном с одной стороны композитном стержне при действии на него сосредоточенной сжимающей нагрузки. Она представлена в виде

$$\frac{N}{F} + \eta_{\sigma\epsilon} < A, \quad (1)$$

где  $F$  - площадь поперечного сечения каркаса;

$N$  - сила, приложенная к нему;

$\eta_{\sigma\epsilon}$  - случайная добавка предела прочности материала;

$A$  - граница работоспособности, задаваемая как математическое ожидание предела прочности для материала изделия (см. формулу (3)).

Условие работоспособности исследуемого объекта можно записать в виде:

$$\lambda(p, \eta) < A, \quad (2)$$

где левая часть условия  $\lambda(p, \eta)$  названа критериальной функцией;

$p$  – вектор номинальных параметров объекта;

$\eta$  – вектор случайных разбросов параметров объекта (размерность векторов  $1..n$ , где  $n$  – число случайных параметров исследуемого объекта);

$A$  - ограничение.

Ограничение  $\Lambda$  представляет собой предел прочности для заданного материала –  $\sigma_\epsilon$ . Но предел прочности  $\sigma_\epsilon$  также является случайной величиной, которую можно представить в виде

$$\sigma_\epsilon = \bar{m}_{\sigma_\epsilon} + \eta_{\sigma_\epsilon}, \quad (3)$$

где  $\bar{m}_{\sigma_\epsilon}$  - математическое ожидание предела прочности;

$\eta_{\sigma_\epsilon}$  - случайная добавка предела прочности материала.

Следовательно, условие работоспособности можно переписать в виде

$$\lambda(p, \eta) - \eta_{\sigma_\epsilon} < \bar{m}_{\sigma_\epsilon}. \quad (4)$$

Вероятность работоспособности объекта  $P_p$  можно определить как вероятность выполнения условия (2):

$$P_p = P[\lambda(p, \eta) - \eta_{\sigma_\epsilon} < \bar{m}_{\sigma_\epsilon}]. \quad (5)$$

Вероятность работоспособности объекта определяется двумя способами:

1. Построение граничных линейных моделей (секущей и касательной) КФ, а также аппроксимирующей линейной модели КФ.

Все вышеперечисленные модели строятся для определения закона распределения КФ и его параметров. При этом критериальную функцию аппроксимируют другой функцией, для которой известен закон распределения.

Общая формула, на основе которой строятся все вышеперечисленные модели КФ:

$$\lambda(\eta) = \lambda_0 + \sum_{i=1}^n b_i \eta_i + b_\Lambda \eta_\Lambda, \quad (6)$$

где  $\lambda(\eta)$  – линеаризованная КФ;

$\lambda_0$  – свободный член линейной модели;

$b_i$  – коэффициенты линеаризации линейной модели;

$\eta_i$  – вектор случайных возмущений;

$b_\Lambda$  – коэффициент линеаризации линейной модели при случайной границе;

$\eta_\Lambda$  – случайный разброс граничного значения;

$n$  – количество случайных параметров исследуемого объекта.

У каждого типа моделей КФ различаются исходные значения входящих в формулу (6) параметров, а также алгоритм построения модели.

На основании центральной предельной теоремы можно утверждать, что все перечисленные линейные модели имеют нормальный закон распределения. Параметры нормального закона для линейной модели можно определить по следующим зависимостям:

- математическое ожидание

$$m_\lambda = \lambda_0; \quad (7)$$

- дисперсия

$$D_\lambda = \sum_{i=1}^n b_i^2 D_i + b_\Lambda^2 D_\Lambda, \quad (8)$$

где  $D_i$  - дисперсии разбросов случайных параметров;

$D_\Lambda$  - дисперсия разброса случайной границы;  
 остальные параметры описаны выше (см. формулу (6)),  
 - среднеквадратичное отклонение (с.к.о.)

