УДК 519.8 С.В. Левин, А.А. Петрик

Теоретико-игровой подход к решению многокритериальной задачи о назначениях

Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского «ХАИ»

Изложен метод решения задачи о назначениях с произвольным количеством линейных критериев, заключающийся в решении однокритериальных задач о назначениях в виде задач линейного программирования отдельно по каждому критерию и последующем получении компромиссного решения, минимально суммарно уклоненного от частных решений. Задача поиска весовых коэффициентов компромиссного решения формулируется в виде игровой задачи и решается как пара взаимнодвойственных задач линейного программирования. Приведен алгоритм получения матрицы назначений из компромиссной матрицы на базе гипотезы о назначениях. Сформулированы примеры критериев.

Ключевые слова: задача о назначениях, многокритериальная, критерий оптимальности, линейное программирование, теоретико-игровой подход, матрица назначений, гипотеза о назначениях.

Введение

В условиях неопределенности в начале и в ходе выполнения проектов множество деталей, например, таких, как разбиение функциональности на отдельные задания, оценивание времени выполнения того или иного задания, возникают и обсуждаются уже в процессе разработки. Разработчики программного обеспечения не могут составить план всего проекта, поэтому современные методологии реализации программных проектов становятся более гибкими, долгосрочное планирование ориентировочно, и на первый план выходит оперативное планирование, один из важнейших элементов которого – распределение заданий между членами команды разработчиков. Во многих методологиях члены команды сами распределяют задания, причем эта задача решается многократно и даже ежедневно, зачастую на интуитивном уровне [1, 2].

Формальная постановка такой задачи называется задачей о назначениях. Она заключается в максимально эффективном распределении n исполнителей на n заданий так, чтобы каждый исполнитель выполнял только одно задание. Предполагается, что каждый исполнитель способен выполнить любое из заданий, но с разной эффективностью, причем кроссфункциональность самоорганизующихся Scrum-команд делает это предположение вполне обоснованным. Решение такой задачи с одним критерием оптимальности, например, максимальной суммарной производительности, минимальной суммарной стоимости или минимальному суммарному времени выполнения, сводится к решению задачи линейного программирования с $2n$ ограничениями-равенствами симплекс-методом [3] или венгерским методом [4]. В реальности на распределение исполнителей влияет множество факторов, таких, как часовая ставка исполнителя, его квалификация по отдельным типам заданий, приоритетность заданий, риски, связанные с возможностью невыполнения, и т.д., которые невозможно учесть в рамках одного универсального критерия оптимальности.

Таким образом, особую актуальность приобретают подходы, позволяющие ставить и решать задачи о назначениях с несколькими критериями. Различные методы решения этих задач рассмотрены во многих работах [5 - 8].

Один из способов [5] решения многокритериальных задач о назначениях – человекомашинные процедуры (ЧМП), которые представляют собой циклический процесс взаимодействия лица, принимающего решения (ЛПР), и компьютера. Каждый шаг ЧМП состоит из фазы анализа, выполняемой ЛПР, и фазы компьютерных расчетов.

В статье [6] предложено решение многокритериальной задачи о назначениях в виде задачи линейного программирования, сводя все ее критерии в одну функцию цели. Приведены некоторые варианты оптимизации.

Метод, изложенный в работе [7], основан на генетическом алгоритме поиска оптимального решения, при этом в формировании начальных условий участвует группа экспертов, которые также задействованы в отборе лучших вариантов, выдаваемых оператором кроссовинговера.

В работе [8] предложен метод поиска оптимального решения многокритериальной задачи о назначениях через поиск допустимого решения (способ получения этого допустимого решения не описан). Каждый критерий представлен как дополнительное ограничение общей задачи, а функция цели – как сумма функций цели частных задач. Решение этой задачи либо подтверждает оптимальность допустимого решения, либо дает другое оптимальное решение.

В данной работе описан подход, позволяющий решать задачи о назначениях любой размерности с произвольным количеством линейных критериев без участия экспертов, не требующий сведения критериев в одну функцию цели.

Постановка задачи

Необходимо найти матрицу назначений

$$X = \{x_{ij}\} \quad (i = \overline{1,n}, \quad j = \overline{1,n}),$$

где

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } i\text{-й исполнитель назначен на } j\text{-е задание,} \\ 0, & \text{если } i\text{-й исполнитель не назначен на } j\text{-е задание,} \end{cases}$$

при наличии s линейных критериев оптимальности (максимизации или минимизации)

$$Z^{(k)} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} c_{ij}^{(k)} x_{ij} \to extr \quad (k = \overline{1,s}) \tag{1}$$

с ограничениями:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 \quad (i = \overline{1,n});$$
$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1 \quad (j = \overline{1,n}). \qquad (2)$$

Для каждого отдельного критерия (линейной целевой функции) это задача линейного программирования с $2n$ ограничениями-равенствами, решение которой – матрица $X^{(k)} = \left\{ x_{ij}^{(k)} \right\} \quad (i = \overline{1,n}, \quad j = \overline{1,n}, \quad k = \overline{1,s})$, где в каждой строке и каждом столбце только один элемент равен 1, остальные – 0.