$$\sigma_\lambda = \sqrt{D_\lambda}. \quad (9)$$

Используя параметры нормального закона распределения линейной модели, для каждой из них можно вычислить соответствующее значение безразмерного аргумента функции Гаусса  $u_\Lambda$ . Значение  $u_\Lambda$  определяется по формуле

$$u_\Lambda = \frac{\Lambda - m_\lambda}{\sigma_\lambda}. \quad (10)$$

Вероятность работоспособности по модели может быть определена как

$$P_p = P[\lambda < \Lambda] = F(\Lambda) = \Phi(u_\Lambda), \quad (11)$$

где  $F(\Lambda)$  - значение функции распределения случайной величины  $\lambda$  в точке  $\lambda = \Lambda$ ;

$\Phi(u_\Lambda)$  - значение функции Гаусса при безразмерном аргументе функции Гаусса  $u$  равном  $u_\Lambda$ .

Чтобы определить вероятность работоспособности объекта  $P_p$  по полученному значению безразмерного аргумента  $u_\Lambda$ , нужно воспользоваться таблицей функции Гаусса (табулированной функции распределения нормальных случайных величин) и по значению безразмерного аргумента  $u_\Lambda$  получить значение функции  $\Phi(u_\Lambda)$ , которое равняется вероятности работоспособности.

## 2. Ускоренное статистическое моделирование (УСМ).

В отличие от обычного статистического моделирования, требующего больших затрат времени и ресурсов, УСМ проводится не по самой КФ, а по ее аппроксимирующей граничной линейной модели. При проведении моделирования сохраняется только заданное количество максимальных хвостовых реализаций КФ и соответствующих им случайных разбросов и реальное моделирование по КФ проводится только для сохраненных наборов случайных разбросов. Это позволяет значительно ускорить вычисление вероятности разрушения объекта.

Задача определения вероятности работоспособности решается в несколько этапов.

*Этап 1.* Определение закона распределения КФ и его параметров. Для этой цели строятся аппроксимирующие граничные линейные модели КФ.

*Этап 2.* Вычисление аналитической вероятности работоспособности  $P_p$  по определенным на первом этапе параметрам закона распределения КФ.

*Этап 3.* Проведение статистического моделирования (СМ) по построенным на первом этапе аппроксимирующим граничным моделям КФ и определение статистической оценки вероятности потери работоспособности  $Q_{СМ}^*$ . При проведении СМ сохраняются наборы максимальных хвостовых реализаций КФ и соответствующих им случайных возмущений  $\eta$  в заданном объеме.

*Этап 4.* Проведение ускоренного статистического моделирования (УСМ) по сохраненным на предыдущем этапе наборам случайных возмущений и определение вероятности потери работоспособности  $Q_{УСМ}^*$ . Вероятность работоспособности по УСМ можно определить как  $1 - Q_{УСМ}^*$ .

### 3. Исследование по определению наиболее эффективной аппроксимирующей модели КФ

Исходные параметры исследуемого объекта (каркаса раскоса шасси):

- длина = 69,5 см;
- площадь поперечного сечения = 4 см<sup>2</sup>;
- материал модели - углерента ЭЛУР - 3.08ПА.

Случайными параметрами исследуемого объекта будем считать:

- Площадь поперечного сечения каркаса (F);
- Силу, приложенную к нему (N);
- СКО  $\sigma_\epsilon$  - границы работоспособности модели (Sigma).

Перечень случайных параметров объекта вместе с номинальными значениями параметров и разбросами приведен в табл. 1.

Таблица 1

Параметр	Номинальное значение	Разброс, %
Площадь поперечного сечения каркаса F (см <sup>2</sup> )	4	20
Нагрузка N (кгс)	17000 (20000)	20
СКО $\sigma_\epsilon$ - границы работоспособности модели Sigma	0	30 (от $\Delta$ )

Разбросы взяты из работы [6].

Для определения наиболее эффективной аппроксимирующей модели КФ исследованы два случая нагружения - 17000 кгс и 20000 кгс.

С помощью разработанного ПО для каждого случая нагружения последовательно построены все модели:

- секущая граничная линейная модель (СГЛМ);
- касательная граничная линейная модель (КГЛМ);
- аппроксимирующая линейная модель по секущей граничной линейной модели (АЛМ по СГЛМ);
- аппроксимирующая линейная модель по касательной граничной линейной модели (АЛМ по КГЛМ).

Для каждой модели получено соответствующее значение безразмерного аргумента функции Гаусса, позволяющее оценить вероятность работоспособности/ разрушения.

Для оценки корректности определения вероятности разрушения по моделям проведено ускоренное статистическое моделирование (УСМ) по каждой модели. Сравним полученную по результатам проведения УСМ вероятность разрушения с вероятностью по модели. Эти данные приведены в табл. 2 и 3.

1. Для случая, когда приложенная нагрузка равна 17000 кгс.

Таблица 2

## Результаты оценки вероятности работоспособности по моделям

Модель	Безразмерный аргумент функции Гаусса	Вероятность работоспособности. по модели
СГЛМ	3,40184	0,9996631
КГЛМ	3,32771	0,9995499
АЛМ (по СГЛМ)	3,33227	0,9995658
АЛМ (по КГЛМ)	3,31415	0,9995335

Таблица 3

## Результаты оценки вероятности работоспособности по УСМ

Модель	Вероятность потери работоспособности по УСМ по модели	Вероятность потери работоспособности по УСМ	Вероятность работоспособности по УСМ
СГЛМ	0,000025	0,000022	0,999978
КГЛМ	0,000014	0,000017	0,999983
АЛМ (по СГЛМ)	0,000022	0,000021	0,999979
АЛМ (по КГЛМ)	0,000021	0,000022	0,999978

2. Для случая, когда приложенная нагрузка равна 20000 кгс

Таблица 4

## Результаты оценки вероятности работоспособности по моделям

Модель	Безразмерный аргумент функции Гаусса	Вероятность работоспособности. по модели
СГЛМ	2,36313	0,990863
КГЛМ	2,31716	0,98983
АЛМ (по СГЛМ)	2,31826	0,98983
АЛМ (по КГЛМ)	2,31741	0,98983

Таблица 5

## Результаты оценки вероятности работоспособности по УСМ

Модель	Вероятность потери работоспособности по УСМ по модели	Вероятность потери работоспособности по УСМ	Вероятность работоспособности по УСМ
СГЛМ	0,005521	0,005591	0,994409
КГЛМ	0,004408	0,00496	0,99504
АЛМ (по СГЛМ)	0,005002	0,005172	0,994828
АЛМ (по КГЛМ)	0,005150	0,005070	0,99493

Таким образом, сравнивая вероятность работоспособности по модели и по УСМ, сделан вывод, что аппроксимирующие модели КФ строятся корректно.

Основываясь на полученных выше результатах, проведено исследование по определению наиболее эффективной аппроксимирующей модели КФ.

Эффективность модели определяется двумя основными показателями:

- степень приближения вероятности разрушения к эталону (по результату статистического моделирования с исходной КФ);
- переменяемостью - чем ниже переменяемость модели, тем лучше она аппроксимирует критериальную функцию.

Для определения первого показателя проведено статистическое моделирование с исходной КФ для двух случаев нагружения:

- $N=17000$ , вероятность потери работоспособности  $Q = 0.000021$ ;
- $N=20000$ , вероятность потери работоспособности  $Q = 0.005281$ .

Приведем сравнительную характеристику по переменяемости построенных моделей в виде табл. 6 и 7.