Решение заключается в нахождении компромиссной матрицы в виде выпуклой линейной комбинации

$$X^{(0)} = \sum_{k=1}^{s} \lambda_k X^{(k)} \qquad (3)$$

и получении из нее матрицы назначений X по специальному правилу.

Решение задачи

Предлагаемый метод решения многокритериальной задачи о назначениях есть развитие теоретико-игрового подхода к решению многокритериальных задач [9]. Алгоритм решения состоит в последовательном выполнении следующих шагов:

Шаг 1. Решаем однокритериальные задачи линейного программирования симплекс-методом [3] для каждой целевой функции системы (1) с общей системой ограничений (2). Получаем s частных матриц назначений $X^{(k)} \ (k = \overline{1,s})$, каждая из которых оптимальна для «своего» критерия и в общем случае неоптимальна для остальных критериев. Из одинаковых $X^{(k)}$ оставляем по одной. Если все частные матрицы одинаковы, то задача о назначениях решена.

Шаг 2. Найдем меры неоптимальности оставшихся $p \le s$ частных матриц назначений для каждого из критериев:

$$q_{lm} = \left| \frac{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij}^{(m)} x_{ij}^{(m)} - \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij}^{(m)} x_{ij}^{(l)}}{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij}^{(m)} x_{ij}^{(m)}} \right|, \qquad (4)$$

где l – номер частной матрицы $(l = \overline{1,p})$; m – номер критерия $(m = \overline{1,s})$.

Матрицу Q можно рассматривать как платежную матрицу прямоугольной игры двух игроков с нулевой суммой [9], где первый игрок представлен набором альтернатив – частных матриц назначений $X^{(k)}(k=\overline{1,p})$, а второй – совокупностью критериев оптимальности (1).

Для игровой постановки с матрицей выигрышей первого игрока величину неоптимальности, полученную по формуле (4), следует понимать как проигрыш от подстановки частной матрицы в «не свой» критерий, поэтому в матрице выигрышей ее нужно учитывать с отрицательным знаком. Таким образом, матрица выигрышей первого игрока

$$Q' = -Q \; .$$

Очевидно, что первый игрок при такой матрице Q' выиграть не может. Необходимо найти оптимальную смешанную стратегию первого игрока, гарантирующую минимальный суммарный проигрыш. Элементы вектора этой стратегии и будут весовыми коэффициентами λ_k для компромиссной матрицы $X^{(0)}$, обеспечивающей минимальную суммарную неоптимальность (проигрыш) по всем критериям.

Шаг 3. Прямоугольная игра двух игроков с нулевой суммой сводится к паре взаимндвойственных задач линейного программирования [3, 10], однако если для этого использовать матрицу выигрышей Q' непосредственно, то в симплекс-таблице с положительным единичным столбцом все элементы, среди которых следует искать разрешающий элемент для модифицированных жордановых исключений, будут меньше нуля. Это не позволит использовать симплекс-метод для нахождения оптимального решения, так как не будет ни одного неотрицательного отношения элементов единичного столбца к элементам разрешающего столбца. Поэтому матрицу Q' следует заменить эквивалентной матрицей Q'' с неотрицательными элементами, для чего из каждого элемента матрицы Q' нужно вычесть число, равное минимальному элементу матрицы Q'. Такое преобразование не изменяет оптимальных стратегий игроков (см. доказательство основной теоремы теории матричных игр в работе [11]).

Шаг 4. Решим с помощью симплекс-метода пару двойственных задач, причем необходимо только $u^* = (u_1^*, ..., u_p^*)$ – решение двойственной задачи, из которого получаем оптимальную смешанную стратегию $(\lambda_1^*, ..., \lambda_p^*)$ первого игрока по формуле

$$\lambda_k^* = \frac{u_k^*}{W(u^*)} \quad (k=\overline{1,p}),$$

где $W(u^*)$ – оптимальное значение функции цели двойственной задачи;

$$\sum_{k=1}^{p} \lambda_k = 1, \quad \lambda_k \geq 0 \quad (k=\overline{1,p}).$$

Шаг 5. Получаем искомую компромиссную матрицу

$$X^{(0)} = \sum_{k=1}^{p} \lambda_k X^{(k)}. \qquad (5)$$

Шаг 6. Обнуляем матрицу назначений X размером $n \times n$. Заполняем матрицу назначений, применяя n раз следующее правило 1-2-3:

1) ищем максимум в компромиссной матрице. Пусть он находится на (i, j)-м месте;

2) записываем единицу на (i, j)-е место в матрице назначений;

3) обнуляем i-ю строку и j-й столбец в компромиссной матрице.