1. Для случая, когда приложенная нагрузка равна 17000 кгс

Таблица 6

Сравнительная характеристика моделей

Модель	Переменяемость ( $N_n$ )	Коэффициент переменяемости ( $K_n$ )
СГЛМ	17	0,051204
КГЛМ	0	0
АЛМ (по СГЛМ)	4	0,0105263
АЛМ (по КГЛМ)	3	0,00761

2. Для случая, когда приложенная нагрузка равна 20000 кгс

Таблица 7

Сравнительная характеристика моделей

Модель	Переменяемость ( $N_n$ )	Коэффициент переменяемости ( $K_n$ )
СГЛМ	8	0,021739
КГЛМ	8	0,018518
АЛМ (по СГЛМ)	7	0,017632
АЛМ (по КГЛМ)	4	0,010582

Основываясь на приведенных выше результатах, можно сделать вывод, что наиболее эффективной является аппроксимирующая линейная модель КФ на базе касательной граничной линейной модели (АЛМ по КГЛМ).

Используя выбранную наилучшую аппроксимирующую модель КФ, построен график зависимости вероятности работоспособности исследуемого объекта (каркаса раскоса самолета Ан-140) от приложенной нагрузки, изображенный на рис. 2.

Отметим также, что при проведении испытаний раскоса самолета Ан-140 на АНТК «Антонов» разрушение раскоса произошло при увеличении сжимающей нагрузки до 18000 кгс. Как показано на рис. 2, в этой точке начинается резкое уменьшение вероятности работоспособности объекта.

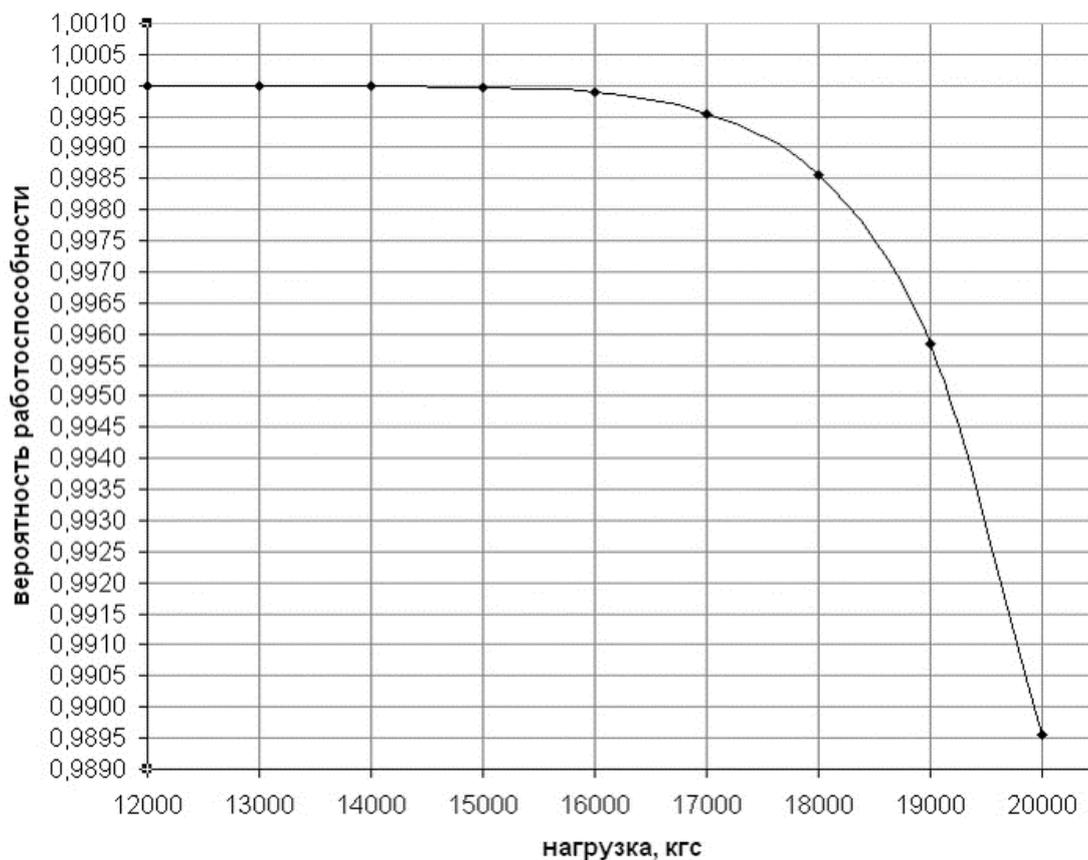


Рис. 2. График зависимости вероятности работоспособности от приложенной нагрузки

#### 4. Выводы

Таким образом, в результате проведенных исследований определена наиболее эффективная аппроксимирующая модель – аппроксимирующая линейная модель КФ на базе касательной граничной линейной модели – и отображена зависимость между приложенной нагрузкой и вероятностью работоспособности исследуемого объекта.

Дальнейшие исследования в данной области будут направлены, прежде всего, на разработку еще более эффективных методов оценки вероятности работоспособности/разрушения конструкции, а также на определение методической погрешности при таких расчетах.

#### Список литературы

1. Хан Г. Статистические модели в инженерных задачах / Г.Хан, С.Шапиро. – М.: Мир, 1969. – 395 с.
2. Лежнина М.В. Алгоритмы построения граничных линейных моделей критериальных функций для оценки вероятности работоспособности объектов аэрокосмической техники / М.В.Лежнина, В.Г.Сухоревый // Открытые информационные и компьютерные интегрированные технологии: сб. науч. тр. Нац. аэрокосм. ун-та им. Н.Е.Жуковского «ХАИ». – Вып. 12. – Х., 2002. – С. 63 - 74.

3. Лежнина М.В. Проектная оценка вероятности достижения объектами аэрокосмической техники предельных состояний / М.В.Лежнина, В.Г.Сухоребрый - Х.: ХАИ, 2005. – 184 с.

4. Сухоребрый В.Г. Оценка качества граничных моделей для определения вероятности разрушения конструкции / В.Г. Сухоребрый, А.С. Стерлева // Открытые информационные и компьютерные интегрированные технологии: сб. науч. тр. Нац. аэрокосм. ун-та им. Н.Е.Жуковского «ХАИ». – Вып. 24. – Х., 2004. – С. 242 - 249.

5. Капитанова Л.В. Проектирование самолетных конструкций из композиционных материалов на основе стохастических моделей: диссертация канд. техн. наук: 05.07.02 : защищена 22.01.02; утв. 15.07.02 / Капитанова Людмила Валерьевна – Х., 2002. – 179 с.

6. Оценка допускаемых напряжений для расчета устойчивости панели из композиционного материала при различных уровнях надежности / А.С. Стерлева, Е.Т. Василевский, П.И. Горобец, Ю.В. Голочев // Открытые информационные и компьютерные интегрированные технологии: сб. науч. тр. Нац. аэрокосм. ун-та им. Н.Е.Жуковского «ХАИ». – Вып. 39. – Х., 2008. – С. 52 - 64.

**Рецензент:** д-р техн. наук, проф., зав. каф. № 105 Е.А.Дружинин, Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского «ХАИ», Харьков

Поступила в редакцию 06.06.11.

### **Дослідження ймовірнісних характеристик композитної конструкції при різних значеннях прикладеного навантаження**

Розглянуто проблему визначення ймовірності руйнування композитної конструкції (каркаса розкосу шасі літака Ан-140). Використовуючи спеціально розроблене програмне забезпечення, проведено дослідження з визначення найбільш ефективної апроксимуючої моделі критеріальної функції. За результатами дослідження відображено залежність між значенням прикладеного зосередженого навантаження і ймовірністю працездатності досліджуваного об'єкта.

**Ключові слова:** ймовірність працездатності, ймовірність руйнування, апроксимуюча модель критеріальної функції, композитна конструкція.

### **The research of the composite structure probabilistic characteristics for different values of the applied load**

The problem of determination probability of composite structure failure (landing gear brace of An-140) is considered. Using specially designed software, the research for determination the most effective approximated model of the criterial function was carried out. According to the results of the research the dependence between the value of the applied concentrated load and the probability of the test object operability was shown.

**Keywords:** probability of operability, probability of failure, approximated model of the criterial function, composite structure.