Полное заполнение матрицы назначений (именно n шагов правила 1-2-3) обеспечивается гипотезой о назначениях.

Примечание. Если в шаге 1 оставить все матрицы, то одинаковым $X^{(k)}$ (для упрощения $k = \overline{1, r}, \quad r < s$) будут соответствовать одинаковые строки матрицы выигрышей первого игрока. Тогда при одной и той же цене игры первый игрок имеет множество оптимальных стратегий, в каждой из которых сумма $\sum_{k=1}^{r} \lambda_k$ будет одной и той же, что не повлияет на вид компромиссной матрицы.

Гипотеза о назначениях

Пусть рассматривается система

$$V^{(k)} = \left\{ v_{ij}^{(k)} \right\} \quad (i = \overline{1, n}, \quad j = \overline{1, n}, \quad k = \overline{1, l}) \qquad (6)$$

из l неодинаковых матриц, в каждой строке и каждом столбце которых только один элемент равен 1, а остальные – 0. Пусть V – выпуклая линейная комбинация этих матриц:

$$V = \sum_{k=1}^{l} \lambda_k V^{(k)};$$

$$\sum_{k=1}^{l} \lambda_k = 1, \quad \lambda_k \geq 0 \quad (k = \overline{1, l}); \qquad (7)$$

$$\lambda_i \neq \lambda_j \quad (i \neq j; \quad i, j = \overline{1, l}).$$

Тогда, если искать в V максимум и обнулять его строку и столбец, то повторение этой операции приведет к нулевой матрице V только за n шагов.

Предполагается, что на практике коэффициенты линейной комбинации получаются неодинаковыми, хотя одинаковые коэффициенты теоретически возможны и при этом для них несложно сгенерировать примеры полного заполнения матрицы назначений.

Примеры критериев

Для многокритериальной задачи о назначениях следует составлять по возможности независимые критерии, учитывающие различные параметры заданий и исполнителей, например:

1. Критерий максимальной суммарной эффективности использования исполнителей

$$Z^{(1)} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} c_{ij}^{(1)} x_{ij} \to \max,$$

где $c_{ij}^{(1)} = \frac{Q_{ij}}{T_i}$;

Q_{ij} – квалификация i-го исполнителя по j-му типу заданий;

T_i – часовая ставка i-го исполнителя.

2. Критерий назначения на более важные задания исполнителей с большей квалификацией

$$Z^{(2)} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} c_{ij}^{(2)} x_{ij} \to \max,$$

где $c_{ij}^{(2)} = Q_{ij} P_j$;

P_j – важность j-го задания (чем выше важность, тем больше ее значение).

3. Минимизация суммы рисков, связанных с возможностью несвоевременного выполнения заданий

$$Z^{(3)} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} c_{ij}^{(3)} x_{ij} \to \min,$$

где $c_{ij}^{(3)} = \frac{P_j}{Q_{ij}} D_{ij}$;

$D_{ij} = \left| \frac{IE_{ij} - PM_{ij}}{PM_{ij}} \right|$ (здесь знаменатель нужен для нормировки рисков по заданиям различной трудоемкости);

IE_{ij} – индивидуальная оценка времени выполнения j-го задания i-м исполнителем, принимаемая в качестве планового времени выполнения задания;

PM_{ij} – оценка времени выполнения j-го задания i-м исполнителем, данная лицом, исполняющим функции руководителя проекта.

Особенности данного подхода

Предполагается, что критерии задачи имеют одинаковую важность. При этом теоретически возможен случай, когда по большинству из критериев получена одна и та же частная матрица, но ее назначения могут вообще не войти в итоговую матрицу назначений. Это объясняется следующим образом:

Пусть в шаге 1 получены r одинаковых $X^{(k)}$ (для упрощения $k = \overline{1, r}, \quad r < s$). Из них оставлена одна и коэффициент при ней в выражении (5) может быть меньшим, чем коэффициент при другой частной матрице $X^{(l)}$, назначения которой не пересекаются с назначениями матриц $X^{(k)}$ (при простом сложении $X^{(l)}$ и $X^{(k)}$ нет элементов, не равных 1). Тогда в итоговую матрицу назначений могут войти только назначения частной матрицы $X^{(l)}$.

Теоретически возможны также случаи, когда частные матрицы, участвующие в формировании компромиссной матрицы, не пересекаются и коэффициенты при них одинаковы. Тогда все ненулевые элементы компромиссной матрицы будут равны между собой и результат применения алгоритма 1-2-3 зависит от порядка выбора очередного максимума. Несложно сгенерировать примеры такого порядка выбора, который не приведет к полному заполнению матрицы назначений.

Поскольку для каждого n возможно $n!$ разных частных матриц, $(n!)^s$ различных комбинаций которых могут формировать компромиссную матрицу, критерии по возможности независимы, а весовые коэффициенты выпуклой линейной комбинации получаются после многоходовых вычислений, то теоретически возможные случаи маловероятны и предложенный метод вполне можно применять в системах поддержки принятия решений о распределении заданий между исполнителями.

Список литературы

1. Книберг Х. Scrum и XP: заметки с передовой. Как мы делаем SCRUM: пер. с англ. / Х. Книберг.– InfoQ, 2007. – 91 с.

2. Бек К. Экстремальное программирование: пер. с англ. / К. Бек. – СПб.: Питер, 2002. – 224 с.

3. Зуховицкий С. И. Линейное и выпуклое программирование / С.И. Зуховицкий, Л.И. Авдеева. – М.: Наука, 1967. – 460 с.

4. Линейное и нелинейное программирование: моногр./ И.Н. Ляшенко, Е.А. Карагодова, Н.В. Черникова, Н.З. Шор.– К.: Вища шк., 1975. – 372 с.

5. Ларичев О. И. Теория и методы принятия решений / О. И. Ларичев. – М.: Логос, 2000. – 296 с.

6. Bao Chiao-Pin. A new approach to study the multi-objective assignment problem / Chiao-Pin Bao, Ming-chi Tsai, Meei-ing Tsai // WHAMPOA - An Interdisciplinary Journal. – 2007. – №53. – С. 123 - 132.

7. Протасов В.И. Решение многокритериальной задачи назначений методом генетического консилиума / В.И. Протасов, Н.И. Витиска, Е. В. Шустов // Российский экономический Интернет-журнал, 2003. http://www.e-rej.ru/Articles/2003/Counsil.pdf.

8. ODIOR A. O. Determining Feasible Solutions of a Multicriteria Assignment Problem / A. O. ODIOR, O. E. CHARLES-OWABA, F. A. OYAWALE // J. Appl. Sci. Environ. Manage. – March, 2010. - № 14(1). – С. 35 - 38

9. Яловкин Б.Д. Об одном методе решения многокритериальной задачи линейного программирования / Б.Д. Яловкин, К.А. Передерий // Проблемы информатики в создании автоматизированных систем: сб. науч. тр. Харьк. авиац. ин-та. – Х.: ХАИ, 1990. – С. 55 - 60.

10. Льюис Р.Д. Игры и решения: Введение и критический обзор / Р.Д. Льюис, Х. Райфа. – М.: Изд-во иностранной литературы, 1961. – 642 с.

11. Мак-Кинси Дж. Введение в теорию игр / Дж. Мак-Кинси. – М.: Физматгиз, 1960. – 420 с.

Рецензент: д.т.н., проф., зав. каф. Туркин И.Б., Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского «ХАИ», Харьков

Поступила в редакцию 19.05.11

Теоретико-ігровий підхід до розв'язання багатокрітеріальної задачі про призначення

Подано метод розв'язання задачі про призначення з довільною кількістю лінійних критеріїв, що полягає у вирішенні однокритеріальних задач про призначення у вигляді задач лінійного програмування окремо за кожним критерієм і наступному одержанні компромісного рішення з мінімальним сумарним ухиленням від частинних розв’язків. Завдання пошуку вагових коефіцієнтів компромісного рішення формулюється у вигляді ігрової задачі й вирішується як пара взаємнодвоїстих задач лінійного програмування. Наведено алгоритм отримання матриці призначень з компромісної матриці на базі гіпотези про призначення. Сформульовано приклади критеріїв.

Ключові слова: задача про призначення, багатокритеріальна, критерій оптимальності, лінійне програмування, теоретико-ігровий підхід, матриця призначень, гіпотеза про призначення.

Game theory approach to solve a multi-objective assignment problem

Method for solving an assignment problem with an arbitrary number of linear criteria is presented. It consists in solving one-objective assignment problems as problems of linear programming for every criterion separately and then obtaining a compromise solution with minimum total deviation from partial solutions. The problem of finding weights of the compromise solution is stated as a game problem and solved as a pair of mutually dual linear programming problems. The algorithm based on the assignment hypothesis and intended for obtaining an assignment matrix from a compromise matrix is given. Examples of criteria are formulated.

Keywords: assignment problem, multi-objective, optimality criterion, linear programming, game-theory approach, assignment matrix, assignment hypothesis